ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXVII, № 4, 1974 Механика

Р. М. КИРАКОСЯН

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАСТИНОК ЗА ПРЕДЕЛАМИ УПРУГОСТИ С УЧЕТОМ ПОПЕРЕЧНЫХ СДВИГОВ

Устойчивости пластинок за пределами упругости материала в различных постановках посвящено много исследований ([1—5] и др.).

Для пластинок известно (см. [4], стр. 441), что с экспериментальными данными лучше согласуются теоретические значения критических нагрузок, найденные по деформационной теории пластичности без учета эффекта разгрузки.

В настоящей работе на основе деформационной теории пластичности [1] рассматривается устойчивость пластинок с учетом влияний поперечных сдвигов в условиях продолжающегося нагружения. Аналогичная задача на основе теории течения исследована в работе [5].

1. Рассмотрим пластинку постоянной толщины h, отнесенную к системе прямоугольных декартовых координат xyz. В качестве механических соотношений примем уравнения деформационной теории пластичности несжимаемого материала [1]

$$\sigma_x - \frac{1}{2}\sigma_y = \frac{\sigma_i}{e_i} e_x, \qquad \sigma_y - \frac{1}{2}\sigma_x = \frac{\sigma_i}{e_i} e_y, \qquad \tau_{xy} = \frac{\sigma_i}{3e_i} e_{xy} \tag{1.1}$$

где σ_x, σ_y, τ_{xy} и e_x, e_y, e_{xy} — компоненты напряжения и деформации,

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2}$$
$$e_i = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{e_x^2 + e_x e_y + e_y^2 + \frac{1}{4}e_{xy}^2} \tag{1.2}$$

— интенсивности касательных напряжений и деформации сдвига.

Пусть в пластинке, которая деформирована за пределами упругости, реализовано безмоментное напряженное состояние

$$\sigma_x, \quad \sigma_y, \quad \tau_{xy} \tag{1.3}$$

При выпучивании напряжения в пластинке получают бесконечно малые приращения $\delta\sigma_x$, $\delta\sigma_y$, $\delta\tau_{xy}$, $\delta\sigma_{xz}$, $\delta\sigma_{yz}$. Принимая гипотезу непрерывного нагружения ([7, 8]), согласно которой искривление пластинки возможно в условиях возрастания нагрузки, обеспечивающих нагружение во всех ее точках, с помощью (1.1) для вариаций $\delta\sigma_x$, $\delta\sigma_y$ и $\delta\tau_{xy}$ получим

$$\begin{aligned}\delta\sigma_x &= a_{11}\delta e_x + a_{12}\delta e_y + a_{13}\delta e_{xy}\\ \delta\sigma_y &= a_{22}\delta e_y + a_{12}\delta e_x + a_{23}\delta e_{xy}\\ \delta\tau_{xy} &= a_{33}\delta e_{xy} + a_{13}\delta e_x + a_{23}\delta e_y\end{aligned} \tag{1.4}$$

где

$$\begin{aligned}a_{11} &= \frac{4}{9e_i}\left[3\sigma_i + (2e_x + e_y)^2\frac{d}{de_i}\left(\frac{\sigma_i}{e_i}\right)\right]\\ a_{22} &= \frac{4}{9e_i}\left[3\sigma_i + (2e_y + e_x)^2\frac{d}{de_i}\left(\frac{\sigma_i}{e_i}\right)\right]\\ a_{33} &= \frac{1}{9e_i}\left[3\sigma_i + e_{xy}^2\frac{d}{de_i}\left(\frac{\sigma_i}{e_i}\right)\right]\\ a_{12} &= \frac{2}{9e_i}\left[3\sigma_i + 2(2e_x + e_y)(2e_y + e_x)\frac{d}{de_i}\left(\frac{\sigma_i}{e_i}\right)\right]\\ a_{13} &= \frac{2}{9e_i}e_{xy}(2e_x + e_y)\frac{d}{de_i}\left(\frac{\sigma_i}{e_i}\right)\\ a_{23} &= \frac{2}{9e_i}e_{xy}(2e_y + e_x)\frac{d}{de_i}\left(\frac{\sigma_i}{e_i}\right)\end{aligned} \tag{1.5}$$

Будем исходить из уточненной теории пластинок С. А. Амбарцумяна [6], учитывающей влияние деформации поперечных сдвигов. В условиях отсутствия поверхностных нагрузок для тангенциальных напряжений по этой теории имеем

$$\tau_{xz} = f(z)\,\varphi(x, y), \qquad \tau_{yz} = f(z)\,\psi(x, y) \tag{1.6}$$

где $f(z)$ — функция, характеризующая закон изменения касательных напряжений по толщине пластинки, $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ — искомые функции.

Связь между касательными напряжениями (1.6) и соответствующими деформациями поперечных сдвигов пластинки имеет вид [1]

$$\tau_{xz} = \frac{\sigma_i}{3e_i}e_{xz}, \qquad \tau_{yz} = \frac{\sigma_i}{3e_i}e_{yz} \tag{1.7}$$

Пользуясь геометрическими соотношениями

$$e_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}, \qquad e_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \tag{1.8}$$

где u_x, u_y, u_z — перемещения по направлению осей координат x, y, z, соответственно, с учетом (1.6) и (1.7) получим

$$\frac{\partial \delta u_x}{\partial z} = -\frac{\partial \delta u_z}{\partial x} + \frac{3e_i}{\sigma_i} f(z)\,\varphi(x, y)$$
$$\frac{\partial \delta u_y}{\partial z} = -\frac{\partial \delta u_z}{\partial y} + \frac{3e_i}{\sigma_i} f(z)\,\psi(x, y) \tag{1.9}$$

Пренебрегая изменением нормальных перемещений точек пластинки по ее толщине и деформированием срединной плоскости ($u=v=0$), из (1.9) путем интегрирования по z находим

$$\delta u_x = -z\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{3e_i}{\sigma_i} J_0(z)\,\varphi(x, y)$$
$$\delta u_y = -z\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{3e_i}{\sigma_i} J_0(z)\,\psi(x, y) \tag{1.10}$$

Здесь

$$J_0(z) = \int_0^z f(z)\,dz \tag{1.11}$$

w — прогиб пластинки.

Используя известные геометрические соотношения, с учетом (1.10) для вариаций деформаций получим

$$\delta e_x = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 3J_0(z)\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi\frac{e_i}{\sigma_i}\right)$$
$$\delta e_y = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 3J_0(z)\frac{\partial}{\partial y}\left(\psi\frac{e_i}{\sigma_i}\right) \tag{1.12}$$
$$\delta e_{xy} = -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} + 3J_0(z)\left|\frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi\frac{e_i}{\sigma_i}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\psi\frac{e_i}{\sigma_i}\right)\right|$$

Внеся (1.12) в (1.4) и присоединяя к ним (1.6), для приращений напряжений выпученной пластинки находим

$$\delta\sigma_x = -z\left(a_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2a_{33}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right) + 3J_0(z)\left\{a_{11}\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi\frac{e_i}{\sigma_i}\right) + \right.$$
$$\left. + a_{12}\frac{\partial}{\partial y}\left(\psi\frac{e_i}{\sigma_i}\right) + a_{33}\left|\frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi\frac{e_i}{\sigma_i}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\psi\frac{e_i}{\sigma_i}\right)\right|\right\} \tag{1.13}$$
$$\delta\sigma_y = -z\left(a_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + a_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2a_{23}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right) + 3J_0(z)\left\{a_{22}\frac{\partial}{\partial y}\left(\psi\frac{e_i}{\sigma_i}\right) + \right.$$
$$\left. + a_{12}\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi\frac{e_i}{\sigma_i}\right) + a_{23}\left|\frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi\frac{e_i}{\sigma_i}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\psi\frac{e_i}{\sigma_i}\right)\right|\right\}$$

$$\delta\tau_{xy} = -z\left(a_{13}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a_{23}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2a_{33}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right) + 3J_0(z)\left\{a_{13}\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi\frac{e_i}{\sigma_i}\right) + \right.$$

$$\left. + a_{23}\frac{\partial}{\partial y}\left(\psi\frac{e_i}{\sigma_i}\right) + a_{33}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi\frac{e_i}{\sigma_i}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\psi\frac{e_i}{\sigma_i}\right)\right]\right\} \tag{1.13}$$

$$\tau_{xz} = f(z)\varphi(x, y), \qquad \tau_{yz} = f(z)\psi(x, y)$$

Поступая как обычно, для приращений моментов и поперечных сил получим

$$\delta M_x = -\frac{h^3}{12}\left(a_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2a_{13}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right) +$$

$$+ 3J_1\left\{a_{11}\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi\frac{e_i}{\sigma_i}\right) + a_{12}\frac{\partial}{\partial y}\left(\psi\frac{e_i}{\sigma_i}\right) + a_{13}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi\frac{e_i}{\sigma_i}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\psi\frac{e_i}{\sigma_i}\right)\right]\right\}$$

$$\delta M_y = -\frac{h^3}{12}\left(a_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + a_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2a_{23}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right) + \tag{1.14}$$

$$+ 3J_1\left\{a_{22}\frac{\partial}{\partial y}\left(\psi\frac{e_i}{\sigma_i}\right) + a_{12}\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi\frac{e_i}{\sigma_i}\right) + a_{23}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi\frac{e_i}{\sigma_i}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\psi\frac{e_i}{\sigma_i}\right)\right]\right\}$$

$$\delta H = -\frac{h^3}{12}\left(a_{13}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a_{23}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2a_{33}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right) +$$

$$+ 3J_1\left\{a_{13}\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi\frac{e_i}{\sigma_i}\right) + a_{23}\frac{\partial}{\partial y}\left(\psi\frac{e_i}{\sigma_i}\right) + a_{33}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi\frac{e_i}{\sigma_i}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\psi\frac{e_i}{\sigma_i}\right)\right]\right\}$$

$$N_1 = J_2\varphi(x, y), \qquad N_2 = J_2\psi(x, y)$$

где

$$J_1 = \int_{-h/2}^{h/2} zJ_0(z)\,dz, \qquad J_2 = \int_{-h/2}^{h/2} f(z)\,dz \tag{1.15}$$

Уравнения равновесия дифференциального элемента пластинки после выпучивания имеют вид [5]

$$\frac{\partial \delta M_x}{\partial x} + \frac{\partial \delta H}{\partial y} = N_1, \qquad \frac{\partial \delta M_y}{\partial y} + \frac{\partial \delta H}{\partial x} = N_2$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + T_x^0\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T_y^0\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2S^0\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \tag{1.16}$$

где T_x^0, T_y^0, S^0 — внутренние тангенциальные силы начального безмоментного состояния —

$$T_x^0 = h\tau_x, \qquad T_y^0 = h\tau_y, \qquad S_0 = h\tau_{xy} \tag{1.17}$$

Подставляя (1.14) в (1.16), получим следующую систему относительно функций $w(x, y)$, $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(a_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+a_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+2a_{13}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)-\frac{36J_1}{h^3}\frac{\partial}{\partial x}\left\{a_{11}\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi\frac{e_i}{\sigma_i}\right)+\right.$$

$$+a_{12}\frac{\partial}{\partial y}\left(\psi\frac{e_i}{\sigma_i}\right)+a_{13}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi\frac{e_i}{\sigma_i}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi\frac{e_i}{\sigma_i}\right)\right]\Bigg\}+\frac{\partial}{\partial y}\left(a_{13}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\right.$$

$$+a_{23}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+2a_{33}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\Bigg)-\frac{36J_1}{h^3}\frac{\partial}{\partial y}\left\{a_{13}\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi\frac{e_i}{\sigma_i}\right)+a_{23}\frac{\partial}{\partial y}\left(\psi\frac{e_i}{\sigma_i}\right)+\right.$$

$$\left.+a_{33}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi\frac{e_i}{\sigma_i}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi\frac{e_i}{\sigma_i}\right)\right]\right\}+\frac{12J_2}{h^3}\varphi=0 \tag{1.18}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(a_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+a_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+2a_{23}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)-\frac{36J_1}{h^3}\frac{\partial}{\partial y}\left\{a_{22}\frac{\partial}{\partial y}\left(\psi\frac{e_i}{\sigma_i}\right)+\right.$$

$$+a_{12}\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi\frac{e_i}{\sigma_i}\right)+a_{23}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi\frac{e_i}{\sigma_i}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi\frac{e_i}{\sigma_i}\right)\right]\Bigg\}+\frac{\partial}{\partial x}\left(a_{13}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\right.$$

$$+a_{23}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+2a_{33}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\Bigg)-\frac{36J_1}{h^3}\frac{\partial}{\partial x}\left\{a_{13}\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi\frac{e_i}{\sigma_i}\right)+a_{23}\frac{\partial}{\partial y}\left(\psi\frac{e_i}{\sigma_i}\right)+\right.$$

$$\left.+a_{33}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi\frac{e_i}{\sigma_i}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi\frac{e_i}{\sigma_i}\right)\right]\right\}+\frac{12J_2}{h^3}\psi=0$$

$$J_0\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)+T_x^0\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+T_y^0\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+2S^0\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}=0$$

Это система устойчивости пластинки за пределами упругости материала.

Пренебрегая влиянием деформаций поперечных сдвигов, вместо системы (1.18) получим уравнение устойчивости неупругой пластинки в классической постановке.

2. Рассмотрим задачу об устойчивости шарнирно опертой по всему контуру ($x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$) прямоугольной пластинки, сжатой в своей плоскости по направлениям x и y давлениями p и kp, соответственно. Для простоты ограничимся случаем линейного упрочнения материала [1]

$$\sigma_i=3G\left[(1-\lambda)e_i+\lambda e_s\right],\qquad \lambda=1-\frac{1}{3G}\frac{d\sigma_i}{de_i}=\text{const} \tag{2.1}$$

где G – модуль сдвига, e_s – предел упругих деформаций материала.

Полагая

$$T_x^0=-ph,\qquad T_y^0=-kph,\qquad S^0=0 \tag{2.2}$$

и используя (1.1), (1.2) и (2.1), находим

$$\sigma_1 = \varkappa p, \qquad e_1 = \frac{\varkappa p - \lambda p}{3G(1-\lambda)}, \qquad \varkappa = 1\sqrt{1-k+k^2}, \qquad p = 3Ge,$$

(2.3)

$$2e_x + e_y = -\frac{\varkappa p - \lambda p}{2\varkappa G(1-\lambda)}, \qquad 2e_y + e_x = -k\frac{\varkappa p - \lambda p}{2\varkappa G(1-\lambda)}, \qquad e_{xy} = 0$$

Из (1.5) с учетом (2.3) для коэффициентов a_{ij} получим

$$a_{11} = A\frac{4\varkappa^3 p - 3B}{\varkappa p - B}, \qquad a_{22} = A\frac{4\varkappa^3 p - 3k^2 B}{\varkappa p - B}, \qquad a_{33} = A\frac{\varkappa^3 p}{\varkappa p - B}$$

$$a_{12} = A\frac{2\varkappa^3 p - 3kB}{\varkappa p - B}, \qquad a_{13} = a_{23} = 0 \tag{2.4}$$

$$A = \frac{G(1-\lambda)}{\varkappa^3}, \qquad B = \lambda p, \quad \frac{e_1}{\sigma_1} = \frac{1}{3a_{33}}$$

Имея в виду, что коэффициенты a_{ij} не зависят от координат, из (1.18) получим систему устойчивости рассматриваемой шарнирно опертой пластинки

$$\frac{ph}{J_1}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$$

$$a_{11}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (a_{12} + 2a_{33})\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - \frac{12J_1}{h^3}\left(\frac{a_{11}}{a_{33}}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right) +$$

$$+ \frac{12J_2}{h^3}\psi - \frac{12J_1}{h^3}\left(1 + \frac{a_{12}}{a_{33}}\right)\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0 \tag{2.5}$$

$$a_{22}\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (a_{12} + 2a_{33})\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - \frac{12J_1}{h^3}\left(1 + \frac{a_{12}}{a_{33}}\right)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} -$$

$$- \frac{12J_1}{h^3}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{a_{22}}{a_{33}}\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right) + \frac{12J_2}{h^3}\psi = 0$$

Граничные условия шарнирного опирания пластинки с учетом (1.10) и (1.14) представим в виде

при $x = 0, \quad x = a$

$$w = 0, \quad u_y \text{ или } \varphi = 0$$

$$M_x = -\frac{h^3}{12}\left(a_{11}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + \frac{J_1}{a_{33}}\left(a_{11}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + a_{12}\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) = 0 \tag{2.6}$$

при $y = 0, \quad y = b$

$$w = 0, \quad u_x \text{ или } \psi = 0$$

$$M_y = -\frac{h^3}{12}\left(a_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + a_{12}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + \frac{J_1}{a_{33}}\left(a_{22}\frac{\partial \psi}{\partial y} + a_{12}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) = 0$$

Соблюдая эти граничные условия, решение системы (2.5) ищем в форме

$$w(x, y) = C_w \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$\varphi_1(x, y) = C_1 \cos\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \tag{2.7}$$

$$\varphi_2(x, y) = C_2 \sin\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{b}$$

где C_w, C_1, C_2 — постоянные, m и n — целые числа, показывающие число полуволн искривленной пластинки. Подставляя (2.7) в (2.5), получим следующую систему однородных алгебраических уравнений относительно неизвестных постоянных:

$$ph\left(\frac{m^2}{a^2} + k\frac{n^2}{b^2}\right)C_w - \frac{J_1 m}{\pi a} C_1 - \frac{J_2 n}{\pi b} C_2 = 0$$

$$\frac{\pi m}{a}\left[a_{11}\frac{m^2}{a^2} + (a_{12}+2a_{33})\frac{n^2}{b^2}\right]C_w - \frac{12}{h^3}\left[\frac{J_2}{\pi^2} + J_1\left(\frac{n^2}{b^2} + \frac{a_{11}}{a_{33}}\frac{m^2}{a^2}\right)\right]C_1 -$$

$$-\frac{12}{h^3} J_1\left(1 + \frac{a_{12}}{a_{33}}\right)\frac{mn}{ab} C_2 = 0 \tag{2.8}$$

$$\frac{\pi n}{b}\left[a_{22}\frac{n^2}{b^2} + (a_{12}+2a_{33})\frac{m^2}{a^2}\right]C_w - \frac{12}{h^3} J_1\left(1 + \frac{a_{12}}{a_{33}}\right)\frac{mn}{ab} C_1 -$$

$$-\frac{12}{h^3}\left[\frac{J_2}{\pi^2} + J_1\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{a_{22}}{a_{33}}\frac{n^2}{b^2}\right)\right]C_2 = 0$$

Приравнивая нулю определитель этой системы (условие существования нетривиального решения), с учетом (2.4) для критического давления получим квадратное уравнение

$$A_1 p^2 - A_2 p + A_3 = 0 \tag{2.9}$$

где обозначено

$$A_1 = \left[\frac{1}{\pi^2} + \frac{J_1}{J_2}\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)\right]\left[\frac{1}{\pi^2} + 4\frac{J_1}{J_2}\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)\right]$$

$$A_2 = \frac{3B}{\pi^3}\frac{J_1}{J_2}\left\{k^2\frac{n^2}{b^2}\left[\frac{1}{\pi^2} + \frac{J_1}{J_2}\left(4\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)\right] + \right.$$

$$+\frac{m^2}{a^2}\left[\frac{1}{\pi^2} + \frac{J_1}{J_2}\left(\frac{m^2}{a^2} + 4\frac{n^2}{b^2}\right)\right] - \left.6\frac{J_1}{J_2} k\frac{m^2 n^2}{a^2 b^2}\right\} + \tag{2.10}$$

$$+\frac{B}{\pi}\left[\frac{1}{\pi^2} + \frac{J_1}{J_2}\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)\right]\left[\frac{1}{\pi^2} + 4\frac{J_1}{J_2}\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)\right] +$$

$$+\frac{1}{3}Ah^2\varkappa^2\frac{\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2}{\frac{m^2}{a^2}+k\frac{n^2}{b^2}}\left[\frac{1}{\pi^2}+\frac{J_1}{J_2}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)\right]$$

$$A_3=\frac{ABh^2}{\varkappa}\left\{\frac{1}{4}\left(\frac{m^2}{a^2}+k\frac{n^2}{b^2}\right)\left[\frac{1}{\pi^2}+\frac{J_1}{J_2}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{J_1}{J_2}(1-k)^2\frac{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}}{\frac{m^2}{a^2}+k\frac{n^2}{b^2}}\right\}+3\frac{J_1}{J_2}\frac{B^2}{\varkappa^4}\left\{k^2\frac{n^2}{b^2}\left[\frac{1}{\pi^2}+\frac{J_1}{J_2}\left(4\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)\right]+\right. \tag{2.10}$$

$$\left.+\frac{m^2}{a^2}\left[\frac{1}{\pi^2}+\frac{J_1}{J_2}\left(\frac{m^2}{a^2}+4\frac{n^2}{b^2}\right)\right]-6\frac{J_1}{J_2}k\frac{m^2n^2}{a^2b^2}\right\}$$

Предположим, что пластинка теряет устойчивость в пределах упругости ($\lambda=0$). Тогда с учетом (2.1), (2.4) и (2.10) имеем

$$B=0,\qquad A=\frac{G}{\varkappa^2},\qquad A_3=0 \tag{2.11}$$

Соответствующее значение критического давления p_e из (2.9) определится однозначно

$$p_e=\frac{A_2}{A_1}=\frac{Gh^2}{3}\frac{\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2}{\frac{m^2}{a^2}+k\frac{n^2}{b^2}}\frac{1}{\frac{1}{\pi^2}+4\frac{J_1}{J_2}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)} \tag{2.12}$$

В дальнейшем будем считать, что

$$\sigma\big|_{p=p_e}=\varkappa p_e>\sigma_s=3Ge_s \tag{2.13}$$

то есть пластинка теряет устойчивость за пределами упругости. С учетом (2.13) и (2.4) для этого случая имеем

$$p_{\text{кр}}>\frac{\sigma_s}{\varkappa}>\frac{B}{\varkappa}=\frac{\lambda\sigma_s}{\varkappa} \tag{2.14}$$

С учетом (2.10) для значения функции

$$\Phi(p)=A_1p^2-A_2p+A_3 \tag{2.15}$$

в точке $p=\frac{B}{\varkappa}$ получим

$$\Phi\left(\frac{B}{\varkappa}\right)=-\frac{1}{12\varkappa}\frac{ABh^2}{\frac{m^2}{a^2}+k\frac{n^2}{b^2}}\left\{\frac{1}{\varkappa^2}\left|\frac{m^4}{a^4}(1-2k)^2+\frac{n^4}{b^4}(2-k)^2+\right.\right.$$

$$+2\frac{m^2n^2}{a^2b^2}(4-7k+4k^2)\Bigg|+\frac{J_1}{J_2}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)\left|\frac{m^2}{a^2}-2\frac{n^2}{b^2}+\right.$$

$$\left.\left.+k\left(\frac{n^2}{b^2}-2\frac{m^2}{a^2}\right)\right|^2\right\}<0 \qquad (2.16)$$

Так как функция $\Phi(p)$ отрицательные значения принимает только на отрезке, ограниченном корнями уравнения (2.9), то в силу (2.16) заключаем, что значение $p=\frac{B}{\varkappa}$ находится между корнями этого уравнения, то есть

$$p_1<\frac{B}{\varkappa}<p_2 \qquad (2.17)$$

Очевидно, что первый корень уравнения (2.9) p_1 не может быть решением задачи, так как для него нарушается условие (2.14).

Таким образом, критическое значение давления $p_{кр}$ определится большим корнем уравнения (2.9)

$$p_{кр}=p_2=\frac{A_2+\sqrt{A_2^2-4A_1A_3}}{2A_1} \qquad (2.18)$$

Введя понятие секущего модуля

$$E_c=\frac{\sigma_i}{e_i}=3A\varkappa^2\frac{p}{\varkappa p-B} \qquad (2.19)$$

квадратному уравнению (2.9) можно придать формально линейный вид и для критического значения давления записать

$$p_{кр}=\frac{1}{A_2BE_c}\left[A_3\varkappa(3A\varkappa^2-E_c)\right] \qquad (2.20)$$

Однако, выражение (2.20) не является окончательным, так как секущий модуль E_c зависит от неизвестного $p_{кр}$. В этом смысле предпочтение следует отдать выражению (2.18).

Отбрасывая из (2.10) члены, содержащие $\frac{J_1}{J_2}$, получим выражения коэффициентов A_i по классической постановке задачи устойчивости

$$A_1=1, \qquad A_2=\frac{B}{\varkappa}+\frac{\varkappa^2}{3}Ah^2\varkappa^2\frac{\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2}{\frac{m^2}{a^2}-k\frac{n^2}{b^2}} \qquad (2.21)$$

$$A_3 = \frac{\pi^2}{4\varkappa} ABh^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + k \frac{n^2}{b^2} \right) \tag{2.21}$$

Рассмотрим частные случаи.

а) Для квадратной пластинки ($a=b$), сжимающейся со всех сторон равномерным давлением $p(k=\varkappa=1)$, из (2.10) получим

$$A_1 = 1 + 8 \frac{J_1}{J_2} \frac{m^2\pi^2}{a^2}, \qquad A_2 = B + \frac{2}{3} \left(Ah^2 + 21 \frac{J_1}{J_2} B \right) \frac{m^2\pi^2}{a^2}$$

$$A_3 = \frac{1}{2} B \left(Ah^2 + 12 \frac{J_1}{J_2} B \right) \frac{m^2\pi^2}{a^2} \tag{2.22}$$

б) Полагая в (2.10) $k=0$, $\varkappa=1$ и переходя к пределу при $b \to \infty$, получим выражения коэффициентов A_i для шарнирно опертой бесконечной полосы, сжимающейся равномерным давлением p

$$A_1 = 1 + 4 \frac{J_1}{J_2} \frac{m^2\pi^2}{a^2}, \qquad A_2 = B + \frac{1}{3} \left(Ah^2 + 21 \frac{J_1}{J_2} B \right) \frac{m^2\pi^2}{a^2}$$

$$A_3 = \frac{1}{4} B \left(Ah^2 + 12 \frac{J_1}{J_2} B \right) \frac{m^2\pi^2}{a^2} \tag{2.23}$$

3. Рассмотрим численный пример. Имея в виду, что произвол в разумном выборе закона распределения касательных напряжений по толщине пластинки $f(z)$ не может внести недопустимых погрешностей [6], положим

$$f(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \tag{3.1}$$

С учетом (1.11) и (1.15) имеем

$$\frac{J_1}{J_2} = \frac{h^2}{10} \tag{3.2}$$

Пусть

$$\frac{h}{a} = \frac{1}{5}, \qquad \nu = \frac{1}{6}, \qquad G = 7 \cdot 10^3 \ кг/см^2, \qquad \sigma_* = 2 \cdot 10^3 \ кг/см^2 \tag{3.3}$$

В табл. 1 представлены результаты вычисления значений критического давления для бесконечной полосы, сжимающейся в направлении коротких сторон. С целью сравнения в последних трех столбцах таблицы приводятся значения критического давления по теории течения [5], подсчитанные для этого же случая (3.3).

Таблица 1

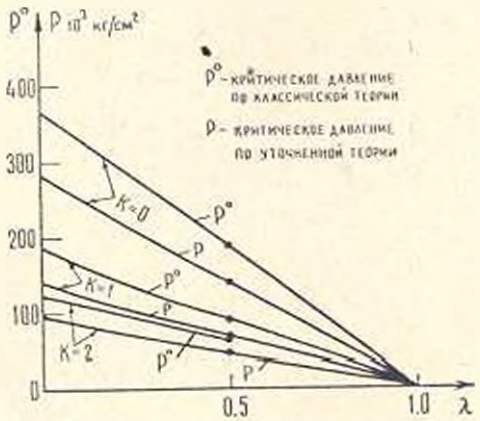
m	$p_{\text{д}}^{0}$ в 10^3 кг/см²	$p_{\text{д}}$ в 10^3 кг/см²	$p_{\text{д}}^{0}/p_{\text{д}}$	$p_{\text{т}}^{0}$ в 10^3 кг/см²	$p_{\text{т}}$ в 10^3 кг/см²	$p_{\text{т}}^{0}/p_{\text{т}}$
1	76.769	66.334	1.157	80.524	70.759	1.138
2	306.827	188.135	1.631	322.096	207.536	1.552

Из этой таблицы видно, что относительные поправки, вносимые со стороны уточненной теории пластинок [6], для обеих теорий пластичности примерно одинаковы. Разница между абсолютными значениями критического давления обусловлена характерами теории пластичности и существенно не зависит от учета влияния деформаций поперечного сдвига. Как и обычно, здесь тоже теория течения дает завышенные значения для критического давления.

Рассмотрим численный пример шарнирно опертой квадратной пластинки, сжимающейся давлениями p и kp. Варьируя значения параметров λ и k, приходим к результатам, представленным в табл. 2.

Таблица 2

k \ λ	0			0.5			1.0		
	p^{0} в 10^3 кг/см²	p	p^{0}/p	p^{0}	p	p^{0}/p	p^{0}	p	p^{0}/p
0	368.17	280.03	1.32	155.63	140.87	1.31	2.00	2.00	1.00
1	184.23	140.01	1.32	92.37	70.44	1.31	2.00	2.00	1.00
2	122.82	93.34	1.32	61.66	47.00	1.31	1.15	1.15	1.00



Фиг. 1.

С помощью этих данных на фиг. 1 построены графики изменения критических давлений и их отношений в зависимости от параметра λ, характеризующего пластические свойства материала. Из графиков замечаем, что наибольшее расхождение между значениями критических

давлений по классической и уточненной теориям имеет место для линейно упругого материала $\lambda=0$. С увеличением пластических свойств это расхождение монотонно убывает и при стремлении материала к идеально-пластическому (при $\lambda \to 1$) оно полностью исчезает.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 28 XI 1973

Ռ. Մ. ԿԻՐԱԿՈՍՅԱՆ

ՍԱԼԵՐԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՍԱՀՄԱՆԻՑ ԱՅՆ ԿՈՂՄ ԸՆԴԼԱՅՆԱԿԱՆ ՍԱՀՔԻ ՀԱՇՎԱՌՄԱՄԲ

Ա մ փ ո փ ու մ

Պլաստիկության դեֆորմացիոն տեսության հիման վրա շարունակվող բեռնավորման պայմաններում դիտարկվում է սալերի կայունությունը ընդլայնական սահքի հաշվառմամբ։ Ստացված է սալերի կայունության հավասարումների սիստեմը և բերվում է վերջինիս լուծումը մի քանի մասնավոր դեպքերի համար։

ON STABILITY OF PLATES OUTSIDE ELASTICITY WITH DUE REGARD FOR TRANSVERSAL DISPLACEMENTS

R. M. KIRAKOSIAN

S u m m a r y

The stability of plates outside elasticity with due regard for transversal displacements in conditions of continued loading in terms of deformation theory of plasticity is considered. A numerical example is presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильюшин А. А.* Пластичность. Гостехиздат, М.—Л., 1948.
2. *Качанов Л. М.* Основы теории пластичности. Физматгиз, М., 1969.
3. *Хилл Р.* Устойчивость упруго-пластических конструкций. Механика, № 1, 1965.
4. *Вольмир А. С.* Устойчивость деформируемых систем. Физматгиз, М., 1967.
5. *Амбарцумян С. А.* Об устойчивости неупругих пластинок с учетом деформаций поперечных сдвигов. ПММ, т. XXVII, в. 4, 1963.
6. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных пластин. Физматгиз, М., 1967.
7. *Shanley F. R.* Inelastic column theory. Journ. of the Aeronautical Sciences, v. XIV, № 5, 1947.
8. *Работнов Ю. Н., Шестериков С. А.* Устойчивость стержней и пластинок в условиях ползучести. ПММ, т. XXI, в. 3, 1957.