

З. Н. ДМОВИ

К ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ МАГНИТОУПРУГИХ ВОЛН В ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩИХ ИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

На основе известного метода комплексных решений Смирнова-Соболева [1] рассматривается задача распространения упругих волн в изотропной безграничной среде при наличии магнитного поля.

Изучаются функционально-инвариантные решения плоской задачи магнитоупругости, представляющие собой плоские волны двух типов.

Приводятся исследование изменения скоростей распространения волн в зависимости от величины магнитного поля и от угла между магнитным полем и нормалью к волне.

В результате проведенных исследований магнитоупругие волны разделяются на быстрые и медленные. Строятся графики скоростей этих волн.

Аналогичные вопросы для анизотропных тел при отсутствии магнитного поля рассмотрены в [2-5].

1. Если упругая электропроводящая среда находится в магнитном поле, то распространяющиеся в ней упругие волны будут возбуждать колебания магнитного поля и сами изменятся под их влиянием. Волны, возникающие в результате такого взаимодействия, называются магнитоупругими.

Система уравнений, описывающая движение упругой среды в постоянном однородном магнитном поле с заданным вектором напряженности H_0 , имеет вид [6-12]:

$$h = \text{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{H}_0), \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c_0} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \times \mathbf{H}_0 \right) \quad (1.1)$$

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + G) \text{grad} \text{div} \mathbf{u} - \mathbf{R} \quad (1.2)$$

где \mathbf{E} и \mathbf{h} — векторы напряженности индуцированного электромагнитного поля, \mathbf{u} — вектор упругого смещения, c_0 — скорость света в вакууме, μ — магнитная проницаемость, ρ , λ и G — плотность и упругие постоянные Ляме среды, соответственно.

Величина \mathbf{R} , входящая в уравнения движения (1.2), является объемной силой электромагнитного происхождения и определяется следующим образом:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{c_0} (\mathbf{j} \times \mathbf{H}_0) - \frac{1}{4\pi} [\text{rot} \text{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{H}_0)] \times \mathbf{H}_0 \quad (1.3)$$

где \mathbf{j} — вектор плотности индуцированного тока.

При выводе систем уравнений (1.1)–(1.2) принимаются следующие предположения:

- а) среда является изотропным идеальным проводником;
- б) токи смещения пренебрегаются;
- в) упругие перемещения среды и электромагнитные возмущения считаются настолько малыми, что при описании магнитоупругих колебаний можно пользоваться линейными уравнениями магнитоупругости и электродинамики.

Отнесем упругую среду к прямоугольной системе координат x, y, z . Рассмотрим случай, когда все искомые величины не зависят от одной из координат, например z , и упругое смещение по направлению соответствующей координаты отсутствует, то есть

$$u_3 = u_3(x, y, t), \quad u_2 = 0 \quad (1.4)$$

$$E_i = E_i(x, y, t), \quad h_i = h_i(x, y, t), \quad i = 1, 2, 3$$

Выясним необходимые условия выполнения соотношений (1.4).

В предположениях (1.4) уравнение (1.2) дает два уравнения, определяющих перемещения u_1, u_2 и следующее дополнительное условие:

$$H_3 \left(H_1 \frac{\partial e}{\partial x} - H_2 \frac{\partial e}{\partial y} \right) = 0, \quad e = \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y} \quad (1.5)$$

Уравнение (1.5) фактизируется тождественно в следующих двух случаях:

1. заданное магнитное поле H_0 параллельно плоскости xy ($H_{0z} = 0$);
2. заданное магнитное поле перпендикулярно к плоскости xz ($H_{0x} = H_{0z} = 0$).

Таким образом, выполнение условий, приведенных в случаях 1 и 2, является необходимым для существования решений вида (1.4) (аналог плоской задачи теории упругости).

Проектуруя уравнение (1.2) на оси координат x, y , с учетом (1.3) и (1.4) получим:

$$\text{для случая 1 } (H_{0z} = 0)$$

$$\begin{aligned} & (a^2 - z^2 \sin^2 \varphi) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - (b^2 - z^2 \sin^2 \varphi) \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \\ & + c^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2} z^2 (\sin 2\varphi) \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (1.6) \\ & c^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2} z^2 (\sin 2\varphi) \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \right) - (a^2 + z^2 \cos^2 \varphi) \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + \\ & + (b^2 - z^2 \cos^2 \varphi) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = 0 \end{aligned}$$

для случая 2 ($H_{01} = H_{02} = 0$)

$$\begin{aligned} (c^2 + z_1^2) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} + (a^2 - z_1^2) \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} - b^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} &= 0 \\ (a^2 + z_1^2) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - b^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + (c^2 - z_1^2) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь

$$a = z^{-1} (v + 2G)^{1/2}, \quad b = z^{-1} (G)^{1/2}, \quad z = 2^{-1} (\pi z)^{-1/2} \mu H_0, \quad (1.8)$$

$$z_1 = 2^{-1} (\pi z)^{-1/2} \alpha^{1/2} H_{01}, \quad H_0 = (H_{01}^2 + H_{02}^2)^{1/2}, \quad c = (a^2 - b^2)^{1/2}$$

a и b — скорости продольных и поперечных упругих волн в среде при отсутствии внешнего магнитного поля H_0 , $z(z_1)$ — скорость Альфвена, z — угол между осью x и направлением магнитного поля H_0 .

2. Решение системы уравнений (1.6) будем искать методом комплексных решений Смирнова-Соболева [1]. Обобщение этого метода на случай систем однородных дифференциальных уравнений второго порядка дано в работе [9].

Метод комплексных решений позволяет выделить некоторый, имеющий важное применение в физических задачах, класс решений рассматриваемой системы уравнений.

Согласно этому методу, решение системы уравнений (1.6) следует искать в виде

$$u_i = F_i(\Omega), \quad i = 1, 2 \quad (2.1)$$

где вспомогательная величина Ω , как функция от x, y, t быть может комплексная, определяется соотношением

$$l(\Omega) t + m(\Omega) x + n(\Omega) y + k(\Omega) = 0 \quad (2.2)$$

где коэффициенты $l(\Omega), \dots, k(\Omega)$ — некоторые аналитические функции от Ω .

Подставляя (2.1) в (1.6) и учитывая (2.2), получим

$$\begin{aligned} [(a^2 - z^2 \sin^2 z) m^2 - (b^2 - z^2 \sin^2 z) n^2 - l^2] F_1(\Omega) + \\ + \left[c^2 mn - \frac{1}{2} z^2 (\sin 2z) (m^2 - n^2) \right] F_2(\Omega) = 0 \\ \left[c^2 mn - \frac{1}{2} z^2 (\sin 2z) (m^2 + n^2) \right] F_1(\Omega) + \\ + [(a^2 - z^2 \cos^2 z) n^2 - (b^2 - z^2 \cos^2 z) m^2 - l^2] F_2(\Omega) = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Если $l \neq 0$, то, принимая $l = 1$, запишем условие разрешимости системы уравнений (2.3) для функций $F_i(\Omega)$ в следующем виде:

$$A_4(m) n^4 + A_3(m) n^3 + A_2(m) n^2 + A_1(m) n + A_0(m) = 0 \quad (2.4)$$

где

$$A_4(m) = a^2 b^2 - x^2 (a^2 \sin^2 \varphi - b^2 \cos^2 \varphi)$$

$$A_3(m) = c^2 x^2 (\sin 2\varphi) m$$

$$A_2(m) = [2a^2 b^2 - x^2 (a^2 - b^2)] m^2 - (a^2 - b^2 + x^2) \quad (2.5)$$

$$A_1(m) = -c^2 x^2 (\sin 2\varphi) m^3$$

$$A_0(m) = [a^2 b^2 - c^2 x^2 (a^2 \cos^2 \varphi - b^2 \sin^2 \varphi)] m^4 - (a^2 + b^2 + x^2) m^2$$

Равенство (2.4) есть алгебраическое уравнение 4-ой степени относительно n . Его корни n_i являются ветвями четырехзначной алгебраической функции, однозначной на соответствующей римановой поверхности.

Каждый корень n_i в силу соотношения (2.2), определяет в пространстве x, y, t функции $W_i(x, y, t)$ и, следовательно, общий вид решений (2.4) системы (1.6) будет зависеть в виде:

$$u = \sum_{i=1}^4 F_{i0}(\Omega_i), \quad i = 1, 2 \quad (2.6)$$

Если в соотношении (2.2) положим $k(\Omega) = 0$, то (2.6) будет однородное решение нулевого измерения.

Так как функции F_{i0} должны удовлетворять условиям (2.3), то из первого условия (2.3), написанного для F_{i0} , получим

$$F_{10}(\Omega_1) = W_1(\Omega_1) p_1(\Omega_1) \quad (2.7)$$

$$F_{20}(\Omega_2) = W_2(\Omega_2) q_2(\Omega_2)$$

где

$$p_1(\Omega_1) = -i^2 m_1 x + \frac{1}{2} x^2 (\sin 2\varphi) (m_1^2 - n_1^2) \quad (2.8)$$

$$q_2(\Omega_2) = (a^2 - x^2 \sin^2 \varphi) m_2^2 - (b^2 - x^2 \sin^2 \varphi) n_2^2 - 1$$

W_i — произвольные аналитические функции.

Подставив (2.7) в (2.6) и отделив действительную часть, получим вещественное решение типа

$$u_1(x, y, t) = \sum_{i=1}^4 \operatorname{Re} \left[\int_{\gamma_i}^{z_i} W_i(z) p_i(z) dz \right] \quad (2.9)$$

$$u_2(x, y, t) = \sum_{i=1}^4 \operatorname{Re} \left[\int_{\gamma_i}^{z_i} W_i(z) q_i(z) dz \right]$$

Произвольные функции W_k , входящие в решение (2.9), должны определяться из дополнительных условий соответствующей задачи.

Следует отметить, что если в некоторой области пространства x, y, t $\Omega(x, y, t)$ принимает комплексные значения, то функции $F_{ik}(\Omega)$ в соответствующей области комплексной плоскости Ω — аналитические, в случае же когда Ω принимает действительные значения $F_{ik}(\Omega)$ являются дважды дифференцируемыми функциями от Ω .

3. Если положим

$$m = -\theta = \text{const}, \quad n = i = \text{const}, \quad k(\Omega) = -\Omega \quad (3.1)$$

то соотношение (2.2) примет вид

$$\Omega_k = t - \theta x - i_k y \quad (3.2)$$

где $i_k = \mu_k$ — корни уравнения (2.1).

В этом случае, как следует из (2.6) и (3.2), простейшие решения системы (1.6), представляющие собой плоские волны, имеют вид

$$u_i = u_i(\Omega_k) = u_i(t - \theta x - i_k y), \quad i = 1, 2 \quad (3.3)$$

где функции u_i , согласно (2.9) и в силу постоянства величин θ и i_k , связаны соотношениями

$$\begin{cases} u_1 = W(\Omega_k) p(\Omega_k) \\ u_2 = W(\Omega_k) q(\Omega_k) \end{cases} \quad (3.4)$$

Если постоянные θ и i_k — вещественные, то плоские волны (3.3) называются однородными или вещественными, а если хотя бы одна из величин θ , i_k окажется комплексной, то волны (3.3) называются неоднородными или комплексными. В последнем случае в (3.3) и (3.4) следует брать вещественную часть.

Наконец, согласно (2.6) и (3.4), решение вида (3.3) системы (1.6) следует брать в следующем виде

$$\begin{cases} u_1(x, y, t) = \sum_{k=1}^2 \text{Re} \{ W_k(\Omega_k) p_k(\Omega_k) \} \\ u_2(x, y, t) = \sum_{k=1}^2 \text{Re} \{ W_k(\Omega_k) q_k(\Omega_k) \} \end{cases} \quad (3.5)$$

В дальнейшем удобно ось x направить по направлению заданного магнитного поля H_0 .

В этом случае из (2.1) — (3.4) получаем

$$\begin{cases} u_1 = \pm c^2 \theta_k W(t - \theta x - i_k y) \\ u_2 = (a^2 \theta^2 \pm b^2 i_k^2 - 1) W(t - \theta x - i_k y) \end{cases} \quad (3.6)$$

$$i_k = 2^{-1} (a_1 b)^{-1} [A(\theta) + (-1)^k |Q(\theta)|]^{1/2}, \quad k = 1, 2 \quad (3.7)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} A(\psi) &= K_1 - l\psi^2, & K_1 &= a_1^2 + b^2, & l &= a_1^2 b^2 - a^2 b_1^2 \\ B(\psi) &= 4a^2 b^2 (1 - a^2 \psi^2) (1 - l_1^2 \psi^2), & a_1^2 &= a^2 - z^2 \\ Q(\psi) &= A^2(\psi) - B(\psi) - \Lambda^2 \psi^4 - 2K_1 \Lambda \psi^2 - K_2^2 \\ K_2 &= a_1^2 - b^2, & \Lambda &= x^2 c^2, & b_1^2 &= b^2 - z^2 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Следуя [2], плоские волны, зависящие от аргументов $\Omega = t - \psi x - \psi_k y$, назовем соответственно, волнами 1-го ($\psi = \psi_1$) и 2-го ($\psi = \psi_2$) типов.

Выбор знака плюс или минус в (3.6) просто показывает, что плоские волны могут распространяться в упругой среде в противоположных направлениях: «назад» и «вперед».

Уравнения фронтов плоских волн (3.6) имеют вид

$$\Omega_k = t - \psi_k x - \psi_k y = \text{const}, \quad k = 1, 2 \quad (3.9)$$

Так как фазовые скорости распространения волн определяются по формуле [13]

$$v = \left[\frac{\partial \Omega_k}{\partial t} \right] / \left| \text{grad } \Omega_k \right| \text{ н.э.}$$

то из (3.9) получается

$$v_k = (\psi^2 + \psi_k^2)^{-1/2} \quad (3.10)$$

Подставляя в (3.10) значения ψ_k из (3.7), получим следующие выражения для скоростей распространения магнитоупругих волн:

$$v_k = 2 \cdot a_1 b \left[S(\psi) - (-1)^k \sqrt{Q(\psi)} \right]^{-1/2} \quad (3.11)$$

где

$$S(\psi) = K_1 - \Lambda \psi^2 \quad (3.12)$$

Здесь v_1 — скорость магнитоупругих волн 1-го типа, v_2 — 2-го типа.

Далее, из (3.10) имеем

$$\psi_k = (v_k^{-2} - \psi^2)^{-1/2} \quad (3.13)$$

Подставляя значения величин ψ_k из (3.13) в выражения (3.6), представим магнитоупругие плоские волны 1-го и 2-го типов в виде

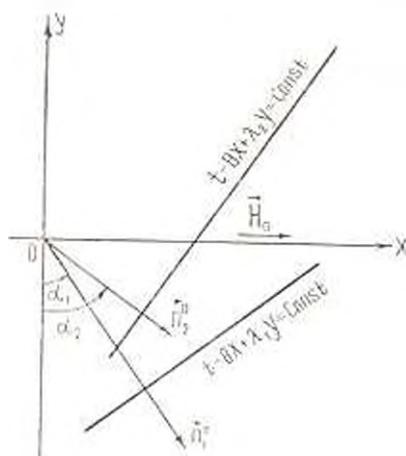
$$\begin{cases} u_1 = c^2 \psi (c^2 z^2 - \psi^2)^{-1/2} W [t - \psi x \pm (z^2 - \psi^2)^{-1/2} y] \\ u_2 = [a^2 \psi^2 - b^2 (z^2 - \psi^2) - 1] W [t - \psi x \pm (z^2 - \psi^2)^{-1/2} y] \end{cases} \quad (3.14)$$

Обозначив через χ_k углы между отрицательной полуосью y и направлением распространения волн 1-го и 2-го типов, соответственно (фиг. 1), получим

$$\tan \chi_k = \psi \psi_k = \psi (z^2 - \psi^2)^{-1/2}, \quad k = 1, 2 \quad (3.15)$$

Таким образом, четыре волны, соответствующие гиперболической системе (1.6), с выбором направления оси x (параллельно H_0) разделились на две пары, распространяющиеся «назад» и «вперед».

Волну, имеющую большую скорость, будем называть быстрой, другую же — медленной.



Фиг. 1.

В дальнейшем мы будем рассматривать волны только в одном направлении, соответствующем знаку плюс в (3.14).

Распространение магнитоупругих волн подчиняется более сложным закономерностям, чем распространение волн при отсутствии магнитного поля. В последнем случае в изотропной среде имеются две независимо распространяющиеся волны — продольные (быстрые со скоростью a) и поперечные (медленные со скоростью b). В противоположность чисто упругим волнам, магнитоупругие волны не разделяются на чисто продольные и поперечные: то есть смещения в магнитоупругих волнах относительно направления распространения имеют как продольные, так и поперечные компоненты. Скорости магнитоупругих волн зависят не только от упругих постоянных и плотности среды, но и от величины внешнего магнитного поля и от угла между нормалью к волне и магнитным полем.

Изучим решения (3.6) (или (3.14)) и исследуем изменение скоростей магнитоупругих волн в зависимости от величины внешнего магнитного поля и от угла между нормалью к волне и магнитным полем.

Выясним также вопрос о разделении магнитоупругих волн на быстрые и медленные в зависимости от величины магнитного поля.

Для этого рассмотрим изменения величины v_1 из (3.7) при

$$0 < \alpha < \pi/2, \quad 0 < \alpha < \pi/2.$$

В данном вопросе существенное значение имеют нули функций, находящихся под радикалами в выражениях (3.7).

Нули функции $Q(\theta)$, находящейся под внутренним радикалом (3.7), имеют вид

$$\theta = -\theta_1^0 = \pm N^{-1/2}(a_1 - b); \quad \theta = -\theta_2^0 = \pm N^{-1/2}(a_1 - b) \quad (3.16)$$

Так как $a > b$, то все четыре корня (3.16) вещественны.

Нули функции

$$T_1(\theta) = A(\theta) - (-1)^k |Q(\theta)| \quad (3.17)$$

находящихся под внешним радикалом в (3.17), имеют вид

$$\theta = -\theta_3 = \pm b_1^{-1}, \quad \theta = -\theta_4 = -a^{-1} \quad (3.18)$$

Все нули в (3.18) вещественные.

В дальнейшем, для выяснения значения функций ε_k , оказываются нужными нули функции $A(\theta)$, которые находим, согласно (3.8), в виде

$$\theta = -\theta_5^0 = -L^{-1/2} K_1^0 = - \left| \frac{a^2 - b^2 - z^2}{2a^2 b^2 + z^2(a^2 - b^2)} \right|^{1/2} \quad (3.19)$$

Они также вещественны.

Установим взаимное расположение корней (3.16), (3.18), (3.19) на оси θ в зависимости от величины z .

Благодаря симметрии корней, рассмотрим участок $0 < \theta < +\infty$.

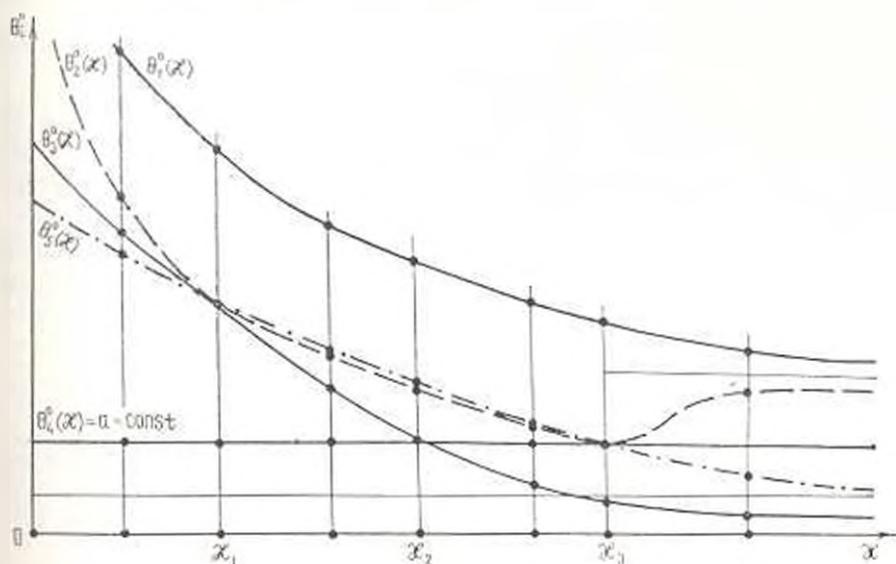
Исследование знаков разностей $R_{ij} = [\theta_j^0(z)]^2 - [\theta_i^0(z)]^2$, $i, j = 1, \dots, 5$ приводит к следующим результатам:

1. $0 < \theta_1^0(z) < \theta_2^0(z) < \theta_3^0(z) < \theta_4^0(z) = \theta_5^0(z) = +\infty$ при $z = 0$
2. $0 < \theta_4^0(z) < \theta_3^0(z) < \theta_5^0(z) < \theta_2^0(z) < \theta_1^0(z) < +\infty$ при $0 < z < z_1$
3. $0 < \theta_4^0(z) < \theta_5^0(z) = \theta_2^0(z) = \theta_3^0(z) < \theta_1^0(z) < +\infty$ при $z = z_1$
4. $0 < \theta_1^0(z) < \theta_2^0(z) < \theta_3^0(z) < \theta_4^0(z) < \theta_5^0(z) < +\infty$ при $z_1 < z < z_2$
5. $0 < \theta_4^0(z) = \theta_5^0(z) < \theta_3^0(z) < \theta_2^0(z) < \theta_1^0(z) < +\infty$ при $z = z_2$
6. $0 < \theta_5^0(z) < \theta_1^0(z) < \theta_3^0(z) < \theta_2^0(z) < \theta_4^0(z) < +\infty$ при $z_2 < z < z_3$
7. $0 < \theta_5^0(z) < \theta_2^0(z) = \theta_3^0(z) = \theta_4^0(z) < \theta_1^0(z) < +\infty$ при $z = z_3$
8. $0 < \theta_5^0(z) < \theta_4^0(z) < \theta_1^0(z) < \theta_3^0(z) < \theta_2^0(z) < +\infty$ при $z_3 < z < +\infty$
9. $0 = \theta_2^0(z) < \theta_3^0(z) < \theta_4^0(z) < \theta_5^0(z) = \theta_1^0(z) < +\infty$ при $z = +\infty$

где

$$z_1 = |2^{-1} b (1 + \sqrt{4a^2 - 3b^2} - b)|^{1/2}, \quad z_2 = |a^2 - b^2|^{1/2}, \quad z_3 = ab^{-1} |a^2 - b^2|^{1/2} \quad (3.21)$$

Согласно (3.16) — (3.21), на фиг. 2 приведены графики, характеризующие поведение функций $\theta_i^0(z)$.



Фиг. 2.

Исследование изменения величины θ_i требует также выяснения знаков функций $A(\theta)$, $B(\theta)$ и $Q(\theta)$ на положительной полуоси θ в зависимости от скорости Альфвена z .

В силу (3.16) — (3.21) для функций $A(\theta)$ и $Q(\theta)$ имеем ($0 < z < +\infty$)

$$\begin{aligned}
 A(\theta) > 0 & \text{ при } 0 < \theta < \theta_2^0(z), & A(\theta) = 0 & \text{ при } \theta = \theta_2^0(z) \\
 A(\theta) < 0 & \text{ при } \theta > \theta_2^0(z); & Q(\theta) > 0 & \text{ при } 0 \leq \theta < \theta_1^0(z) \\
 \theta_1^0(z) < \theta < +\infty, & Q(\theta) = 0 & \text{ при } \theta = \theta_1^0(z) \text{ и } \theta = \theta_3^0(z) \\
 Q(\theta) < 0 & \text{ при } \theta_2^0(z) < \theta < \theta_1^0(z)
 \end{aligned}
 \tag{3.22}$$

Изучение поведения функции $B(\theta)$ приводит к следующим двум различным случаям:

а) $0 \leq z < z_2$

$$\begin{aligned}
 B(\theta) > 0 & \text{ при } 0 \leq \theta < \theta_4^0(z) \text{ и } \theta_2^0(z) < \theta < +\infty \\
 B(\theta) = 0 & \text{ при } \theta = \theta_4^0(z) \text{ и } \theta = \theta_2^0(z) \\
 B(\theta) < 0 & \text{ при } \theta_4^0(z) < \theta < \theta_3^0(z)
 \end{aligned}
 \tag{3.23}$$

б) $z_2 \leq z < +\infty$

$$\begin{aligned}
 B(\theta) > 0 & \text{ при } 0 \leq \theta < \theta_1^0(z) \text{ и } \theta_1^0(z) < \theta < +\infty \\
 B(\theta) = 0 & \text{ при } \theta = \theta_1^0(z) \text{ и } \theta = \theta_3^0(z) \\
 B(\theta) < 0 & \text{ при } \theta_3^0(z) < \theta < \theta_1^0(z)
 \end{aligned}
 \tag{3.24}$$

На основании (3.20)–(3.24) в табл. 1 приводятся основные свойства функций T_k из (3.17), находящихся под внешним радикалом в (3.7).

Согласно табл. 1, в табл. 2 приводятся области вещественности функций γ_k на положительной полуоси b в зависимости от x .

В остальных точках оси b функции γ_k по всем рассматриваемым случаям или мнимые или комплексные; соответствующие плоские волны будут неоднородными и будут иметь мнимые или комплексные фазовые скорости.

Таким образом, значениям θ из табл. 2 соответствуют определенные вещественные магнитоупругие волны 1-го и 2-го типов с направлениями распространения и скоростями, определяемыми формулами (3.11), (3.14), (3.15).

В качестве примера рассмотрим это соответствие для волн, распространяющихся в направлении $\alpha_k = 90^\circ$, в случаях 2 и 4.

Согласно (3.15) для волн, распространяющихся в направлениях $\alpha_k = 90^\circ$, $\gamma_k = 0$. Приравняв нулю (3.7), в силу табл. 1, а также (3.10), (3.11) и (3.15) получим:

для случая 2

$$\begin{aligned} \gamma_1(\theta_1) = 0, \quad \gamma_2(\theta_1) \neq 0, \quad \gamma_3(\theta_1) = 0 \\ \alpha_1(\theta_1) = 90^\circ, \quad \alpha_2(\theta_1) < 90^\circ, \quad \alpha_3(\theta_1) = 90^\circ \end{aligned} \quad (3.25)$$

для случая 4

$$\begin{aligned} \gamma_1(\theta_1) = 0, \quad \gamma_2(\theta_1) \neq 0, \quad \gamma_3(\theta_1) = 0, \quad \gamma_4(\theta_1) = 0 \\ \alpha_1(\theta_1) = 90^\circ, \quad \alpha_2(\theta_1) < 90^\circ, \quad \alpha_3(\theta_1) = 90^\circ, \quad \alpha_4(\theta_1) < 90^\circ \end{aligned} \quad (3.26)$$

Соотношения (3.25) и (3.26) показывают, что в случае 2 каждый из двух типов волн (3.6) (или (3.14)) имеет по одному значению θ , соответствующему распространению в направлении оси x , а в случае 4 волна 1-го типа имеет два значения θ , волна же 2-го типа не имеет ни одного значения θ , соответствующего направлению $\alpha_1 = \alpha_2 = 90^\circ$.

Отсюда следует, что магнитоупругие волны в каждом направлении могут быть либо обе только одного типа, либо разных типов по одной. Это обстоятельство зависит от вышеуказанных интервалов изменения x (табл. 2) и требует детального исследования.

При этом нужны будут значения, принимаемые величинами γ_k , α_k , β_k на концах указанных интервалов вещественности функций γ_k .

Согласно (3.7)–(3.26) и табл. 1, указанные значения приведены в табл. 3, причем в случаях 4, 5, 6 имеют место следующие соотношения:

$$\gamma_2(\theta_2) = \gamma_3(\theta_2); \quad \alpha_1(\theta_2) = \alpha_2(\theta_2), \quad 0 < \alpha_1(\theta_2) = \alpha_2(\theta_2) < 90^\circ \quad (3.27)$$

Сначала рассмотрим случаи 2 и 4, которые являются наиболее характерными.

	T_3		
$\theta = 0$	$0 < \eta < \eta_2^0$ > 0	$\eta = \eta_2^0$ $= 0$	$\eta_1^0 < \eta < +\infty$ 0
$0 < \pi < \pi_1$	$0 < \eta < \eta_1^0$ > 0 $\eta_1^0 < \eta < \infty$ < 0	$\eta = \eta_1^0$ $= 0$	$\eta_2^0 < \eta < \eta_2^0$ 0
$\pi < \pi_1$	$0 < \eta < \eta_1^0$ > 0 $\eta_2^0 < \eta < \eta_1^0$ КОМПЛЕКС.	$\eta = \eta_1^0$ < 0 $\eta_1^0 < \eta < \infty$ < 0	$\eta_1^0 < \eta < \eta_2^0$ < 0
$\pi_1 < \pi < \pi_2$	$0 < \eta < \eta_3^0$ > 0 $\eta_1^0 < \eta < \eta_2^0$ > 0 $\eta_2^0 < \eta < \lambda$ < 0	$\eta = \eta_3^0$ $= 0$ $\eta_2^0 < \eta < \eta_2^0$ КОМПЛЕКС.	$\eta_4^0 < \eta < \eta_3^0$ $= 0$ $\eta = \eta_3^0$ МИНИМУМ
$\pi < \pi_2$	$0 < \eta < \eta_{3,1}^0$ > 0 $\eta_2^0 < \eta < \eta_1^0$ КОМПЛЕКС.	$\eta = \eta_{3,1}^0$ $= 0$ $\eta < \eta_1^0$ МИНИМУМ	$\eta_{3,1}^0 < \eta < \eta_2^0$ $= 0$ $\eta_1^0 < \eta < \eta_1^0$ КОМПЛЕКС.

Таблица 1

		Γ_2	
—	$0 < \eta < \eta_2^0$	$\eta < \eta_2^0$	$\eta_2^0 < \eta < +\infty$
—	0	0	0
$\eta_2^0 < \eta < \eta_1^0$ комплекс.	$0 < \eta < \eta_2^0$ > 0	$\eta < \eta_2^0$ 0	$\eta_2^0 < \eta < \eta_2^0$ < 0
—	$\eta_2^0 < \eta < \eta_1^0$ комплекс.	$\eta_1^0 < \eta < +\infty$ < 0	—
$\eta < \eta_2^0$ 0	$0 < \eta < \eta_2^0, \eta_3^0$ > 0	$\eta_2^0, \eta_3^0 < \eta$ 0	$\eta_2^0, \eta_3^0 < \eta < \eta_1^0$ комплекс.
—	$\eta_1^0 < \eta < +\infty$ < 0	—	—
$\eta < \eta_2^0$ 0	$0 < \eta < \eta_2^0$ 0	$\eta_2^0 < \eta < \eta_1^0$ комплекс.	$\eta < \eta_2^0$ мнимая
$\eta_2^0 < \eta < \eta_1^0$ комплекс.	$\eta_2^0 < \eta < \eta_1^0$ комплекс.	$\eta_1^0 < \eta < +\infty$ 0	—
—	—	—	—
$\eta < \eta_2^0$ > 0	$0 < \eta < \eta_2^0$ > 0	$\eta_2^0 < \eta < \eta_1^0$ комплекс.	$\eta < \eta_2^0$ мнимая
$\eta_1^0 < \eta < +\infty$ < 0	$\eta_2^0 < \eta < \eta_1^0$ комплекс.	$\eta_1^0 < \eta < +\infty$ < 0	—

О распределении минимизатора максимизатора

	T_1		
$z_4 < z < z_3$	$0 < h < h_2^0$ > 0 $h_1^0 < h < h_2^0$ > 0 $h_3^0 < h < \infty$ < 0	$h = h_3^0$ 0 $h_2^0 < h < h_3^0$ КОМПЛЕКС. —	$h_2^0 < h < h_3^0$ < 0 $h = h_2^0$ МИШЛЯЯ —
z	$0 < h < h_3^0$ > 0 $h_2^0 < h < h_1^0$ КОМПЛЕКС.	$h = h_3^0$ 0 $h_2^0 < h < \infty$ < 0	$h_2^0 < h < h_3^0$ 4. 5 < 0 —
∞	$0 < h < h_3^0$ > 0 $h_2^0 < h < +\infty$ < 0	$h = h_3^0$ 0 —	$h_2^0 < h < h_3^0$ < 0 —
z	$h = h_3^0 = 0$ 0	$h = h_3^0 < h$ < 0	—

Обозначения типа $h_{2,4,5}^0$ понимать так: h_1^0 $h_3^0 = h_2^0$

Продолжение таблицы 1

τ_2			
$\eta = \eta_1^0$ $= 0$ $\eta_1^0 = \eta = \eta_1^0$ комплекс.	$0 < \eta < \eta_1^0$ < 0 $\eta_1^0 < \eta = \eta_1^0$ комплекс.	$\eta_1^0 < \eta < \eta_1^0$ комплекс. $\eta_1^0 = \eta = +\infty$ < 0	$\eta = \eta_1^0$ миним.
$\eta = \eta_1^0$ $= 0$	$0 < \eta < \eta_1^0$ < 0 $\eta_1^0 = \eta = +\infty$ < 0	$\eta = \eta_1^0$ $= 0$	$\eta_1^0 < \eta < \eta_1^0$ комплекс.
$\eta_1^0 < \eta < \eta_1^0$ комплекс.	$0 < \eta < \eta_1^0$ < 0 $\eta_1^0 < \eta < \eta_1^0$ комплекс.	$\eta = \eta_1^0$ $= 0$ $\eta_1^0 = \eta = +\infty$ $= 0$	$\eta_1^0 < \eta < \eta_1^0$ > 0
	$0 < \eta < \eta_1^0$ < 0	$\eta = \eta_1^0$ $= 0$	$\eta_1^0 = \eta = +\infty$ < 0

Таблица 2

№	Случай	λ_1	λ_2
1	$x = 0$	0 $\forall \theta \in \theta_1^0$	—
2	$0 < x < x_1$	0 $\forall \theta \in \theta_1^0$	—
3	$x = x_1$	0 $\forall \theta \in \theta_1^0$	$\theta \in \theta_{2,3}^0$
4	$x_1 < x < x_2$	0 $\forall \theta \in \theta_1^0$	$\theta_3^0 \cup \theta_2^0$
5	$x = x_2$	0 $\forall \theta \in \theta_{2,3}^0$	$\theta \in \theta_2^0$
6	$x_2 < x < x_3$	0 $\forall \theta \in \theta_3^0$	$\theta_3^0 \cup \theta_2^0$
7	$x = x_3$	0 $\forall \theta \in \theta_3^0$	$\theta \in \theta_{2,4}^0$
8	$x_3 < x < +\infty$	0 $\forall \theta \in \theta_3^0$	—
9	$x = +\infty$	$\forall \theta \in \theta_3^0$ 0	0 $\forall \theta \in \theta_3^0$

Обозначение: $\theta_{2,3}^0 = \theta_2^0 \cup \theta_3^0 \cup \theta_4^0$.

Случай 2. $x_1 < x < x_2$. Согласно табл. 2, функции λ_1 и λ_2 имеют вещественные значения в интервалах, соответственно,

$$0 < \theta < \theta_1^0, \quad 0 < \theta < \theta_3^0 \quad (3.28)$$

В силу (3.15) и табл. 3, изменениям 0 в промежутках (3.28) соответствуют направления распространения волны (3.6) (или (3.14))

$$0 < \alpha_1 < 90^\circ, \quad 0 < \alpha_2 < 90^\circ \quad (3.29)$$

Следовательно, в случае 2 в каждом направлении распространяются волны обоих типов, скорости которых зависят от направления движения.

Изучим характер изменения скорости в зависимости от направления движения в пределах (3.29) и покажем, что $v_2(\alpha) > v_1(\alpha)$, $0 < \alpha < 90^\circ$.

Из (3.11) имеем

$$v_i = -\frac{v_0 R_i(\theta)}{2a^2 b^2}, \quad R_i = -N[1 + (-1)^i Q^{-1} S(\theta)] \quad (3.30)$$

$$R_i(\theta) = -(-1)^i \delta a^2 b^2 N^2 Q^{-1}, \quad (3.31)$$

Согласно (3.8) и (3.12)

$$S(\theta) > 0 \text{ при } \theta < \theta_2^0, \quad S(\theta) < 0 \text{ при } \theta > \theta_2^0 \quad (3.32)$$

где

$$\theta_i^0 > \theta_{i+1}^0 = \alpha^{-1} \arctan(a_1^2 - b^2)^{-1/2} > \theta_1^0 \quad i = 2, 3, 4, 5 \quad (3.33)$$

Выражение (3.31) совместно с первым условием из (3.32), выполняющимся в случае 2, дает

Таблица 3

	Точки оси θ	λ_3	v_3	τ_3	λ_2	v_2	τ_2
$\theta = 0$	0	a^{-1}	a	0	b^{-1}	b	0
	$\theta_3^0 = a^{-1}$	0	a	90°	$\lambda_2(\theta_3^0)$	$v_2(\theta_3^0)$	$\tau_2(\theta_3^0)$
	$\theta_3^0 = b_1^{-1}$	—	—	—	0	b	90°
$0 < \theta < \lambda_1$	0	a_1^{-1}	a_1	0	b^{-1}	b	0
	$\theta_3^0 = a^{-1}$	0	a	90°	$\lambda_2(\theta_3^0)$	$v_2(\theta_3^0)$	$\tau_2(\theta_3^0)$
	$\theta_3^0 = b_1^{-1}$	—	—	—	0	b_1	90°
$\lambda_1 < \theta < \lambda_2$	0	a_1^{-1}	a_1	0	b^{-1}	b	0
	$\theta_3^0 = a^{-1}$	0	a	90°	—	—	—
	$\theta_3^0 = b_1^{-1}$	0	b_1	90°	—	—	—
$\lambda_2 < \theta < \lambda_3$	0	a_1^{-1}	a_1	0	b^{-1}	b	0
	$\theta_3^0 = a^{-1}$	0	a	90°	—	—	—
	$\theta_3^0 = b_1^{-1}$	0	b_1	90°	—	—	—
	θ_3^0	$\lambda_1(\theta_3^0)$	$v_1(\theta_3^0)$	$\tau_1(\theta_3^0)$	$\lambda_2(\theta_3^0)$	$v_2(\theta_3^0)$	$\tau_2(\theta_3^0)$
$\lambda_3 < \theta < \lambda_4$	0	a_1^{-1}	a_1	0	b^{-1}	b	0
	$\theta_3^0 = a^{-1}$	0	a	90°	—	—	—
	θ_3^0	$\lambda_1(\theta_3^0)$	$v_1(\theta_3^0)$	$\tau_1(\theta_3^0)$	$\lambda_2(\theta_3^0)$	$v_2(\theta_3^0)$	$\tau_2(\theta_3^0)$
$\lambda_4 < \theta < \lambda_5$	0	a_1^{-1}	a_1	0	b^{-1}	b	0
	$\theta_3^0 = \lambda_1^{-1}$	0	b_1	90°	—	—	—
	$\theta_3^0 = a^{-1}$	0	a	90°	—	—	—
	θ_3^0	$\lambda_1(\theta_3^0)$	$v_1(\theta_3^0)$	$\tau_1(\theta_3^0)$	$\lambda_2(\theta_3^0)$	$v_2(\theta_3^0)$	$\tau_2(\theta_3^0)$
$\lambda_5 < \theta < \lambda_6$	0	a_1^{-1}	a_1	0	b^{-1}	b	0
	$\theta_3^0 = b_1^{-1}$	0	b_1	90°	—	—	—
	$\theta_3^0 = a^{-1}$	a^{-1}	a	90°	a^{-1}	a	90°
$\lambda_6 < \theta < \lambda_7$	0	a_1^{-1}	a_1	0	b^{-1}	b	0
	$\theta_3^0 = \lambda_2^{-1}$	0	b_1	90°	—	—	—
	$\theta_3^0 = a^{-1}$	—	—	—	a^{-1}	a	90°
$\lambda_7 < \theta < \lambda_8$	0	0	∞	любой	b^{-1}	b	0
	θ_3^0	—	—	—	a^{-1}	a	90°

$$K_1' > 0, \quad K_2' < 0, \quad K_1(0) = \frac{2Nb^2}{K_2} > 0, \quad K_2(0) = -N \left(1 + \frac{S(0)}{VQ} \right) < 0$$

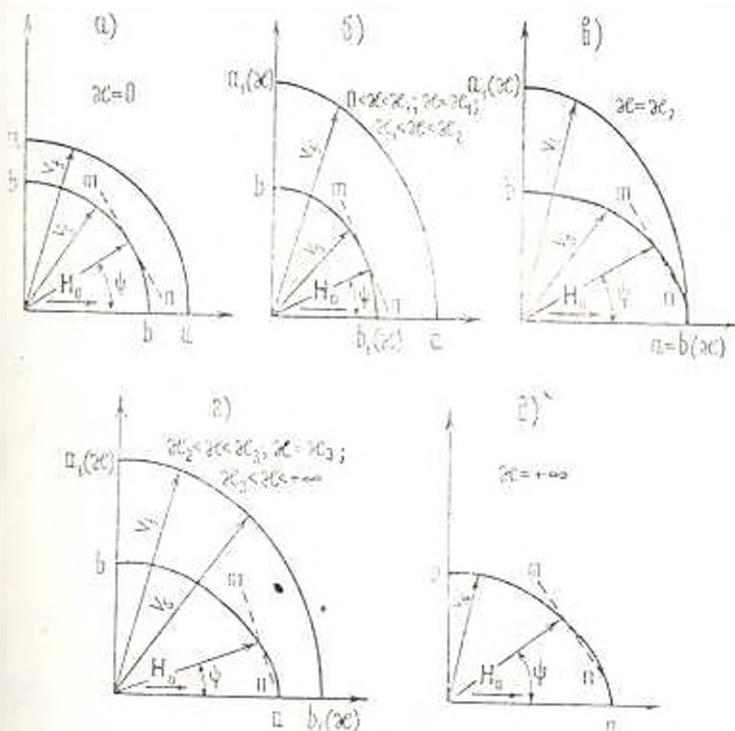
Следовательно, $R_1 > 0$ на отрезке $[0, \theta_1^*]$ и $R_2 < 0$ на отрезке $[0, \theta_2^*]$. Тогда, согласно (3.30), имеем $v_1 < 0$, $v_2 > 0$ и поэтому v_1 монотонно убывает от a_1 до a , v_2 монотонно возрастает от b до b_2 (табл. 3).

Так как на участках (3.28)

$$\begin{aligned} \max v_1 = v_1(0) = a_1, \quad \min v_1 = v_1(\theta_1^*) = a \\ \max v_2 = v_2(\theta_2^*) = b_1, \quad \min v_2 = v_2(0) = b \end{aligned} \quad (3.34)$$

то $v_1(x) > v_2(x)$, $0 \leq x < 90^\circ$.

Таким образом, в случае $0 < x < x_1$ волна первого типа быстрая ($v_1 = v_1$), волна 2-го типа — медленная ($v_2 = v_2$).



Фиг. 3.

На фиг. 3(б) изображены кривые изменения скоростей быстрых и медленных магнитоупругих волн в зависимости от направления движения (на фиг. 3 показан только один квадрант, остальные три получают­ся отражением относительно осей координат; линия m , перпендикулярная радиусу-вектору (r , или r_0), дает положение плоского разрыва, который перемещается в направлении, определяемом углом ψ , через единицу времени после прохождения им начала координат).

Случай 4. $x_1 < x < x_2$. Согласно табл. 2, функция λ_1 вещественна в интервалах

$$0 < \theta < \theta_1^* \quad \text{и} \quad \theta_1^* < \theta < \theta_2^* \quad (3.35)$$

функция λ_2 вещественна в интервале

$$0 < \theta < \theta_2^* \quad (3.36)$$

В силу (3.15) и табл. 3, изменениям θ в промежутках (3.35) и (3.36) соответствуют направления распространения волн

$$0 \leq \alpha_1 < 90^\circ \quad \text{и} \quad 90^\circ > \alpha_1 > \alpha_1(\theta_1^*) > 0 \quad (3.37)$$

$$0 < \alpha_2 < \alpha_2(\theta_2^*) < 90^\circ \quad (3.38)$$

Из (3.27), (3.37) – (3.38) следует, что в каждом направлении из промежутка $0 < \alpha < \alpha(\theta_1^*) < 90^\circ$ распространяются волны обоих типов, а в каждом направлении из промежутка $\alpha(\theta_2^*) \leq \alpha < 90^\circ$ распространяются лишь волны 1-го типа.

Изучим характер изменения скоростей магнитоупругих волн обоих типов в зависимости от направления движения в пределах (3.37) и (3.38), соответственно.

Все рассуждения, приведенные при рассмотрении промежутков $0 < \theta < \theta_1^*$ и $0 < \theta < \theta_2^*$ в случае 2, остаются справедливыми и в этом случае, то есть $v_1^* < 0$, $v_2^* > 0$.

Следовательно, согласно табл. 3 и (3.27), вытекает, что v_1 монотонно убывает от a_1 до a , а v_2 монотонно возрастает от b до $v_2(\theta_2^*)$.

Далее, на промежутке $\theta_1^* < \theta < \theta_2^*$, согласно (3.31), $R_1 > 0$, причем $R_1(\theta_1^*) = 2a^2 b^2 \Lambda^2 (\theta_1^*)^2 > 0$, поэтому в силу (3.30) $v_1 < 0$, то есть v_1 монотонно убывает от значения b_1 до $b < v_1(\theta_2^*) = v_1(\theta_2^*) - 1 \overline{a_1 b} < b_1$.

На основании приведенных рассуждений имеем

$$\text{при } 0 < \theta < \theta_1^* \quad \max v_1 = v_1(0) = a; \quad \min v_2 = v_2(\theta_1^*) = a$$

$$\text{при } \theta_1^* < \theta < \theta_2^* \quad \max v_1 = v_1(\theta_1^*) = b_1; \quad \min v_1 = v_1(\theta_2^*) = 1 \overline{a_1 b}$$

$$\text{при } 0 < \theta < \theta_2^* \quad \max v_2 = v_2(\theta_2^*) = 1 \overline{a_1 b}; \quad \min v_2 = v_2(0) = b$$

Следовательно, в случае 4 быстрые (волны 1-го и 2-го типов) следует разделить на быстрые (v_1) и медленные (v_2) следующим образом:

$$v_1 = v_1 \quad \text{при} \quad 0 < \theta < \theta_1^* \quad (\theta_1^* < \alpha_1(\theta) < 90^\circ)$$

$$v_2 = \begin{cases} v_2 & \text{при } 0 < \theta < \theta_2^* \quad (\theta_2^* < \alpha_2(\theta) < \alpha_2(\theta_2^*)) \\ v_1 & \text{при } \theta_1^* < \theta < \theta_2^* \quad (\alpha_2(\theta_2^*) = \alpha_1(\theta_2^*) < \alpha_1(\theta) < 90^\circ) \end{cases}$$

Таким образом, в случае 4 быстрые волны делятся формулами (3.14) (или (3.6)) со значением v_1 (или λ_1) в первом интервале (3.35), а медленные волны — формулами (3.14) (или (3.6)) со значением v_2 (или λ_2)

во втором интервале (3.35) и со значением α_2 (или λ_2) в интервале (3.36).

На фиг. 3(б) приведен график поляры скоростей быстрых и медленных магнитоупругих волн в зависимости от направления движения при $x_1 < x < x_2$.

Теперь рассмотрим другие случаи.

Когда $x \rightarrow 0$, магнитоупругие волны, соответствующие случаю $0 < x < x_1$, переходят в обычные упругие волны, причем быстрая волна переходит в продольную (со скоростью a), медленная — в поперечную (со скоростью b). График поляры приведен на фиг. 3(а).

Случай 3 ($x = x_1$) является переходным между случаями 2 и 1. Здесь, как и в случае 2, волны 1-ого типа являются быстрыми, а волны 2-ого типа медленными. Причем для медленной волны, распространяющейся вдоль оси x , вследствие $b = b_1^0 = b_2^0 = b^0$ значения v_1 и v_2 равны.

Когда $x \rightarrow x_2$, магнитоупругие волны, соответствующие случаю 4, переходят в волны, соответствующие волнам случая 5. При этом $b_1 \rightarrow a$, то есть в направлении оси x быстрые и медленные волны имеют одинаковую скорость a , равную скорости упругих продольных волн (фиг. 3(а)). Это случай конической рефракции.

Случай 6 аналогичен случаю 4 в том смысле, что разделение магнитоупругих волн на быстрые и медленные происходит одинаковым образом.

Заметим, что при $x < x_2$ в направлении оси x (параллельно Π_0) медленные волны распространяются со скоростью $v_2 = b_1(x)$, которая возрастает от значения b до a при изменении x от 0 до x_2 , а в дальнейшем, то есть при $x > x_2$, медленные волны распространяются с постоянной скоростью $v_2(x) = a = \text{const}$. Для быстрых волн картина их распространения противоположна: пока $x < x_2$ они распространяются с постоянной скоростью $v_1(x) = a = \text{const}$, а когда $x > x_2$ — со скоростью $v_1 = b_1(x) > a$, которая возрастает от значения a до ∞ .

Отсюда следует, что быстрые волны, распространяющиеся в направлении внешнего магнитного поля Π_0 , при $x < x_2$ представляют собой продольные волны, а медленные — поперечные; если же $x > x_2$, то наоборот.

Отсюда следует также, что при $x < x_2$ продольные волны в направлении Π_0 распространяются быстрее, чем поперечные, в случае же $x > x_2$ поперечные волны распространяются быстрее продольных волн.

Это обстоятельство объясняется тем, что при переходе x через x_2 расположение точек $b_1^0(x)$ и $b_2^0(x)$ на оси x меняется на противоположное.

Такую же аналогию можно провести и между случаями 8 и 2. Графики поляры случаев 6 и 8 приведены на фиг. 3(г).

Случаи 7 и 9 можно получить из 8, когда $x \rightarrow x_3$ и $x \rightarrow +\infty$, соответственно, причем в случае 9 скорость быстрой магнитоупругой

волны по любому направлению стремится к бесконечности. На фиг. 3 (г, д) приведены графики поляр, соответствующие случаям 7 и 9.

В направлении, перпендикулярном H_0 , во всех вышерассмотренных случаях быстрые волны представляют собой продольные, скорость которых $a_1(x)$ увеличивается с увеличением скорости Альфвена от 0 до $+\infty$ и медленные волны — поперечные, скорость которых постоянна и равна b .

Итак, магнитоупругие волны, распространяющиеся по направлениям внешнего магнитного поля H_0 и перпендикулярно к нему, представляют собой чисто продольные и поперечные волны. В остальных направлениях векторы смещений обоих типов волн обладают составляющими как параллельными, так и перпендикулярными к направлениям распространения.

С увеличением величины внешнего магнитного поля от 0 до $+\infty$ скорость медленных магнитоупругих волн увеличивается от b до a , а скорость быстрых магнитоупругих волн от a до $+\infty$.

В случае, когда внешнее магнитное поле перпендикулярно к плоскости движения ($H_{01} = H_{02} = 0$), магнитоупругие волны описываются системой уравнений (1.7). Исследование системы (1.7) сводится к исследованию обычных уравнений Ляме заменой $a^2 + x^2 \rightarrow a_1$. Отсюда следует, что в этом случае магнитное поле влияет только на продольные волны, причем их скорость a увеличивается с возрастанием интенсивности магнитного поля.

В пределе, когда $\theta = 0$, при $x = 0$ характер распространения магнитоупругих волн такой же, как и в магнитогазодинамике [14], при этом в формулах (3.21) $x_1 = 0$, $x = a$, $x_2 = \infty = a$.

Отметим также, что в трехмерной задаче существуют вращательные волны (волны Альфвена), когда вектор перемещения параллелен поверхности фронта волны [12]. В плоской задаче эти волны отсутствуют.

Автор благодарит участников семинара «Электродинамика деформируемых сплошных сред» Института механики АН Арм. ССР, М. М. Минасяна и А. А. Хачатряна за обсуждение работы.

Институт механики
АН Армянской ССР

Получена 24 XII 1973

Չ. Ն. ԴԱՎՈՅԱՆ

ԻՆՏԵՆՍԻՎՆԵ ԶԱՂԱՐՄԱՉ ԻՉՈՏՐՈՎ ԵՐԶԱՎԱՅՐԵՐՈՒՄ ԵՄԿՆԵՎԱԾԱԾԱԶԳՈՒԹՅԱՆ
ՍԵՐՎԵՐԻ ՏԱՐԱԾԻՄԱՆ ԶԱՐԲ ԵՆԿՐԻ ՎԵՐԱՅԵՐՅԱԼ

Ա Վ Փ Ո Փ Ն Ն Մ

Մեկրնագ-Սարգիսի կոմպերս շտամոնների մեկնողի հիման վրա գիտարկվում է առանձնահատկ ալիքների տարածման խնդիրը մագնիսական դաշտի առկայությանը իզոտրոպ անվերջ միջավայրում:

Առաջնահերթում են մագնիսաառաձգականության նարթի խնդրի ֆունկցիոնալ ինվարիանտ լուծումները, որոնցով նկարագրվում են Լրիտ ախարի նարթի ալիքները:

Երկրորդ է ալիքների աարածման արագությունների փոփոխության նաադրոստր կախված մագնիսական դաշտի մեծությունից և մագնիսական դաշտի ուղղությունից ու ալիքի նարմալի կաղմած անկյունից:

Նաադրոստրության արդյունքում մագնիսաառաձգական ալիքները բաժանվում են արագի և դանդաղի: Կառուցվում են աչգ ալիքների արագությունների գրաֆիկները:

ON THE PLANE PROBLEM OF PROPAGATION OF MAGNETOELASTIC WAVES IN PERFECTLY CONDUCTING ISOTROPIC MEDIA

Z. N. DANOYAN

S u m m a r y

The problem of propagation elastic waves in infinite isotropic media in the presence of a magnetic field is considered in terms of Smirnov-Sobolev's complex solutions method.

The functional invariant solutions are examined as plane waves of two types in the plane problem of magnetoelasticity.

The variation in velocity of propagation of waves depending both on magnitude of the magnetic field and on angle between the direction of the magnetic field and the normal to the wave is investigated.

According to the results obtained the magnetoelastic waves are divided into fast and slow ones. The graphs of velocities of the waves are presented.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Франк Ф. и Мизел Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. 1937, т. 12.
2. Свекло В. А. Упругие колебания анизотропного тела. Уч. зап. ЛГУ. 1949, вып. 17.
3. Осипов И. О. Отражение и применение плоских упругих волн на границе двух анизотропных сред. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 5, 1961.
4. Осипов И. О. К методу функционально-инвариантных решений для задачи динамической теории упругости анизотропных сред. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 3, 1963.
5. Осипов И. О. К плоской задаче распространения упругих колебаний в анизотропной среде от точечного источника. ИММ, т. 33, вып. 3, 1969.
6. Кейлис-Борок В. И., Мокня А. С. Магнитоупругие волны в граница земного ядра. Изв. АН СССР, сер. геофиз., 1959, № 11.
7. Kalliski S. The propagation of a non-linear loading wave in a magnetic field for a perfect conductor. Proc. Vibr. Probl., 1960, № 5.

8. Косачевский Л. И. Об отражении магнитоэластических волн. ПММ, т. 26, вып. 5, 1962.
9. Косачевский Г. Е., Давыдов З. Н. Распространение упругих волн в аннотированном полупространстве при наличии магнитного поля. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. 25, № 2, 1972.
10. Ахаришвили С. А., Багдасарян Г. Е., Велубекян М. В. К трехмерной задаче магнитоупругих колебаний пластины. ПММ, т. 35, вып. 2, 1971.
11. Седов Н. Т. Распространение магнитоэластических волн напряжения от цилиндрической полости в анизотропной среде. ПМТФ, 1969, № 2.
12. Buzer J. Geometrical magnetoelasticity. Geophys. J. Roy. Astron. Soc., 1971, № 1.
13. Седов Н. Т. Механика сплошной среды. II. т. «Наука», т. 1, 1970.
14. Шерклиф Дж. Курс магнитной гидродинамики. Изд. «Мир», 1967.