ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXVII, № 6, 1974 Механика

Э. Х. ГРИГОРЯН

К ДИНАМИЧЕСКОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ДВУХ ПОЛУПЛОСКОСТЕЙ, СОЕДИНЁННЫХ МЕЖДУ СОБОЙ УПРУГОЙ НАКЛАДКОЙ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Рассматривается динамическая контактная задача для двух полуплоскостей, сцеплённых между собой на конечном отрезке своих границ посредством упругой накладки малой толщины. Решение задачи сводится к решению системы интегральных уравнений, которая при помощи многочленов Якоби затем сводится к бесконечной системе линейных уравнений. Доказывается, что эта бесконечная система уравнени квазивполне регулярна. Одновременно с этим для ядер интегральных уравнений получены простые аналитические выражения, вполне допустимые для практических целей и сколь угодно мало отличающиеся от истинного.

Рассматриваемая задача связана с важными для инженерной практики задачами о передаче нагрузки к упругим телам.

1. Постановка задачи. Вывод разрешающего уравнения

Пусть две полуплоскости с одинаковыми упругими постоянными сцеплены между собой на конечном отрезке $[-a, a]$ своих границ упругой накладкой малой толщины h и находятся в условиях плоской деформации. Требуется определить закон распределения контактных напряжений вдоль отрезка соединения упругой накладки с полуплоскостями, когда к одному из концов накладки приложена сосредоточенная горизонтальная гармоническая сила $P\sin\omega t$ (фиг. 1). Для простоты выкладок в дальнейшем эту силу возьмем в виде $Pe^{-i\omega t}$. Очевидно, что нужное решение затем можно получить элементарным способом.

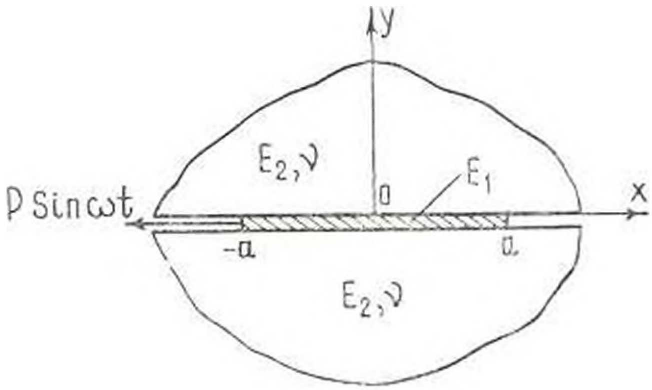
Вследствие малости толщины накладки, как в [1, 2], считается, что ее толщина в процессе деформации не изменяется. В рамках этого предположения здесь учитываются нормальные контактные напряжения. С другой стороны, считается, что под действием только горизонтальных сил накладка находится в одноосном напряженном состоянии.

Тогда, как и в работе [3], для определения амплитуды горизонтальных перемещений $u_*^{(1)}(x)$ получим граничную задачу

$$
\frac{d^2u_*^{(1)}(x)}{dx^2}+k^2u_*^{(1)}(x)=-\frac{2\tau_*(x)}{E_1h},\qquad k=\omega\sqrt{\frac{\rho_1}{E_1}},\quad -a<x<a
$$

$$
\left.\frac{du_*^{(1)}(x)}{dx}\right|_{x=-a}=-\frac{P}{E_1h},\qquad \left.\frac{du_*^{(1)}(x)}{dx}\right|_{x=a}=0 \tag{1.1}
$$

Здесь $\tau_*(x)$ — амплитуда неизвестных тангенциальных контактных напряжений, E_1 — модуль упругости материала накладки, ρ_1 — плотность материала накладки.



Фиг. 1.

Для амплитуды же вертикальных перемещений, согласно сделанному предположению, будем иметь условие

$$v^{(1)}(x) = 0$$

Следует отметить, что при этом предполагалось наличие режима установившихся колебаний накладки, а именно:

$$u^{(1)}(t,\ x) = u_*^{(1)}(x)\, e^{-i\omega t}, \quad \tau(x,\ t) = \tau_*(x)\, e^{-i\omega t}$$

Следуя методике, указанной в работах [3, 4], для амплитуд горизонтальных и вертикальных перемещений точек границы упругой полуплоскости, когда на конечном отрезке $[-a, a]$ границы полуплоскости одновременно действуют горизонтальные и вертикальные гармонические силы интенсивностей амплитуд $\tau_*(x)$ и $q_*(x)$ соответственно, можно получить следующие выражения:

$$u_*^{(2)}(ax) = \frac{a}{\mu_2}\int_{-1}^{1} K(k_2 a\,|x-s|)\,\tau_*(as)\,ds - \frac{a}{\mu_2}\int_{-1}^{1} \Pi\,[k_2 a\,(x-s)]\,q_*(as)\,ds$$

$$v_*^{(2)}(ax) = \frac{a}{\mu_2}\int_{-1}^{1} K^*(k_2 a\,|x-s|)\,q_*(as)\,ds + \frac{a}{\mu_2}\int_{-1}^{1} \Pi\,[k_2 a\,(x-s)]\,\tau_*(as)\,ds \qquad (1.2)$$

где

$$K(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{s^2-1}\,e^{izs}\,ds}{(2s^2-1)^2 - 4s^2\sqrt{(s^2-1)(s^2-\varepsilon^2)}}, \qquad k_2 = \omega\sqrt{\frac{\rho_2}{\mu_2}}$$

$$\Pi(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{is\left(2s^2-1-2\sqrt{(s^2-1)(s^2-\varepsilon^2)}\right)e^{-izs}\,ds}{(2s^2-1)^2-4s^2\sqrt{(s^2-1)(s^2-\varepsilon^2)}}$$

$$k_1=\omega\sqrt{\frac{\rho_2}{\lambda_2+2\mu_2}}$$

$$K^*(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{s^2-1}\,e^{-izs}\,ds}{(2s^2-1)^2-4s^2\sqrt{(s^2-1)(s^2-\varepsilon^2)}},\qquad \varepsilon=\sqrt{\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}}$$

а λ_2, μ_2 — постоянные Ляме упругой полуплоскости, ρ_2 — плотность материала упругой полуплоскости, ν — коэффициент Пуассона.

Далее, на отрезке соединения накладки с полуплоскостями должно выполняться условие

$$u_*^{(1)}(ax)=u_*^{(2)}(ax),\quad v_*^{(1)}(ax)=v_*^{(2)}(ax),\qquad -1\le x\le 1$$

которое в сочетании с соотношениями (1.1) и (1.2) задачу определения амплитуд $\tau_*(ax)$ и $q_*(ax)$ неизвестных тангенциальных и нормальных контактных напряжений сводит к решению системы интегральных уравнений

$$\int_{-1}^{1}\left[K(k_2'|x-s|)-2\nu^*G(k^*x,\,k^*s)\right]\tau(s)\,ds-$$
$$-\int_{-1}^{1}\Pi[k_2'(x-s)]\,\omega(s)\,ds=\frac{\cos[k^*(x-1)]}{k^*\sin 2k^*}\tag{1.3}$$
$$\int_{-1}^{1}K^*(k_2'|x-s|)\,\omega(s)\,ds-\int_{-1}^{1}\Pi[k_2'(x-s)]\,\tau(s)\,ds=0$$

где положено

$$\tau(x)=\frac{\tau_*(ax)\,a}{\nu^*P},\quad \omega(x)=\frac{q_*(ax)\,a}{\nu^*P},\quad \nu^*=\frac{\mu_2 a}{E_1h},\quad k_2'=ak_1,\quad k^*=ak$$

$$G(k^*x,\,k^*s)=\begin{cases}-\dfrac{1}{k^*\sin 2k^*}\cos[k^*(x+1)]\cos[k^*(s-1)], & x\le s\\[2ex] \dfrac{1}{k^*\sin 2k^*}\cos[k^*(s+1)]\cos[k^*(x-1)], & x\ge s\end{cases}$$

Структуры ядер, которые можно получить изложенным в работе [4] способом, даются формулами

$$K^*(x) = -\frac{1}{2(1-\varepsilon^2)\pi}\ln\frac{1}{|k_2^*x|} - \frac{A}{2(1-\varepsilon^2)} -$$

$$-\frac{1+\varepsilon^4}{16(1-\varepsilon^2)^2}(k_2^*x)^2\left(\frac{1}{\pi}\ln|k_2^*x| - A\right) - \frac{1+\varepsilon^4}{32\pi(1-\varepsilon^2)^2}(k_2^*x)^2 -$$

$$-\frac{\varepsilon^8-2(\varepsilon^6+\varepsilon^4+\varepsilon^2)-3}{768(1-\varepsilon^2)^3}(k_2^*x)^4\left(\frac{1}{\pi}\ln\frac{1}{|k_2^*x|}+A+\frac{25}{12\pi}\right) +$$

$$+\frac{i(k_2^*x)^5}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} q_1(s)\,e^{-isk_2^*x}\,ds \tag{1.4}$$

$$K^{**}(x) = -\frac{1}{2(1-\varepsilon^2)\pi}\ln\frac{1}{|k_2^*x|} - \frac{B}{2(1-\varepsilon^2)} -$$

$$-\frac{3-4\varepsilon^2+3\varepsilon^4}{16(1-\varepsilon^2)^3}(k_2^*x)^2\left(\frac{1}{\pi}\ln|k_2^*x| - B\right) - \frac{3(3-4\varepsilon^2+3\varepsilon^4)}{32\pi(1-\varepsilon^2)^3}(k_2^*x)^2 +$$

$$+\frac{\varepsilon^8+2\varepsilon^6-22\varepsilon^4+18\varepsilon^2-11}{768(1-\varepsilon^2)^3}(k_2^*x)^4\left(\frac{1}{\pi}\ln|k_2^*x| - B + \frac{25}{12\pi}\right) +$$

$$+\frac{i(k_2^*x)^5}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} q_2(s)\,e^{-isk_2^*x}\,ds \tag{1.5}$$

$$\Pi(k_2^*x) = -\frac{\varepsilon^2}{4(1-\varepsilon^2)}\operatorname{sign}x + \frac{1-\varepsilon^4-\varepsilon^6+\varepsilon^8}{16(1-\varepsilon^2)^3}(k_2^*x)^2\operatorname{sign}x +$$

$$+\frac{2\varepsilon^{10}-5\varepsilon^8+2\varepsilon^2-3}{1536(1-\varepsilon^2)^5}(k_2^*x)^4\operatorname{sign}x + \frac{i(k_2^*x)^5}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} q_3(s)\,e^{-isk_2^*x}\,ds \tag{1.6}$$

Здесь $q_1(x)$, $q_2(x)$ и $q_3(x)$ — функции, суммируемые на вещественной оси $(-\infty, \infty)$, а

$$A = -\frac{C}{\pi} - \frac{2(1-\varepsilon^2)}{\pi}\int_0^1 k(s)\,ds - \frac{2(1-\varepsilon^2)}{\pi}\int_1^{\infty}\left[k(s) - \frac{1}{2(1-\varepsilon^2)}\frac{1}{s}\right]ds$$

$$B = -\frac{C}{\pi} - \frac{2(1-\varepsilon^2)}{\pi}\int_0^1 k^*(s)\,ds - \frac{2(1-\varepsilon^2)}{\pi}\int_1^{\infty}\left[k^*(s) - \frac{1}{2(1-\varepsilon^2)}\frac{1}{s}\right]ds$$

$$k(s) = \frac{\sqrt{s^2-1}}{(2s^2-1)^2 - 4s^2\sqrt{(s^2-1)(s^2-\varepsilon^2)}}$$

$$k^*(s) = \frac{\sqrt{s^2-\varepsilon^2}}{(2s^2-1)^2 - 4s^2\sqrt{(s^2-1)(s^2-\varepsilon^2)}}$$

C — известная постоянная Эйлера.

Таким образом, на основании этих формул имеем следующие представления:

$$K(k_2^* x) = -\frac{1}{2(1-\varepsilon^2)\pi}\ln\frac{1}{|k_2^* x|} + R(k_2^* x)$$

$$\prod(k_2^* x) = -\frac{\varepsilon^2}{4(1-\varepsilon^2)}\operatorname{sign} x + D(k_2^* x)$$

$$K^*(k_2^* x) = -\frac{1}{2(1-\varepsilon^2)\pi}\ln\frac{1}{|k_2^* x|} + R^*(k_2^* x) \qquad (-\infty < x < \infty) \quad (1.7)$$

где функции $R(k_2^* x)$, $R^*(k_2^* x)$ и $D(k_2^* x)$ обладают тем свойством, что вторые производные этих функций квадратично суммируемы на интервале $[-1, 1]$.

Отметим, что в этих формулах функции $K(k_2^* x)$, $K^*(k_2^* x)$ и $\Pi(k_2^* x)$ представлены в виде суммы своих сингулярных и регулярных частей.

Далее имеем

$$\frac{\partial G(k^* x, k^* s)}{\partial x} = G^*(k^* x, k^* s) + H(x-s) \qquad (1.8)$$

$$G^*(k^* x, k^* s) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sin 2k^*}\sin[k^*(x-1)]\cos[k^*(s+1)], & x < s \\ \dfrac{1}{\sin 2k^*}\cos[k^*(s-1)]\sin[k^*(x-1)] - 1, & x > s \end{cases}$$

где $H(x)$ — известная функция Хевисайда.

Последняя функция непрерывна в квадрате $-1 \leq x, s \leq 1$ и имеет по переменным x и s непрерывные в том же квадрате частные производные.

Приняв во внимание (1.7), (1.8) и дифференцируя обе части системы уравнений (1.3), относительно неизвестных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ получим следующую систему сингулярных интегральных уравнений:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(s)\,ds}{s-x} - \varepsilon^2\psi(x) - 2(1-\varepsilon^2)\int_{-1}^{1}\frac{\partial R[k_2^*(x-s)]}{\partial x}\varphi(s)\,ds -$$

$$-2(1-\varepsilon^2)\int_{-1}^{1}\frac{\partial D[k_2^*(x-s)]}{\partial x}\psi(s)\,ds -$$

$$-2(1-\varepsilon^2)k^*\int_{-1}^{1}G^*(k^* x, k^* s)\varphi(s)\,ds -$$

$$-2(1-\varepsilon^2)\lambda^* \int_{-1}^{1} \varphi(s)\,ds = 2(1-\varepsilon^2)\frac{\sin[k^*(x-1)]}{\sin 2k^*}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\psi(s)\,ds}{s-x} + \varepsilon^2\varphi(x) - 2(1-\varepsilon^2)\int_{-1}^{1}\frac{\partial R^*[k_2^*(x-s)]}{\partial x}\psi(s)\,ds -$$

$$-2(1-\varepsilon^2)\int_{-1}^{1}\frac{\partial D[k_2^*(x-s)]}{\partial x}\varphi(s)\,ds = 0 \quad (-1<x<1) \qquad (1.9)$$

Входящие в эту систему первые интегралы следует понимать в смысле главного значения по Коши.

Таким образом, решение динамической контактной задачи для двух полуплоскостей, сцепленных между собой на конечной части своих границ упругой накладкой малой толщины, сводится к решению системы сингулярных интегральных уравнений (1.9).

2. Сведение системы уравнений (1.9) к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений

Чтобы систему уравнений (1.9) свести к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений, предварительно придадим ей удобный вид. С этой целью упомянутую систему запишем относительно действительных и мнимых частей неизвестных функций, положив

$$\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2, \qquad \psi = \psi_1 - i\psi_2.$$

Тогда будем иметь

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_1(s)\,ds}{s-x} - \varepsilon^2\psi_1(x) - 2(1-\varepsilon^2)\int_{-1}^{1}[r_1(x-s)\varphi_1(s) - r_2(x-s)\varphi_2(s)]\,ds +$$

$$+2(1-\varepsilon^2)\int_{-1}^{1}[d_1(x-s)\psi_1(s) - d_2(x-s)\psi_2(s)]\,ds -$$

$$-4(1-\varepsilon^2)\lambda^*\int_{-1}^{1}G^*(k^*x,\ k^*s)\varphi_1(s)\,ds - 4(1-\varepsilon^2)\lambda^*\int_{-1}^{1}\varphi_1(s)\,ds =$$

$$= 2(1-\varepsilon^2)\frac{\sin[k^*(x-1)]}{\sin 2k^*}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\psi_1(s)\,ds}{s-x} + \varepsilon^2\varphi_1(x) - 2(1-\varepsilon^2)\int_{-1}^{1}[r_1^*(x-s)\psi_1(s) -$$

$$-r_2^*(x-s)\varphi_2(s)]\,ds-2(1-\varepsilon^2)\int_{-1}^{1}[d_1(x-s)\varphi_1(s)-d_2(x-s)\varphi_2(s)]\,ds=0$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_2(s)\,ds}{s-x}-\varepsilon^2\varphi_2(x)-2(1-\varepsilon^2)\int_{-1}^{1}[r_2(x-s)\varphi_1(s)+$$

$$+r_1(x-s)\varphi_2(s)]\,ds+2(1-\varepsilon^2)\int_{-1}^{1}[d_1(x-s)\varphi_2(s)+$$

$$+d_2(x-s)\varphi_1(s)]\,ds-4(1-\varepsilon^2)\lambda^*\int_{-1}^{1}G^*(k^*x,\ k^*s)\,\varphi_2(s)\,ds=$$

$$=4\lambda^*(1-\varepsilon^2)\int_{-1}^{1}\varphi_2(s)\,ds$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\psi_2(s)\,ds}{s-x}-\varepsilon^2\varphi_2(s)-2(1-\varepsilon^2)\times$$

$$\times\int_{-1}^{1}[r_2^*(x-s)\varphi_1(s)-r_1^*(x-s)\varphi_2(s)]\,ds+$$

$$+2(1-\varepsilon^2)\int_{-1}^{1}[d_1(x-s)\varphi_2(s)+d_2(x-s)\varphi_1(s)]\,ds=0$$

где

$$r_1(x)=\operatorname{Re}\left[\frac{\partial R(k_2^*x)}{\partial x}\right],\quad r_2(x)=\operatorname{Im}\left[\frac{\partial R(k_2^*x)}{\partial x}\right],\quad r_1^*(x)=\operatorname{Re}\left[\frac{\partial R^*(k_2^*x)}{\partial x}\right]$$

$$r_2^*(x)=\operatorname{Im}\left[\frac{\partial R^*(k_2^*x)}{\partial x}\right],\quad d_1(x)=\operatorname{Re}\left[\frac{\partial D(k_2^*x)}{\partial x}\right],\quad d_2(x)=\operatorname{Im}\left[\frac{\partial D(k_2^*x)}{\partial x}\right]$$

Теперь умножим первое уравнение на мнимую единицу i и сложим со вторым, а третье уравнение после умножения на i сложим с четвертым. В результате получим уравнения

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\Phi(s)\,ds}{s-x}-i\varepsilon^2\Phi(x)-\int_{-1}^{1}p_1(x,\ s)\,\Phi(s)\,ds-\int_{-1}^{1}p_2(x,\ s)\,\overline{\Phi}(s)\,ds+$$

$$+2(1-\varepsilon^2)\lambda^*\int_{-1}^{1}\overline{\Phi}(s)\,ds-2(1-\varepsilon^2)\lambda^*\int_{-1}^{1}\Phi(s)\,ds+$$

$$
+\int_{-1}^{1} p_3(x,s)\Psi(s)\,ds + \int_{-1}^{1} p_4(x,s)\overline{\Psi}(s)\,ds = f(x) \qquad (2.1)
$$

$$
\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\Psi(s)\,ds}{s-x} - i\varepsilon^2\Psi(x) + \int_{-1}^{1} p_3(x,s)\Psi(s)\,ds - \int_{-1}^{1} p_2(x,s)\overline{\Psi}(s)\,ds +
$$

$$
+ 2(1-\varepsilon^2)i\alpha\int_{-1}^{1}\overline{\Psi}(s)\,ds - 2(1-\varepsilon^2)i\alpha\int_{-1}^{1}\Psi(s)\,ds -
$$

$$
- \int_{-1}^{1} p_2(x,s)\Phi(s)\,ds - \int_{-1}^{1} p_1(x,s)\overline{\Phi}(s)\,ds = 0
$$

где

$$
\Phi(x) = \varphi_1(x) + i\varphi_2(x), \qquad \Psi(x) = \psi_1(x) - i\psi_2(x)
$$

$$
p_1(x,s) = -(1-\varepsilon^2)\left[r_1^*(x-s) + r_1(x-s) - 2\lambda^* G^*(k^*x, k^*s) - 2id_1(x-s)\right]
$$

$$
p_2(x,s) = (1-\varepsilon^2)\left[r_1^*(x-s) - r_1(x-s) - 2\lambda^* G^*(k^*x, k^*s)\right]
$$

$$
p_3(x,s) = (1-\varepsilon^2)\left[r_2^*(x-s) + r_2(x-s) - 2id_2(x-s)\right]
$$

$$
p_4(x,s) = (1-\varepsilon^2)\left[r_2^*(x-s) - r_2(x-s)\right]
$$

$$
f(x) = i\,\frac{2(1-\varepsilon^2)}{\sin 2k^*}\sin\left[k^*(x-1)\right]
$$

Очевидно, что последняя система сингулярных интегральных уравнений эквивалентна системе (1.9).

Решения системы уравнений (2.1) ищем в виде

$$
\Phi(x) = w(x)\left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right)
$$

$$
\Psi(x) = w(x)\left(b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right)
$$

$$
\alpha = -\frac{1}{2} - i\gamma, \quad \beta = -\frac{1}{2} + i\gamma, \quad \gamma = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1+\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2} \qquad (2.2)
$$

где $\{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ — полиномы Якоби, ортогональные на отрезке $[-1,1]$ с весом $w(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$.

Подставив выражения $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ из (2.2) в (2.1) и пользуясь соотношением [4, 5]

$$-i\,\mathrm{th}\,\pi\gamma\, w(x)\, P_n^{(\alpha,\beta)}(x) + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{w(s)}{s-x}P_n^{(\alpha,\beta)}(s)\,ds = \frac{1}{2\,\mathrm{ch}\,\pi\gamma}P_{n-1}^{(-\alpha,-\beta)}(x)$$

известным способом относительно коэффициентов $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\overline{a}_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\overline{b}_n\}_{n=1}^{\infty}$ получим следующую бесконечную систему линейных уравнений:

$$\xi_m a_m + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}K_{mn}^{(1)}a_n - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}K_{mn}^{(2)}\overline{a}_n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}K_{mn}^{(3)}b_n +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}K_{mn}^{(4)}\overline{b}_n = a_0\gamma_m^{(1)} + \overline{a}_0\gamma_m^{(2)} - b_0\gamma_m^{(3)} - \overline{b}_0\gamma_m^{(4)} + \chi_m$$

$$\xi_m b_m + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}K_{mn}^{(1)}b_n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}K_{mn}^{(2)}\overline{b}_n - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}K_{mn}^{(3)}a_n -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}K_{mn}^{(4)}\overline{a}_n = b_0\gamma_m^{(1)} + \overline{b}_0\gamma_m^{(2)} + a_0\gamma_m^{(3)} + \overline{a}_0\gamma_m^{(4)}$$

$$\xi_m \overline{a}_m + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\overline{K}_{mn}^{(1)}\overline{a}_n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\overline{K}_{mn}^{(2)}a_n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\overline{K}_{mn}^{(3)}\overline{b}_n +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\overline{K}_{mn}^{(4)}b_n = \overline{a}_0\overline{\gamma}_m^{(1)} + a_0\overline{\gamma}_m^{(2)} - \overline{b}_0\overline{\gamma}_m^{(3)} - b_0\overline{\gamma}_m^{(4)} + \overline{\chi}_m$$

$$\xi_m \overline{b}_m + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\overline{K}_{mn}^{(1)}\overline{b}_n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\overline{K}_{mn}^{(2)}b_n - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\overline{K}_{mn}^{(3)}\overline{a}_n -$$

$$- \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\overline{K}_{mn}^{(4)}a_n = \overline{b}_0\overline{\gamma}_m^{(1)} + b_0\overline{\gamma}_m^{(2)} + \overline{a}_0\overline{\gamma}_m^{(3)} + a_0\overline{\gamma}_m^{(4)} \tag{2.3}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\xi_m = \frac{\Gamma(m-1+\alpha)\,\Gamma(m+1+\beta)}{(m!)^2\,\mathrm{ch}\,\pi\gamma}$$

$$K_{mn}^{(1)} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left[\int_{-1}^{1}(1-s^2)\,w(s)\,P_{n-1}^{(-\beta,-\alpha)}(s)\,\frac{\partial p_1(x,s)}{\partial x}\,ds\right]w^{-1}(x)\,\times$$

$$\times P_{m-1}^{(-\alpha,-\beta)}(x)\,dx - (1-\varepsilon^2)\,\varepsilon^2\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,P_{n-1}^{(-\beta,-\alpha)}(x)\,P_{m-1}^{(-\alpha,-\beta)}(x)\,dx$$

$$K_{mn}^{(2)} = (1 - \varepsilon^2) \, k^* \int_{-1}^{1} w^{-2}(x) P_{n-1}^{(\cdot,\,\cdot)}(x) \, P_{m-1}^{(\cdot,\,\cdot)}(x) \, dx -$$

$$- \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \left[\int_{-1}^{1} w^{-1}(s) \, P_{n-1}^{(\cdot,\,\cdot)}(s) \, \frac{\partial p_2(x, s)}{\partial s} \, ds \right] w^{-1}(x) \, P_{m-1}^{(\cdot,\,\cdot)}(x) \, dx$$

$$K_{mn}^{(3)} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \left[\int_{-1}^{1} (1 - s^2) \, w(s) \, P_{n-1}^{(\cdot,\,\cdot)}(s) \, \frac{\partial P_3(x, s)}{\partial s} \, ds \right] w^{-1}(x) \, \times$$

$$\times \, P_{m-1}^{(\cdot,\,\cdot)}(x) \, dx$$

$$K_{mn}^{(4)} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \left[\int_{-1}^{1} w^{-1}(s) \, P_{n-1}^{(\cdot,\,\cdot)}(s) \, \frac{\partial p_4(x, s)}{\partial s} \, ds \right] w^{-1}(x) \, P_{m-1}^{(\cdot,\,\cdot)}(x) \, dx$$

$$c_m^{(1)} = \int_{-1}^{1} \left[2(1 - \varepsilon^2) \, k^* \int_{-1}^{x} w(s) \, ds - \int_{-1}^{1} w(s) \, p_1(x, s) \, ds \right] w^{-1}(s) \, P_{m-1}^{(\cdot,\,\cdot)}(x) \, dx$$

$$c_m^{(2)} = \int_{-1}^{1} \left[\int_{-1}^{1} (1 - s)^{\ldots} (1 - s)^{\ldots} \, p_2(x, s) \, ds - 2(1 - \varepsilon^2) \, k^* \, \times \right.$$

$$\left. \times \int_{-1}^{x} (1 - s)^{\ldots} (1 + s)^{\ldots} \, ds \right] w^{-1}(x) \, P_{m-1}^{(\cdot,\,\cdot)}(x) \, dx$$

$$c_m^{(3)} = \int_{-1}^{1} \left[\int_{-1}^{1} w(s) \, p_3(x, s) \, ds \right] w^{-1}(x) \, P_{m-1}^{(\cdot,\,\cdot)}(x) \, dx$$

$$c_m^{(4)} = \int_{-1}^{1} \left[\int_{-1}^{1} (1 - s)^{\ldots} (1 - s)^{\ldots} \, p_4(x, s) \right] w^{-1}(x) \, P_{m-1}^{(\cdot,\,\cdot)}(x) \, dx$$

$$Z_m = i \int_{-1}^{1} \frac{2(1 - \varepsilon^2) \sin [k^* (x - 1)]}{\sin 2k^*} \, w^{-1}(x) \, P_{m-1}^{(\cdot,\,\cdot)}(x) \, dx$$

Теперь произведем замену переменных в (2.3), положив

$$a_m = m^{1-\varepsilon} X_m, \quad b_m = m^{1-\varepsilon} Y_m, \quad m = 1, 2, \ldots$$

где ε — сколь угодно малое положительное число. После некоторых простых выкладок получим

$$X_m + \zeta_m m^2 \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}K_{mn}^{(1)}X_n + \frac{1}{n^2}K_{mn}^{(2)}\overline{X}_n + \frac{1}{n^2}K_{mn}^{(3)}Y_n + \frac{1}{n^2}K_{mn}^{(4)}\overline{Y}_n\right) =$$

$$= \zeta_m m^2\,(a_0\gamma_m^{(1)} + \overline{a}_0\gamma_m^{(2)} - b_0\gamma_m^{(3)} - \overline{b}_0\gamma_m^{(4)} + \gamma_m)$$

$$Y_m + \zeta_m m^2 \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}K_{mn}^{(1)}Y_n + \frac{1}{n^2}K_{mn}^{(2)}\overline{Y}_n - \frac{1}{n^2}K_{mn}^{(3)}X_n - \frac{1}{n^2}K_{mn}^{(4)}\overline{X}_n\right) =$$

$$= \zeta_m m^2\,(b_0\gamma_m^{(1)} + \overline{b}_0\gamma_m^{(2)} + a_0\gamma_m^{(3)} + \overline{a}_0\gamma_m^{(4)}) \qquad (2.4)$$

$$\overline{X}_m + \zeta_m m^2 \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\overline{K}_{mn}^{(1)}\overline{X}_n + \frac{1}{n^2}\overline{K}_{mn}^{(2)}X_n + \frac{1}{n^2}\overline{K}_{mn}^{(3)}\overline{Y}_n + \frac{1}{n^2}\overline{K}_{mn}^{(4)}Y_n\right) =$$

$$= \zeta_m m^2\,(\overline{a}_0\overline{\gamma}_m^{(1)} + a_0\overline{\gamma}_m^{(2)} - \overline{b}_0\overline{\gamma}_m^{(3)} - b_0\overline{\gamma}_m^{(4)} + \overline{\gamma}_m)$$

$$\overline{Y}_m + \zeta_m m^2 \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\overline{K}_{mn}^{(1)}\overline{Y}_n + \frac{1}{n^2}\overline{K}_{mn}^{(2)}Y_n - \frac{1}{n^2}\overline{K}_{mn}^{(3)}\overline{X}_n - \frac{1}{n^2}\overline{K}_{mn}^{(4)}X_n\right) =$$

$$= \zeta_m m^2\,(\overline{b}_0\overline{\gamma}_m^{(1)} + b_0\overline{\gamma}_m^{(2)} + \overline{a}_0\overline{\gamma}_m^{(3)} + a_0\overline{\gamma}_m^{(4)})$$

Очевидно, что $\zeta_m = (\zeta_m m)^{-1} = O(1)$ при $m \to \infty$.

Оказывается, что полученная бесконечная система линейных уравнений (2.4) квазивполне регулярна. Действительно, имея в виду асимптотическую формулу для многочленов Якоби [7]

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta) = \frac{1}{\sqrt{n}}\,K(\theta)\cos(N\theta + \gamma) + O(n^{-3/2}), \quad n \to \infty$$

$$K(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{-\alpha-1/2}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{-\beta-1/2}$$

$$N(\theta) = n + \frac{\alpha+\beta+1}{2}, \qquad \gamma = -\frac{\pi}{2}\left(\alpha + \frac{1}{2}\right), \quad 0 < \theta < \pi$$

которая имеет место также при $\mathrm{Re}(\alpha, \beta) > -1$, известным способом [8, 9, 4] можно показать, что суммы

$$S_m = \zeta_m m^2 \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(|K_{mn}^{(1)}| + |K_{mn}^{(2)}| + |K_{mn}^{(3)}| + |K_{mn}^{(4)}|\right)$$

при $m \to \infty$ имеют порядок $O(m^{-1/2+\varepsilon})$. Отсюда вытекает, что рассматриваемая бесконечная система линейных уравнений квазивполне регулярна.

Теперь отметим, что для определения a_0, b_0 следует в выражении, полученном после подстановки (2.2) в первое уравнение системы (2.1), положить $x = -1$. Тогда будем иметь

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(E_n^{(1)}a_n - E_n^{(2)}\overline{a}_n + E_n^{(3)}b_n + E_n^{(4)}\overline{b}_n\right) =$$

$$= -2i(1-\varepsilon^2) - E_0^{(1)}a_0 + E_0^{(2)}\overline{a}_0 - E_0^{(3)}b_0 - E_0^{(4)}\overline{b}_0 \tag{2.5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\overline{E}_n^{(1)}\overline{a}_n - \overline{E}_n^{(2)}a_n + \overline{E}_n^{(3)}\overline{b}_n + \overline{E}_n^{(4)}b_n\right) =$$

$$= 2i(1-\varepsilon^2) - \overline{E}_0^{(1)}\overline{a}_0 + \overline{E}_0^{(2)}a_0 - \overline{E}_0^{(3)}\overline{b}_0 - \overline{E}_0^{(4)}b_0$$

где

$$E_n^{(1)} = \zeta_n P_{n-1}^{(-\alpha,-\beta)}(-1) + \int_{-1}^{1} p_1(-1,s)\, w(s)\, P_n^{(\alpha,\beta)}(s)\, ds$$

$$E_n^{(2)} = \int_{-1}^{1} p_2(-1,s)(1-s)^{\alpha}(1+s)^{\beta} P_n^{(\alpha,\beta)}(s)\, ds$$

$$E_n^{(3)} = \int_{-1}^{1} p_3(-1,s)\, w(s)\, P_n^{(\alpha,\beta)}(s)\, ds$$

$$E_n^{(4)} = \int_{-1}^{1} p_4(-1,s)(1-s)^{\alpha}(1+s)^{\beta} P_n^{(\alpha,\beta)}(s)\, ds$$

Очевидно, что второе уравнение является сопряженным к первому уравнению.

После того как определены коэффициенты $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, неизвестные коэффициенты a_0 и b_0 определятся из уравнений (2.5).

3. Случай малого параметра k_2^*

В этом случае в представлениях (1.4), (1.5) и (1.6) пренебрегая членами порядка $(k_2^*)^2 \ln k_2^*$ и имея в виду (1.9), для определения φ и ψ получим следующую систему сингулярных интегральных уравнений:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(s)\,ds}{s-x} - \varepsilon\psi(x) + \int_{-1}^{1}\left[\alpha_1(x-s)\ln|x-s| + \alpha_2(x-s)\right]\varphi(s)\,ds +$$

$$+ \alpha_3\int_{-1}^{1}|x-s|\,\psi(s)\,ds - 4(1-\varepsilon^2)\,k^*\int_{-1}^{1}\frac{\partial G(k^*x, k^*s)}{\partial x}\,\varphi(s)\,ds =$$

$$= \frac{2(1-\varepsilon^2)}{\sin 2k^*}\sin\left[k^*(x-1)\right]$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(s)\,ds}{s-x} + \varepsilon^2\varphi(x) + \int_{-1}^{1}\left[\alpha_1^*(x-s)\ln|x-s| + \alpha_2^*(x-s)\right]\varphi(s)\,ds -$$

$$-\alpha_3\int_{-1}^{1}|x-s|\,\varphi(s)\,ds = 0$$

Здесь

$$\alpha_1 = \frac{1}{4\pi}\frac{1+\varepsilon^4}{1-\varepsilon^2}(k_2^*)^2, \quad \alpha_2 = d_1 + id_2, \quad d_1 = \alpha_1(\pi A_1 + \ln|k_2^*| - 1)$$

$$d_2 = \alpha_1\pi A_2, \quad A_1 = \operatorname{Re} A, \quad A_2 = \operatorname{Im} A, \quad \alpha_1 = \frac{1}{4\pi}\frac{3-4\varepsilon^2-3\varepsilon^4}{1-\varepsilon^2}(k_2^*)^2$$

$$\alpha_2^* = d_1' + id_2', \quad d_1' = \alpha_1'(\pi B_1 + \ln|k_2^*| - 1)$$

$$d_2' = \alpha_1'\pi B_2, \quad B_1 = \operatorname{Re} B, \quad B_2 = \operatorname{Im} B$$

Поступим совершенно аналогично изложенному выше, для Φ и Ψ получим следующую систему сингулярных интегральных уравнений:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\Phi(s)\,ds}{s-x} - i\varepsilon^2\Phi(x) + \int_{-1}^{1}F(x-s)\Phi(s)\,ds + \int_{-1}^{1}F^*(x-s)\Phi(s)\,ds -$$

$$-\frac{d_2-d_2'}{2}\int_{-1}^{1}(x-s)\Psi(s)\,ds + \frac{d_2-d_2'}{2}\int_{-1}^{1}(x-s)\overline{\Psi}(s)\,ds =$$

$$= -i\frac{2(1-\varepsilon^2)}{\sin 2k^*}\sin[k^*(x-1)]$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\Psi(s)\,ds}{s-x} - i\varepsilon^2\Psi(x) + \int_{-1}^{1}F(x-s)\Psi(s)\,ds + \int_{-1}^{1}F^*(x-s)\overline{\Psi}(s)\,ds +$$

$$+\frac{d_2+d_2'}{2}\int_{-1}^{1}(x-s)\Phi(s)\,ds - \frac{d_2'-d_2}{2}\int_{-1}^{1}(x-s)\overline{\Phi}(s)\,ds = 0$$

где

$$F(x-s) = \frac{\alpha_1+\alpha_1'}{2}(x-s)\ln|x-s| + i\alpha_3|x-s| + \frac{d_1-d_1'}{2}(x-s) -$$

$$-2(1-\varepsilon^2)k^*\frac{\partial}{\partial x}G(k^*x, k^*s)$$

$$F^*(x-s) = \frac{\alpha_1'-\alpha_1}{2}(x-s)\ln|x-s| + \frac{d_1'-d_1}{2}(x-s) +$$

$$+2(1-\varepsilon^2)k^*\frac{\partial}{\partial x}G(k^*x, k^*s)$$

Теперь, как и выше, можно получить квазивполне регулярную бесконечную систему линейных уравнений относительно коэффициентов разложения функций Φ и Ψ по многочленам Якоби. Отметим, что вследствие простоты выражений ядер в этом случае можно получить численные результаты при $0 < k_1^2 < \frac{1}{4}$ на ЭВМ.

В заключение автор сердечно благодарит Н. Х. Арутюняна за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Институт механики АН
Армянской ССР

Поступила 11 VII 1974

Է. Խ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ

ՎԵՐՋԱՎՈՐ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՎԵՐԱԴԻՐՈՎ ՄԻՄՅԱՆՑ ՀԵՏ ՄԻԱՑՎԱԾ ԵՐԿՈՒ ԿԻՍԱՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԴԻՆԱՄԻԿԱԿԱՆ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴՐԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ամփոփում

Դիտարկվում է դինամիկական կոնտակտային խնդիր երկու կիսահարթությունների համար, որոնք իրենց եզրագծերի վերջավոր հատվածում միացված են միմյանց հետ փոքր հաստության առաձգական վերադիրի միջոցով։ Խնդրի լուծումը բերվում է ինտեգրալ հավասարումների սիստեմի լուծմանը, որը Յակոբու բազմանդամների օգնությամբ բերվում է գծային հավասարումների անվերջ սիստեմի։ Ապացուցվում է, որ այդ անվերջ հավասարումների սիստեմը քվազիլիովին ռեգուլյար է։ Դրա հետ միաժամանակ ինտեգրալ հավասարումների կորիզների համար ստացված են պարզ անալիտիկ արտահայտություններ, որոնք ցանկացած չափով քիչ են տարբերվում ճշգրիտ արժեքներից և լիովին հարմար են գործնական օգտագործման համար։

ON A DYNAMIC CONTACT PROBLEM FOR TWO SEMI-PLANES CONNECTED TO EACH OTHER WITH AN ELASTIC STRAP OF FINITE LENGTH

E. X. GRIGORIAN

Summary

A dynamic contact problem for two semi-planes connected to each other on a finite length of their boundaries with an elastic strap of small thickness is considered.

The solution to the problem is reduced to that of a system of integral equations which is later reduced to an infinite system of linear equations by means of Jacoby polynomials.

This infinite system is proved to be quasi-quite regular.

Simultaneously, for the kernels of integral equations some simple analitical expressions are obtained quite suitable for practical purposes and the least differing from the real.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Melan E.* Ein Beitrag zur Theorie geschweißter Verbindungen. Ingr-Arch, Bd. 3, No. 2, 1932, S. 123.
2. *Buffler H.* Scheibe mit endlicher, elastischer Versteifung. VDI-Forchungsheft 485 Beilage zu „Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens" Ausgabe B, Band 27, 1961, 5—44.
3. *Григорян Э. Х.* О двух динамических контактных задачах для полуплоскости с упругими накладками. Изв. АН СССР, МТТ, вып. 5, 1972.
4. *Григорян Э. Х.* О динамической контактной задаче для полуплоскости, усиленной упругой накладкой конечной длины. ПММ, т. 38, в. 2, 1974.
5. *Попов Г. Я.* Плоская контактная задача теории упругости с учетом сил сцепления или трения. ПММ, т. 30, вып. 3, 1966.
6. *Карпенко Л. Н.* Приближенное решение одного сингулярного интегрального уравнения при помощи многочленов Якоби. ПММ, т. 30, вып. 3, 1966.
7. *Сегё Г.* Ортогональные многочлены. Физматгиз, М., 1962.
8. *Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М.* Некоторые контактные задачи для полуплоскости с частично скрепленными упругими накладками. Изв. АН Арм.ССР, Механика, т. 25, вып. 2, 1972.
9. *Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М.* К контактной задаче для двух полубесконечных пластин, соединенных между собой полубесконечной упругой накладкой. Сб. „Механика деформируемых тел и конструкций", посвященный 60-летию акад. Ю. Н. Работнова.