

Լ. Լ. ԱՅԱՅԱՆ

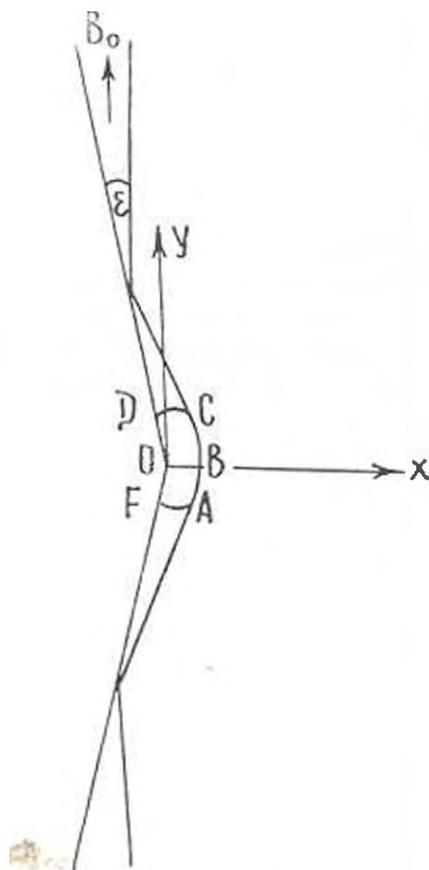
ЗАДАЧА О ДИФРАКЦИИ СИЛЬНОЙ МАГНИТОГАЗО-  
ДИНАМИЧЕСКОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ ОКОЛО КЛИНА

В настоящей работе рассматривается нестационарная пространственная задача о движении электропроводящей сжимаемой жидкости в магнитном поле при дифракции сильной магнитогазодинамической ударной волны около угла, близкого к  $\pi$ . При отсутствии магнитного поля задача о дифракции сильной ударной волны около тупого угла рассмотрена в [4]. Методом, отличным от [4], решение соответствующих плоской и осесимметричной дифракционных задач рассмотрено в [2], [3]. Одномерные задачи с магнитогазодинамическими ударными волнами рассмотрены довольно подробно в [4], [5], [6], [7], [8], [9]. Пространственные задачи неустановившегося движения в магнитной газодинамике изучены сравнительно мало. Задачи о распространении слабых ударных волн в магнитной газодинамике рассмотрены в [10], [11], [12]. Задача о проникании тупого клина в электропроводящую жидкость при наличии слабой магнитогазодинамической ударной волны рассмотрена в [13]. Как указано в [14], в магнитной газодинамике почти отсутствуют результаты по решению пространственных нестационарных задач, вместе с тем решение задач по отражению магнитогазодинамических ударных волн от препятствия представляет как теоретический, так и практический интерес.

В § 1 настоящей работы решается задача об отражении сильной магнитогазодинамической ударной волны, распространяющейся в электропроводящей жидкости или газе, от тупого клина при наличии однородного начального магнитного поля. Возникающее возмущенное движение будет плоским, причем плоскость основного движения перпендикулярна ребру клина (линии пересечения граней). Начальное магнитное поле параллельно линии пересечения ударной волны с плоскостью основного движения. Определены параметры газа позади падающей и плоской отраженной от клина ударных волн. Показано, что индуцированное магнитное поле за отраженным скачком параллельно клину. Далее методом [15] граничная задача в области неравномерного течения приводится к граничной задаче для определения аналитической функции, которая решается методом [1]. Приведены результаты расчетов параметров за падающей и отраженной плоскими волнами, а также распределение давления вдоль стенки.

В § 2 приведены окончательные результаты задачи об отражении сильной магнитогазодинамической ударной волны от тупого клина при начальном магнитном поле, параллельном ребру клина.

1. Пусть фронт плоской ударной волны движется в идеально проводящем газе в магнитном поле со скоростью  $V_0$  и в момент времени  $t=0$  сталкивается с углом, стороны которого образуют со скачком малый угол  $\varepsilon$ . Движение предположено плоским. Начало координат поместим



Фиг. 1.

в вершине угла, ось  $Ox$  направим по оси клина вправо, а ось  $Oy$  — вертикально вверх. Начальное магнитное поле  $B_0$  параллельно линии пересечения плоскости скачка с плоскостью основного течения, направление же движения скачка совпадает с отрицательным направлением оси  $Ox$ . Для некоторого значения  $t \neq 0$  картина движения показана на фиг. 1. Ввиду малости параметра  $\varepsilon$  влияние угла можно рассматривать как малое возмущение отраженного скачка. Прямолинейные участки отраженной волны, исходящие из точек на стенках, до которых дошла падающая волна в данный момент, будут соединены криволинейной частью отраженной ударной волны, которая является результатом дифракции от вершины. Обозначим индексом 0 параметры покоящегося газа впереди падающей волны, индексами 1 и 2 — значения этих параметров соответственно за фронтом падающей волны и прямолинейной части отраженной волны. Значения параметров газа в области возмущенного течения снабдим индексом 3. Определим течение за падающей ударной волной. Параметры потока за падающим скачком постоянны и опреде-

ляются из соотношений на прямом скачке уплотнения. Исключая из этих условий давление  $p_1$ , плотность  $\rho_1$ , магнитное поле  $B_1$ , получим следующее кубическое уравнение для скорости частиц газа  $g_1$  за падающим скачком:

$$g_1^3 + \frac{[2\gamma P_0 + \gamma a_1^2 \rho_0 - (\gamma + 3)\rho_0 V_0^2]}{(\gamma + 1)\rho_0 V_0} g_1^2 - \frac{2[\gamma P_0 + a_1^2 \rho_0 - \rho_0 V_0^2]}{(\gamma + 1)\rho_0} g_1 - \frac{a_1^2 V_0}{3} = 0 \quad (1.1)$$

где

$$a_1^2 = \frac{P_0}{4\rho_0}$$

Уравнение (1.1) имеет три вещественных корня  $g_1$ , из которых физически осуществимо одно значение корня, равное при  $u_1=0$  скорости частиц газа за падающим скачком в газовой динамике

$$g_1 = \frac{2(1-M^2-1)}{(\gamma-1)M^2} V_0$$

Здесь  $M = \frac{V_0}{c_0}$  — число Маха падающего скачка,  $c_0$  — скорость звука перед падающей ударной волной. Условия на скачке уплотнения дают значения остальных параметров за падающим скачком

$$\begin{aligned} \rho_1 &= -\frac{\gamma_0 V_0}{(g_1 - V_0)}, & B_1 &= -\frac{B_0 V_0}{(g_1 - V_0)} \\ p_1 &= p_0 + \gamma_0 V_0 g_1 + \frac{(g_1 - 2V_0) B_0 g_1}{8\pi (g_1 - V_0)^2} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Определим течение за отраженным плоским скачком. За отраженной ударной волной и стенками угла вне области возмущенного течения влияние дифракции вершины не сказывается. В этой части отражение происходит так же, как от твердой бесконечной стенки. Параметры потока здесь постоянны и определяются из соотношений на косом скачке уплотнения [16]

$$\begin{aligned} B_{1n} &= B_{2n} \\ \rho_1 (g_{1n} - V_{0n}) &= \rho_2 (g_{2n} - V_{0n}) \\ p_1 + \gamma_1 (g_{1n} - V_{0n})^2 + \frac{B_{1n}^2}{8\pi} &= p_2 + \gamma_2 (g_{2n} - V_{0n})^2 + \frac{B_{2n}^2}{8\pi} \\ \rho_1 (g_{1n} - V_{0n}) g_{1\tau} - \frac{B_{1n}}{4\pi} B_{1\tau} &= \rho_2 (g_{2n} - V_{0n}) g_{2\tau} - \frac{B_{2n}}{4\pi} B_{2\tau} \\ (g_{1n} - V_{0n}) B_{1\tau} - B_{1n} g_{1\tau} &= (g_{2n} - V_{0n}) B_{2\tau} - B_{2n} g_{2\tau} \\ \frac{(g_{1n} - V_{0n})^2}{2} + \frac{\gamma_1}{(\gamma_1 - 1)} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{g_{1\tau}^2}{2} - \frac{B_{1\tau}^2}{4\pi\gamma_1} - \frac{B_{1n} B_{1\tau} g_{1\tau}}{4\pi\gamma_1 (g_{2n} - V_{0n})} &= \\ = \frac{(g_{2n} - V_{0n})^2}{2} + \frac{\gamma_2}{(\gamma_2 - 1)} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{g_{2\tau}^2}{2} - \frac{B_{2\tau}^2}{4\pi\gamma_2} - \frac{B_{2n} B_{2\tau} g_{2\tau}}{4\pi\gamma_2 (g_{2n} - V_{0n})} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь  $n$  — направление внешней нормали,  $\tau$  — касательной к скачку,  $V_{0n}$  — нормальная скорость отраженного скачка. Скорость газа  $g_2$  за отраженной ударной волной параллельна стенке и направлена к точке  $M$ . Из условия неотрывности в точке  $M$  падающей и отраженной ударных волн имеем

$$\varepsilon = \frac{4V_{00}}{V_0} \quad (1.4)$$

где  $\varepsilon$  — угол отражения плоской ударной волны от клина, который согласно (1.4) является величиной порядка  $\varepsilon$ . Записывая в (1.3)

$$g_{1n} = -g_1 \cos(\varepsilon + \varepsilon') \approx -g_1, \quad \kappa_{1n} = g_1 \sin(\varepsilon + \varepsilon') \approx g_1(\varepsilon + \varepsilon')$$

$$B_{1n} = B_1 \sin(\varepsilon - \varepsilon') \approx B_1(\varepsilon - \varepsilon'), \quad B_{1t} = B_1 \cos(\varepsilon + \varepsilon') \approx B_1$$

и исключая из второго, третьего и шестого уравнений (1.3)  $p_2$ ,  $p_3$ ,  $B_{1n}$  в порядке  $\varepsilon$  получим кубическое уравнение для  $V_{00}$

$$V_{00}^3 - \frac{(\gamma_1 - 3)g_1}{2} V_{00}^2 - \left[ \frac{(\gamma_1 - 1)g_1^2}{2} - \frac{3p_1}{\rho_1} - a_2^2 \right] V_{00} - \frac{(2 - \gamma_1)a_2^2 g_1}{2} = 0 \quad (1.5)$$

где

$$a_2^2 = \frac{B_1^2}{4\pi\rho_1}$$

По изображениям, что и выше, берется тот корень уравнения, который близок к нулю.

$$L_0 = \frac{2(\gamma_1 - 1)M^2 - (\gamma_1 - 3)}{(\gamma_1 - 1)M^2} V_0 \quad (1.6)$$

дающему скорость отраженного скачка в газовой динамике и определяющемуся из (1.3) при  $B=0$ . Далее в том же приближении из (1.3) получим значения остальных параметров за плоским отраженным скачком:

$$g_2 = \frac{\gamma_1(g_1 - V_{00})}{V_{00}}, \quad B_{2t} = B_1(\varepsilon - \varepsilon'), \quad B_{2n} = \frac{\varepsilon B_1}{\gamma_1} \quad (1.7)$$

$$p_2 = p_1 - \gamma_1 g_1 (g_1 + V_{00}) - \frac{B_1^2 (g_1 - 2V_{00}) \kappa_1}{8\pi V_{00}}$$

И, наконец, четвертое уравнение системы (1.3) позволяет определить величину скорости газа  $g_2 \approx g_2$  в области за примолинейной частью отраженного скачка. С использованием (1.2), (1.4) и (1.7) для проекции вектора  $\vec{B}_2$  на нормаль к стенке получим

$$B_{2N} = B_{2n} = \varepsilon B_{2t} = \frac{B_0}{\rho_0} |\varepsilon_1 + \varepsilon'| (\rho_2 - \rho_2) = \varepsilon B_0$$

то есть силовые линии индуцированного магнитного поля в области постоянного течения за плоским отраженным скачком не проникают в клин. Вообще говоря, для падающей ударной волны должны быть две отраженные ударные волны, быстрая и медленная. Но можно показать

что в порядке  $\varepsilon$  медленная ударная волна дает те же направления векторов  $\vec{B}$  и  $\vec{g}$ , что и быстрая ударная волна, причем угол наклона ее к стенке  $\sim \varepsilon^2$ , поэтому можно принять, что в основном порядке медленная ударная волна отсутствует.

Учет конечной (хотя и большой) электропроводности  $\sigma$  показывает на наличие узкого токового слоя вблизи поверхности клина шириной порядка  $\sqrt{L}$ , где  $L \sim \frac{1}{\varepsilon}$ . Полагая  $L \sim \varepsilon^2$ , получим, что в указанном слое ускорения или сила Лоренца, действующие на частицы жидкости в направлении, касательном к стенке, конечны. Действительно,

$$J_z \sim \frac{K}{\sqrt{L}}, \quad J_z B_{yx} \approx KB_0$$

$K$  — поверхностная плотность тока.

В области возмущенного течения, заключенной между скачком  $ABC$ , стенкой  $DEF$  и дугами  $DC$  и  $EA$ , представляющими фронт быстрой магнитозвуковой волны, порожденной вершиной угла, параметры потока вышшем в виде

$$p_2 = p_1 + p, \quad \rho_2 = \rho_1 + \rho, \quad \vec{g}_2 = \vec{g}_1 + \vec{g}, \quad B_2 = B_0 + b \quad (1.8)$$

где  $p, \rho, g, b$  имеют порядок  $\varepsilon$ . Как следует из четвертого уравнения системы (1.3),  $g_z \sim \varepsilon$ , следовательно,  $\vec{g}_2(u, \omega)$  также будет иметь порядок  $\varepsilon$ . При подстановке (1.8) в основную систему уравнений магнитной газодинамики и линеаризации по  $\varepsilon$  получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_x}{\partial t} &= B_0 \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial b_y}{\partial t} &= -B_0 \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{B_0}{4-\gamma_1} \left( \frac{\partial b_x}{\partial y} - \frac{\partial b_y}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial \omega}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \gamma_1 c_2^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

С учетом автомодельности задачи уравнения (1.9) можно записать в переменных

$$\xi = \frac{x}{c_2 t}, \quad \tau = \frac{y}{c_2 t}, \quad \text{где } c_2 = \left( \frac{\gamma_1 p_1}{\rho_1} \right)^{1/2}$$

В плоскости  $\xi, \eta$  стенка  $DEF$  и скачок  $ABC$  можно аппроксимировать прямолинейными отрезками (фиг. 2), причем на стенке  $\xi$  будет равно нулю, а на искривленном скачке

$$\xi = \frac{V_{\infty}^2}{\alpha_2} = \frac{V_{\infty}}{c_2} = k_0 \quad (1.10)$$

Как и в задаче газовой динамики, если  $k_0 < 1$ , что видно также из расчетов, приведенных далее. На стенке из условия  $g_{\xi\xi} = 0$  следует, что

$$\text{при } \xi = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial v}{\partial \xi} = 0. \text{ Из первого уравнения системы (1.9) имеем: при } x = \xi = 0, \quad b_{\xi} = \text{const.}$$

Поскольку на дугах  $DC$  и  $FA$  возмущения отсутствуют, то есть в точках  $D$  и  $F$   $b_{\xi} = 0$ , следует принять  $b_{\xi} = 0$  на всей стенке  $DEF$ . И, наконец, из системы (1.9) следует, что можно полагать

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial \xi} = 0 \text{ при } x = \xi = 0 \quad (1.11)$$

На дугах  $DC$  и  $FA$  возмущения отсутствуют, следовательно, на этих дугах

$$p = 0 \quad (1.12)$$

Для нахождения граничного условия на  $\xi = k_0$  представим возмущенный фронт ударной волны в виде

$$\xi = k_0 + f(\eta)$$

где  $f(\eta)$  — функция, определяющая неизвестную форму ударной волны.

Линейризуя относительно параметров с индексом 2 соотношения вала (1.3) для искривленной части скачка, получим некоторую систему уравнений, решение которой после исключения функции  $f$  имеет вид

$$u = D_0 p_{\xi}, \quad \frac{\sigma w}{\sigma \xi} = E_0 \frac{\sigma p_{\xi}}{\sigma \xi}, \quad \frac{\sigma b_{\xi}}{\sigma \xi} = L_0 \frac{\sigma p_{\xi}}{\sigma \xi}, \quad b_{\xi} = C_0 p_{\xi} \quad \text{на } \xi = k_0 \quad (1.13)$$

где коэффициенты следующие:

$$D_0 = \frac{[4\pi V_{\infty} k_1^2 (\gamma - 1) - (\gamma_2 - \gamma_1) (4\pi \gamma_2 V_{\infty}^2 - 4\pi \gamma_1 p_2 + B_2^2)] c_2}{(\gamma - 1) (4\pi \gamma_2 V_{\infty}^2 - B_2^2) k_1 p_2 - V_{\infty} (\gamma_2 - \gamma_1) [4\pi (\gamma - 1) \gamma_2 V_{\infty}^2 - 8\pi \gamma_1 p_2 - (\gamma - 1) B_2^2]}$$

$$E_0 = \frac{[B_1 (B_2 - B_1) - 4\pi \gamma_2 V_{\infty} k_1] (B_2^2 - 4\pi \gamma_2 p_2 - 4\pi \gamma_2 V_{\infty}^2)}{4\pi V_{\infty} (\gamma - 1) (4\pi \gamma_2 V_{\infty}^2 - B_2^2) k_1 p_2 - V_{\infty} (\gamma_2 - \gamma_1) [4\pi (\gamma - 1) \gamma_2 V_{\infty}^2 + 8\pi \gamma_1 p_2 - (\gamma - 1) B_2^2]}$$

$$L_0 = \frac{(B_2 - B_1) (B_2^2 + 4\pi \gamma_2 p_2 - 4\pi \gamma_2 V_{\infty}^2) c_2}{(\gamma - 1) (4\pi \gamma_2 V_{\infty}^2 - B_2^2) k_1 p_2 - V_{\infty} (\gamma_2 - \gamma_1) [4\pi (\gamma - 1) \gamma_2 V_{\infty}^2 + 8\pi \gamma_1 p_2 - (\gamma - 1) B_2^2]}$$

$$C_0 = \frac{B_2^2 - 4\pi \gamma_2 p_2 - 4\pi \gamma_2 V_{\infty}^2}{4\pi \gamma_2 V_{\infty}^2 - B_2^2} \quad (1.14)$$

$$C_0 = \frac{4\pi\gamma_2^2 c_2 B_2 [(\gamma_1 - 1)\gamma_2 g_1 - (\gamma_1 + 1)(\gamma_2 - \gamma_1) V_{00}]}{(\gamma_1 - 1)(4\pi\gamma_2 V_{00}^2 - B_2^2)g_1 - V_{00}(\gamma_2 - \gamma_1)[4\pi(\gamma_1 - 1)\gamma_2 V_{00}^2 + 8\pi\gamma_2 p_2 - (\gamma_1 - 1)B_2^2]}$$

$$p_c^* = \frac{p_2 - p_1}{c_2 \gamma_2}, \quad b_c = \frac{b}{\gamma_2^2} - \text{вариации давления и магнитного поля,}$$

имеющие размерность скорости.

Уравнение (1.13) на ударной волне можно написать для одной только функции  $p_c^*$ , если использовать уравнения (1.9), записанные в переменных  $\xi, \eta$

$$\frac{\partial p_c^* \partial \eta}{\partial p_c^* \partial \xi} = \frac{M_1 \xi - M_2 \eta^{-1}}{M_1}$$

$$M_1 = D_0 + k_2 - \frac{B_2 c_2}{4\pi k_0 c_2^2 \gamma_2} - \frac{B_2^2}{4\pi k_0 \gamma_2^2 \gamma_2} \quad (1.15)$$

$$M_2 = E_0 k_0 - \frac{B_2^2 E_0}{4\pi k_0 c_2^2 \gamma_2} - \frac{B_2 L_0}{4\pi c_2 \gamma_2^2}, \quad M_2 = 1 - k_2^2 - \frac{B_2^2}{4\pi \gamma_2^2}$$

Наряду с условием (1.15) берется условие, заключающееся в том, что изменение  $\omega$  вдоль скачка от центра до вершины равно  $g_2$

$$\int_0^{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial \xi} d\xi = \int_0^{\omega} \frac{E_0}{\gamma_2} d p_c^* = g_2 \quad (1.16)$$

Для решения сформулированной граничной задачи по решению системы уравнений (1.9) при граничных условиях (1.11), (1.12), (1.15) и (1.16) применяется метод Смирнова-Соболева, который справедлив для произвольной гиперболической системы с постоянными коэффициентами для 3-х независимых переменных  $x, y, t$  и согласно которому можно искать решение системы (1.9) в виде

$$u = \operatorname{Re} V_x(z), \quad \omega = \operatorname{Re} V_y(z), \quad b_x = \operatorname{Re} B_x(z) \quad (1.17)$$

$$b_y = \operatorname{Re} B_y(z), \quad p = \operatorname{Re} P(z)$$

где  $V_x(z), V_y(z), B_x(z), B_y(z), P(z)$  — аналитические функции переменной  $z$ , зависящей от  $x, y, t$  в виде

$$zy + \bar{z}(z)x = t \quad (1.18)$$

Подставляя (1.17) в (1.9), получим уравнения, из которых можно получить соотношения

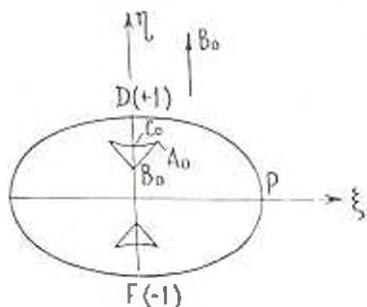
$$V_x(z) = \frac{\beta}{\gamma_2^2 \gamma_0} P'(z), \quad V_y(z) = \frac{\gamma}{\gamma_2} P'(z), \quad B_x(z) = -\frac{\alpha \beta}{\gamma_2^2 \gamma_0} P'(z)$$

$$B_y(z) = \frac{\beta^2}{\gamma_2^2 \gamma_0} P'(z), \quad \gamma_0 = 1 - \frac{B_2^2}{4\pi \gamma_2} (z^2 + \bar{z}^2)$$

и дисперсионное уравнение для  $\beta(\alpha)$ , решение которого в переменных  $z_1 = z_0$ ,  $\xi_1 = \xi_0$  имеет вид

$$\xi(z) = \sqrt{\frac{(1 - a_1^2 z^2)(1 - z^2)}{(1 + a_1^2 z^2 - a_1^2 z^4)}} \quad \text{где} \quad a_1^2 = \frac{D_0^2}{4\pi^2 c_0^2} \quad (1.19)$$

Здесь и в дальнейшем индекс 1 отбрасывается. Подставляя значение  $\beta(\alpha)$  в (1.18), получим относительно  $\alpha$  уравнение четвертого порядка. Путем графического построения можно показать, что это уравнение имеет два вещественных корня  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ , остальные же два значения  $\alpha$  комплексно сопряженные. Из них мы берем одно значение  $\alpha$  в нижней полуплоскости. В плоскости  $\alpha$  функция  $\beta(\alpha)$  имеет точки ветвления:



Фиг. 3.

$$\alpha = \pm 1, \quad \pm \frac{1}{a_1}, \quad \pm \frac{1}{a_1} \sqrt{1 + a_1^2}$$

Как известно, уравнение точечных волн, произведенных в момент  $t = 0$  в вершине угла, дается отбывающей плоских волн в виде

$$\begin{aligned} z_0 \xi + \xi(z_0) \xi &= 1 \\ \xi + \xi(z_0) \xi &= 0 \end{aligned} \quad (1.20)$$

причем  $z_0$ ,  $\xi(z_0)$  действительны.

Здесь быстрой магнитозвуковой волне (фиг. 3) соответствует отрезок  $(-1, +1)$ ; состоящий из двух берегов, причем на нижнем берегу разреза берем  $\beta(\alpha) > 0$ , тогда согласно выбору ветви  $\beta(\alpha)$  волне  $DPF$  будет соответствовать нижний берег разреза (фиг. 4). На верхнем берегу разреза  $(-1, +1)$ ,  $\beta(\alpha) < 0$ , так как при полном обходе точки  $\alpha = +1$  в положительном направлении  $\arg \beta(\alpha)$  становится равным  $\pi$ . Исследования, которые можно провести для медленной магнитозвуковой волны, показывают, что  $\beta(\alpha)$  действительное (отрицательное на нижнем берегу, положительное на верхнем), причем точке  $\alpha = \frac{1}{a_1} \sqrt{1 + a_1^2}$  (фиг. 4) соответствует точка  $B_0$ , точке  $\alpha = \frac{1}{a_1} - C_0$ , а точке  $\alpha = z_1$  соответствует точка  $A_0$ , в которой  $\xi^0(z_1) = 0$ , что соответствует бесконечной кривизне волны в точке  $A_0$  (фиг. 3).

Значит в нашей задаче при магнитном поле, параллельном оси  $Oy$ , можно полагать для всех функций, в том числе для  $p_0$

$$p_0 = \operatorname{Re} \psi(z) \quad (1.21)$$

где  $\alpha$  определяется из уравнения

$$\alpha_0 + \xi(\alpha) \xi = 1 \quad (1.22)$$

Решение (1.21) будет описывать все поле неравномерного течения, включая окрестность медленной магнитозвуковой волны, хотя, строго

говоря, в окрестности особых точек медленной магнитозвуковой волны нужно учитывать нелинейные эффекты

$$\frac{1}{a_1^{**}} - \frac{\sqrt{1+a_1^{**2}}}{a_1^{**}} \quad -1 \quad +1 \quad \frac{1}{a_1^{**}} - \frac{\sqrt{1+a_1^{**2}}}{a_1^{**}}$$

Фиг. 4

Вообще говоря, можно найти решение поставленной задачи для произвольного вида функции  $f(z)$ , однако для получения замкнутой аналитической формы решения нужно иметь сравнительно простую форму кривой в плоскости  $\frac{z}{2}$ , представляющей обратный скачок  $\xi = k_0$  в плоскости  $\xi, \eta$ . Для эффективного конформного отображения образа области возмущенного движения в плоскости  $\frac{z}{2}$  на кинематическую область предполагаем параметр  $a_1^{**}$  малым и разлагаем  $\xi(z)$  в ряд по параметру  $a_1^{**}$ :

$$\xi(z) \approx \xi_0(z) + \frac{\partial \xi_0(z)}{\partial a_1^{**}} \Big|_{a_1^{**}=0} a_1^{**} = \left(1 - \frac{a_1^{**2}}{2}\right) \sqrt{1-z^2} \quad (1.23)$$

Это разложение верно всюду, кроме окрестности точек

$$z = \pm \frac{1}{a_1^{**}}, \quad z = \pm \frac{1}{a_1^{**}} \sqrt{1-a_1^{**2}}$$

В статье она используется лишь вблизи ударной волны. Подставляя (1.23) в (1.22), определяя из полученного уравнения  $\frac{z}{2} = \zeta + i\epsilon$  и отделяя действительную и мнимую части, получим

$$\zeta = \frac{\xi}{1-\xi^2}, \quad \eta = \frac{\sqrt{1-\xi^2-\eta^2}}{1-\xi^2} \quad (1.24)$$

где

$$\xi = 1 - \left(1 - \frac{a_1^{**2}}{2}\right)$$

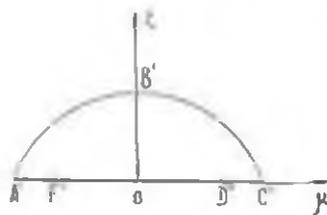
Область плоскости  $\xi, \eta$  переходит в плоскости  $\zeta, \eta$  в область между частью АС действительной оси  $\zeta$  и эллипсом (фиг. 5)

$$\frac{k_0^{**2} \eta^2}{k^{**2}} + k_0^{**2} \zeta^2 = 1 \quad (1.25)$$

где

$$k_0^{**} = k_0 \left(1 - \frac{a_1^{**2}}{2}\right), \quad k^{**} = \sqrt{1-k^2}$$

Промежутки  $-\frac{1}{k^*} < \zeta < -1$ ,  $-1 < \zeta < 1$ ,  $1 < \zeta < \frac{1}{k^*}$  действительной оси соответствуют дуге  $AF$ , стенке  $DEF$  и дуге  $DC$ . Эллипс (1.25) соответствует ударной волне  $ABC$ .



Фиг. 5

Теперь применим конформное преобразование

$$K = \frac{2i\omega}{1-\omega^2}, \quad K = z + iy \quad (1.26)$$

и вводим плоскость  $z = \omega$ , причем  $z = x + iy$ . Отделяя в (1.26) действительную и мнимую части, получим

$$\zeta = \frac{2(1-x^2-y^2)y}{(1+x^2+y^2)^2-4y^2}, \quad \eta = \frac{2(1-x^2-y^2)x}{(1+x^2+y^2)^2-4y^2} \quad (1.27)$$

Преобразование (1.27) переводит область  $A'B'C'$  в область  $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$  на плоскости  $x = \rho \cos \theta$ ,  $y = \rho \sin \theta$ . Отрезок  $DF'$  перейдет в часть  $-1 < \nu < 1$  мнимой оси, отрезки  $F'A'$  и  $D'C'$  перейдут в дуги окружности единичного радиуса, а эллипс (1.25) преобразуется в дугу окружности (фиг. 6)

$$2y \cos \theta = k^* (1 - \rho^2) \quad (1.28)$$

которая пересекает окружность  $\rho = 1$  в точке  $(k^*, k^{*'})$  под прямым углом.

Преобразуем соотношение (1.15) для произвольных давления по направлению нормали и касательной к дуге окружности (1.28), соответствующей ударной волне; при последующем конформном преобразовании они перейдут в производные по нормали и касательной к контуру, в который переходит окружность (1.28) при преобразовании. Используя упрощенную формулу (1.23) вблизи ударной волны, можно для перехода от плоскости  $\zeta, \eta$  к плоскости  $\rho, \theta$  воспользоваться преобразованием Буземана

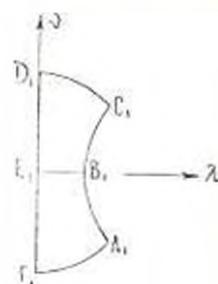
$$\zeta' = \frac{2y \cos \theta}{1-\rho^2}, \quad \eta' = \frac{2y \sin \theta}{1-\rho^2} \quad (1.29)$$

что следует из (1.24) и (1.27). Так как на дуге  $ABC$

$$\sin \theta = k_n^* \cos \alpha_0$$

$$\frac{\partial p_0}{\partial \zeta} = \frac{\partial p_0}{\partial \zeta'} \cos \alpha_0 - \frac{\partial p_0}{\partial \eta'} \sin \alpha_0, \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_0}{\partial \theta} = \frac{\partial p_0}{\partial \zeta'} \sin \alpha_0 - \frac{\partial p_0}{\partial \eta'} \cos \alpha_0$$

где  $\alpha_0$  — угол между направлением касательной в произвольной точке дуги  $ABC$  и лучом, проведенным из начала координат в точку касания, то условие (1.15) в плоскости  $\rho, \theta$  будет иметь вид



Фиг. 6

$$\frac{\partial p_0 / \partial \theta}{\partial p_0 / \partial s} = \frac{(M_1 k_0^{*2} k_0^* - M_2 k_0^{*2}) \cos \theta - M_2 k_0^{*2} k_0^{*2} \cos \theta}{M_2 (1 - k_0^{*2} \sec^2 \theta)} \quad (1.30)$$

где

$$k_1^* = 1 - \frac{1}{k_0^{*2}}, \quad k_0^* = k_0^* - \frac{a_1^2 k_0^{*2}}{4b}$$

На дугах  $\theta = 1$ ,  $\frac{\partial p_0}{\partial s} = 0$ , и на прямой  $D_1 E_1 F_1$  ( $\theta = \frac{\pi}{2}$ ).

$\frac{\partial p_0}{\partial u} = 0$ . Функция

$$z_1 = \ln \frac{1+z}{1-z} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z} \quad (1.31)$$

переводит область  $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$  в прямоугольник (фиг. 7)

$$0 < x_1 < \lambda, \quad 0 < y_1 < \pi \quad (1.32)$$

причем на  $A_1 B_1 C_1$  значение  $z_1$  будет равно

$$z_1 = \frac{1}{2} \ln \frac{1+k_0^*}{1-k_0^*} + i \left( \frac{1}{2} \pi - \arctg \frac{2 \sin \theta}{1-\cos^2 \theta} \right) = x_1 + i y_1 \quad (1.33)$$

Условие (1.30) на ударной волне перейдет

$$-\frac{\partial p_0}{\partial x_1} \sin y_1 \cos y_1 = \frac{\partial p_0}{\partial y_1} \left[ \left( \frac{M_1 k_0^{*2}}{M_2} - k_0^* \right) \cos y_1 - \frac{M_2 k_0^{*2}}{k_0^{*2} M_2} \right] \quad (1.34)$$

на  $D_1 C_1$ ,  $F_1 A_1$  и  $D_1 E_1 F_1$  имеем

$$\frac{\partial p_0}{\partial x_1} = 0 \quad (1.35)$$

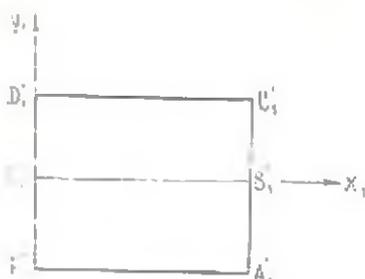
Итак, задача заключается в определении функции  $p_0^*$ , удовлетворяющей уравнению Лапласа внутри прямоугольника (1.32) и граничным условиям (1.34), (1.35). Далее задача решается методом Шайтхилла [1].

Решение однозначно находится в виде [1]

$$\varphi(z_1) = K_0 \frac{\theta_0(-iz_1, g^2)}{\theta_1(-iz_1, g^2)} W(z_1) \quad (1.36)$$

где  $\theta_0, \theta_1$  — тета-функции [18]

$$W(z_1) = \exp \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (2-a^n - b^n) n^{-1} \operatorname{csch} 2n\pi \operatorname{ch} 2nz_1 \right\} \quad (1.37)$$



Фиг. 7

$$a = \frac{x^* - 1}{x^* + 1}, \quad b = \frac{z^* - 1}{z^* + 1}, \quad \xi = \frac{1 - K_0^*}{1 + K_0^*}$$

а  $K_0^*$  определяется из условия (1.16). Для распределения давления на стенке имеем

$$\left( \frac{\partial p_0}{\partial y_1} \right)_{x=0} = -K_0^* \frac{\partial_2(y_1)}{\partial_4(y_1)} W'(iy_1)$$

По формулам

$$\bar{y}_1 = \frac{y_1}{r_0} = \frac{1}{(g_1 - 1)}, \quad \bar{B}_1 = \frac{B_1}{B_0} = \bar{y}_1$$

$$\bar{p}_1 = \frac{p_1}{\gamma_0 V_0^2} = \frac{1}{\gamma_0 M^2} = \frac{1}{K_1} = \frac{\bar{a}_1^2 \bar{g}_1 (\bar{g}_1 - 2)}{2(\bar{g}_1 - 1)^2} \quad (1.38)$$

$$\bar{y}_2 = \frac{y_2}{r_0} = \frac{\bar{y}_1 (\bar{K}_1 + \bar{V}_{\infty}^2)}{\bar{V}_{\infty}^2}, \quad \bar{B}_2 = \frac{B_2}{B_0} = \bar{y}_2$$

$$\bar{p}_2 = \frac{p_2}{\gamma_0 V_0^2} = \bar{p}_1 - \bar{y}_1 \bar{K}_1 (\bar{K}_1 + \bar{V}_{\infty}^2) = \frac{\bar{a}_1^2 \bar{B}_2^2 \bar{g}_1 (\bar{K}_1 + 2\bar{V}_{\infty}^2)}{2\bar{V}_{\infty}^2}$$

где  $\bar{a}_1^2 = \frac{B_1^2}{4\pi\gamma_0 V_0^2}$ ,  $\bar{g}_1 = \frac{g_1}{V_0}$  и  $\bar{V}_{\infty}^2 = \frac{V_{\infty}^2}{V_0}$  определяются из уравнений (1.1) и (1.5), записанных в безразмерных параметрах для  $\gamma = \frac{7}{5}$ . Кроме того, подсчитано значение

$$\frac{K_0^*}{4V_0} = \frac{g_0 K_0^*}{K_0}$$

$$: \int_0^{\bar{y}_2} \frac{\partial_2(y_1)}{\partial_4(y_1)} |W'(iy_1)| dy_1 = \frac{(z_2 - z_1) \sin y_1 dy_1}{1 - \cos^2 y_1 - z_2 \sin y_1} \frac{1 - \cos^2 y_1 - z_1^2 \sin y_1}{1 - \cos^2 y_1 - z_1^2 \sin y_1}$$

где  $z_1$  и  $z_2$  определяются из уравнения

$$\frac{1}{z_1 + z_2} = \frac{M_1 K_0^{*2}}{M_2} = K_0^* = \frac{M_2 K_0^{*2}}{K_0^{*2} M_3}, \quad \frac{z_1 z_2}{z_2 - z_1} = \frac{M_0 b_0^{*2}}{K_0^{*2} M_3}$$

Вычислено также безразмерное давление  $\bar{p}$  на стенке по формуле

$$\bar{p} = \bar{p}_2 - \bar{p}_1 z_1 (p_2 - p_0) \quad (1.39)$$

Результаты расчетов приведены в табл. 1.

Таблица 1

	$M = 1,5$ $\bar{a}_1 = 0$	$M = 1,5$ $\bar{a}_1 = 0,01$	$M = 3$ $\bar{a}_1 = 0$	$M = 3$ $\bar{a}_1 = 0,01$	$M = \infty$ $\bar{a}_1 = 0$	$M = \infty$ $\bar{a}_1 = 0,01$
$\bar{p}_1$	0,7804	0,7801	0,8201	0,8191	0,8333	0,8311
$\bar{p}_2$	1,8621	1,8612	3,8571	3,8522	5,9999	5,9839
$\bar{g}_1$	0,4630	0,4627	0,7407	0,7404	0,8333	0,8329
$\bar{B}_1$	1,8621	1,8612	3,8571	3,8522	5,9999	5,9839
$\bar{p}_3$	1,7223	1,7206	4,1005	4,0890	6,6667	6,6272
$\bar{p}_4$	3,2312	3,2287	10,8701	10,8458	21,0000	20,9012
$\bar{g}_2$	0,7541	0,7539	1,0425	1,0415	1,1111	1,1091
$\bar{B}_2$	3,2312	3,2287	10,8701	10,8458	21,0000	20,9012
$\bar{a}_2$	0,8638	0,8637	0,7267	0,7265	0,6667	0,6663
$K_0 = U_0$	0,1713	0,1711	0,1569	0,1566	0,1346	0,1343
$\bar{p}(0)$	0	0	0	0	0	0
$\bar{p}(-6)$	0,1856	0,1855	0,2128	0,2113	0,2269	0,2222
$\bar{p}(-3)$	0,3444	0,3442	0,3853	0,3833	0,3911	0,3891
$\bar{p}(-2)$	0,4088	0,4085	0,4461	0,4445	0,4468	0,4428
$p_3(0)$	1,7223	1,7206	4,1005	4,0890	6,6667	6,6272
$p_3(-6)$	1,6962	1,6946	4,0149	4,0041	6,5151	6,4800
$p_3(-3)$	1,6739	1,6723	3,9457	3,9353	6,4039	6,3692
$p_3(-2)$	1,6649	1,6633	3,9211	3,9108	6,3688	6,3341

Как показывают численные расчеты, основные параметры движения, то есть давление, плотность и т. д. уменьшаются с ростом параметра  $\bar{a}_1^2$ , характеризующего магнитное поле при фиксированном числе Маха падающей ударной волны. Расчеты для распределения безразмерного давления  $\bar{p}$  на стенке показывают, что качественно сохраняется картина, имеющая место в газовой динамике [1], и, кроме того, снова имеет место уменьшение давления  $\bar{p}$  при увеличении параметра  $\bar{a}_1^2$ . По формуле (1.39) рассчитано также для  $\bar{a}_1^2 = \frac{1}{10}$  распределение полного давления  $p_3$  на стенке, причем с увеличением  $\bar{a}_1^2$  давление  $p_3$  уменьшается.

Из табл. 1 также видно, что основные параметры движения  $\bar{p}$  и  $p_3$  на стенке увеличиваются с ростом числа Маха при фиксированном значении параметра  $\bar{a}_1^2$ .

2. Подобным же образом решена задача о дифракции сильной магнитогазодинамической ударной волны относительно клина при начальном магнитном поле, параллельном ребру клина. Не приводя выкладок, резюмируем окончательные результаты в виде табл. 2.

Таблица 2

	$M=1,5$ $\bar{a}_1=0$	$M=1,5$ $\bar{a}_1=0,01$	$M=3$ $\bar{a}_1=0$	$M=3$ $\bar{a}_1=0,01$	$M=\infty$ $\bar{a}_1=0$	$M=\infty$ $\bar{a}_1=0,01$
$\bar{p}_1$	0,7804	0,7801	0,8201	0,8191	0,8333	0,8311
$\bar{z}_1$	1,8621	1,8612	3,8571	3,8523	5,9999	5,9840
$\bar{z}_1$	0,4630	0,4627	0,7407	0,7404	0,8333	0,8329
$\bar{H}_1$	1,8621	1,8612	3,8571	3,8523	5,9999	5,9840
$\bar{p}_2$	1,7223	1,7206	4,1005	4,0891	6,6667	6,6272
$\bar{z}_2$	3,2312	3,2287	10,8701	10,8458	21,0000	20,9012
$\bar{z}_2$	0,7545	0,7541	1,0125	1,0424	1,1111	1,1130
$\bar{z}_2$	3,2312	3,2287	10,8701	10,8458	21,0000	20,9012
$K_0 = H_0$	0,1713	0,1712	0,1569	0,1568	0,1346	0,1345
$\bar{p}(0)$	0	0	0	0	0	0
$\bar{p}(\tau=6)$	0,1857	0,1858	0,2128	0,2016	0,2261	0,2292
$\bar{p}(\tau=3)$	0,3445	0,3446	0,3851	0,3720	0,3941	0,3962
$\bar{p}(\tau=2)$	0,4689	0,4691	0,4461	0,5180	0,4468	0,4487
$\bar{p}_2(0)$	1,7223	1,7206	4,1005	4,0891	6,6667	6,6272
$\bar{p}_2(\tau=6)$	1,6962	1,6946	4,0150	3,9681	6,5154	6,1753
$\bar{p}_2(\tau=3)$	1,6739	1,6723	3,9457	3,8998	6,4049	6,3617
$\bar{p}_2(\tau=2)$	1,6619	1,6633	3,9211	3,8914	6,3688	6,3208

Из табл. 2 видно, что основные параметры движения (давление, плотность и т. д.) за падающей и отраженной плоскими ударными волнами уменьшаются с ростом параметра  $\bar{a}_1$  при фиксированном числе Маха падающей волны. Расчеты для распределения безразмерного давления  $\bar{p}$  и полного давления  $\bar{p}_2$  на стенке показывают, что с увеличением  $\bar{a}_1$  значение  $\bar{p}$  увеличивается, и то время как полное давление  $\bar{p}_2$  снова уменьшается.

Автор благодарит А. Г. Багдасяна за постановку задачи, обсуждение результатов и ценные советы.

Լ. Դ. ԱԶԱՅԱՆ

ՈՒՓԻ ՄԱՏ ՈՒՅԵՂ ԴՄԿԵՆՈՒՄԳԻՆԱՄԵՏԱԿԱՆ ՀԱՐՎԱՆՈՒՅԻՆ ԱՐԺԻ  
ԻՆՖՐԱԿՅԻՄՆԻ ՎԵՐԱԿԵՐՅԱԼ ԿՆԻՐԸ

Ա Վ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Ներկա աշխատանքում զիտարկվում է անհավասարաչափ նոսանքի սփրայթի  $\pi$ -ին մոտ անկյունից ուժեղ մագնիտոգազոտրոնային աղմուկի արվածային ալիքի անդրադարձման խնդրում բնկնող ալիքին զուգահեռ մագնիսական դաշտի առկայությանը: Անհավասարաչափ նոսանքի սփրայթում խնդիրը Ամիրսով-Սարգսի մեթոդով բերված է ճնշումը բնորոշող անալիտիկ ֆունկցիայի նամար եզրային խնդրին: Ենդիրը յուժված է Լայվիսիցի մեթոդով: Արտջված է ճնշման բաշխումը պատի վրա կատարված են թվային աշխատանքներ:

THE PROBLEM ON DIFFRACTION OF A STRONG  
MAGNETOGASDYNAMIC SHOCK WAVE AT A WEDGE

L. D. AZAPIAN

S u m m a r y

A region of non-uniform flow is investigated in the problem on reflection of a magnetogasdynamical strong shock wave from an angle close to  $\pi$  in the presence of a magnetic field parallel to incident shock.

The problem for the above region is reduced by the Smirnov-Sobolev method to a boundary problem for analytic function (pressure). The solution is obtained by the Lighthill method. Wall-pressure distribution is determined and numerical calculation is presented.

## Լ Ի Տ Ե Ր Ա Մ Մ Ա

1. Lighthill M. J. The diffraction of blast. Proc. Roy. Soc., London, A 201, 1950, 554—566.
2. Жисалко Е. Ф. Отражение ударной волны, близкое к нормальному, в линейном приближении. Вестник ЛГУ, 1970, № 13, вып. 3, 92—99.
3. Жисалко Е. Ф. Отражение ударной волны от жесткой стенки, близкое к нормальному, в линейном приближении осесимметричной течения. Вестник ЛГУ, 1971, № 7, вып. 2, 77—83.
4. Кравчицкий А. Г. и Дубинин Г. Г. Магнитная гидродинамика. М., Физматгиз, 1962.
5. Любарский Г. Я., Половин Р. В. Задатка и парные в магнитной гидродинамике. Докл. АН СССР, т. 128, № 1, 1959.
6. Коган М. И. Ударные волны в магнитной гидродинамике. ПИМ, т. XXIII, № 3, 1959.
7. Газосов В. В. Взаимодействие магнитогидродинамических волн. ПИМ, т. XXV, № 3, 1961.

- 8 Гольцов В. В. Взаимодействии магнитогазродинамических волн с контактным и кривым разрывом. ПММ, т. XXV, № 2, 1961.
- 9 Jeffrey A., Taniuti T. Non-Linear Wave Propagation with Application to Physics and Magnetohydrodynamics. New-York, London, 1964.
- 10 Коробейников В. П. Распространение слабых магнитозвуковых волн. Матн. гидродинамика, 1967, № 2, 25—31.
- 11 Минаши М. М. О распространении слабых возмущений в магнитной газодинамике. Докл. АН АрмССР, т. LV, № 3, 1972.
- 12 Арсентьев В. А. Распространение ударной волны. ПМТФ, № 3, 1952.
- 13 Минаши М. М. Проникание тела в полупространство сжимаемой жидкости при наличии магнитного поля. Докл. АН АрмССР, Механика, т. XXV, № 3, 1972.
- 14 Кольба М. Н., Коробейников В. П., Кудряковская А. Г., Любимов Г. А. Механика разреженного газа и магнитная гидродинамика, Механика в СССР за 50 лет, механика жидкости и газа, т. 2, 423—454.
- 15 Франк и Мизес. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, т. 12. ОНТИ, Л—М., 1937.
- 16 Калдымак Л. С. Элементы магнитной газодинамики. М., Атомиздат, 1961.
- 17 Лантоски Е., и Ватсон Г. Курс современного анализа, т. II, ОНТИ, М., 1934.