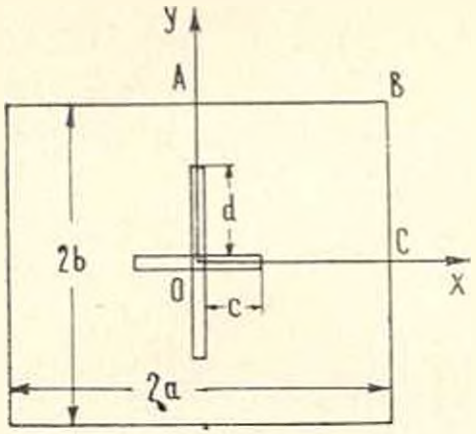
ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXVII, № 4, 1974 Механика

А. А. БАБЛОЯН, А. М. МКРТЧЯН

РАВНОВЕСИЕ ПРЯМОУГОЛЬНИКА, ОСЛАБЛЕННОГО КРЕСТООБРАЗНЫМИ РАЗРЕЗАМИ

1. Решается плоская задача теории упругости для прямоугольника, ослабленного симметрично расположенным внутренним крестообразным разрезом (фиг. 1), когда на внешней границе прямоугольника заданы напряжения. Для простоты выкладок принимается, что касательные напряжения по всему контуру отсутствуют



Фиг. 1

В силу симметрии задача решается только для области ABCO, при этом удовлетворяются условия симметрии

$$\begin{aligned} &\tau_{xy}(0,\ y) = u(0,\ y) = 0 \qquad \text{при} \quad (d \leqslant y \leqslant b) \\ &\tau_{xy}(x,\ 0) = v(x,\ 0) = 0 \qquad \text{при} \quad (c \leqslant x \leqslant a) \end{aligned} \tag{1.1}$$

Граничные условия на остальных частях области ABCO задаются в следующем виде:

$$\sigma_x(a,\ y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1} a_k \cos \beta_k y, \qquad \sigma_y(x,\ b) = \frac{b_0}{2} + \sum_{k=1} b_k \cos \alpha_k x$$

$$\sigma_x(0,\ y) = f_1(y) \quad (0 \leqslant y \leqslant d), \quad \sigma_y(x,\ 0) = f_2(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant c) \tag{1.2}$$

$$\tau_{xy}(x,\ y)\big|_l = 0$$

Задача решается по методу, использованному в работах [1—5].

Напряжения и перемещения определяются через бигармоническую функцию Эри по формулам

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \qquad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \qquad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$$

$$Ev = \int \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} dy - \nu \frac{\partial \Phi}{\partial y} + Ev_0 \tag{1.3}$$

$$Eu = \int \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} dx - \nu \frac{\partial \Phi}{\partial x} + Eu_0$$

Здесь E, ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона соответственно, v_0, u_0 — постоянные интегрирования.

Функцию напряжений ищем в виде

$$\Phi(x, y) = c_1 x^2 + \frac{b}{a} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{-2} [\lambda X_k^{(1)} f_k^{(1)}(y) - Y_k^{(1)} f_k^{(2)}(y)] \cos \alpha_k x +$$

$$+ c_2 y^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^{-2} [\lambda X_k^{(2)} f_k^{(2)}(x) - Y_k^{(2)} f_k^{(2)}(x)] \cos \beta_k y \tag{1.4}$$

$$\alpha_k = \frac{k\pi}{a}; \qquad \beta_k = \frac{k\pi}{b}$$

где

$$f_k^{(1)}(y) = \frac{1}{\operatorname{sh} \alpha_k b} \left| \operatorname{ch} \alpha_k (b - y) + \frac{\alpha_k b \operatorname{ch} \alpha_k y}{\operatorname{sh} \alpha_k b} - \alpha_k y \operatorname{sh} \alpha_k (b - y) \right|$$

$$f_k^{(2)}(y) = f_k^{(1)}(b - y)$$

а $f_k^{(2)}(x)$ и $f_k^{(1)}(x)$ определяются этими же формулами заменой

$$y \to x, \qquad \alpha_k \to \beta_k, \qquad b \to a$$

λ — произвольная постоянная.

При таком выборе функции $\Phi(x, y)$ условия симметрии и равенства нулю тангенциальных напряжений удовлетворяются автоматически.

Удовлетворяя однородным условиям (1.2), получим бесконечные алгебраические уравнения

$$Y_k^{(1)}(1 + M_k^{(1)}) - \lambda X_k^{(1)} N_k^{(1)} = \sum_{p=1}^{\infty} [a_{pk}^{(1)} X_p^{(2)} + a_{pk}^{(2)} Y_p^{(2)}] + b_k \frac{a}{b}$$

$$Y_k^{(2)}(1 + M_k^{(2)}) - \lambda X_k^{(2)} N_k^{(2)} = \sum_{p=1}^{\infty} [b_{kp}^{(1)} X_p^{(1)} + b_{pk}^{(2)} Y_p^{(1)}] + a_k \tag{1.5}$$

и условия для определения c_1 и c_2

$$c_1 = \frac{b_0}{4}, \qquad c_2 = \frac{a_0}{4}$$

где

$$a_{pk}^{(1)} = \frac{4k\alpha_k^2\beta_p(-1)^p}{b(\alpha_k^2+\beta_p^2)^2}, \qquad a_{pk}^{(2)} = (-1)^{p-1}a_{pk}^{(1)}k^{-1}$$

$$b_{pk}^{(1)} = \frac{4k\beta_k^2\alpha_p(-1)^p}{a(\alpha_p^2+\beta_k^2)^2}, \qquad b_{pk}^{(2)} = (-1)^{p-1}b_{pk}^{(1)}k^{-1}$$

$$M_k^{(1)} = \frac{e^{-\alpha_k b}}{\operatorname{sh}\alpha_k b} + \frac{\alpha_k b}{\operatorname{sh}^2\alpha_k b}, \qquad N_k^{(1)} = \frac{1-\alpha_k b\operatorname{cth}\alpha_k b}{\operatorname{sh}\alpha_k b}$$

$$M_k^{(2)} = \frac{e^{-\beta_k a}}{\operatorname{sh}\beta_k a} + \frac{\beta_k a}{\operatorname{sh}^2\beta_k a}, \qquad N_k^{(2)} = \frac{1+\beta_k a\operatorname{cth}\beta_k a}{\operatorname{sh}\beta_k a}$$

Смешанные условия (1.1) и (1.2) приводят к парным уравнениям

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[X_k^{(2)} + M_k^{(2)}X_k^{(2)} - k^{-1}N_k^{(2)}Y_k^{(2)}\right]\cos\beta_k y = 2c_2 - f_1(y) +$$

$$+\frac{b}{a}\sum_{k=1}^{\infty}\left[Y_k^{(1)}\varphi_{k\frac{b}{a}}(y) - kX_k^{(1)}\varphi_{k\frac{b}{a}}(b-y)\right], \qquad (0<y<d)$$

$$X_0^{(2)} + \sum_{k=1}^{\infty}k^{-1}X_k^{(2)}\cos\beta_k y = 0 \qquad (d<y<b) \tag{1.6}$$

и аналогичное уравнение для $X_0^{(1)}$. Здесь

$$\varphi_{k\frac{b}{a}}(y) = \frac{1}{\operatorname{sh}\alpha_k b}\left[\operatorname{ch}\alpha_k y - \frac{\alpha_k b\operatorname{ch}\alpha_k(b-y)}{\operatorname{sh}\alpha_k b} - \alpha_k(b-y)\operatorname{sh}\alpha_k y\right]$$

$$X_0^{(2)} = \frac{Ea_0}{2kb}$$

Использованием результатов [2—4] парные уравнения приводятся к бесконечным уравнениям

$$X_k^{(1)} = \frac{a}{kb}\sum_{p=1}^{\infty}\left[kC_{pk}^{(2)}X_p^{(2)} + \frac{kb}{a}C_{pk}^{(1)}X_p^{(1)} + \frac{b}{a}d_{pk}^{(1)}Y_p^{(1)} + d_{pk}^{(2)}Y_p^{(2)}\right] + \frac{a}{kb}\gamma_k^{(1)}$$

$$X_k^{(2)} = \frac{b}{ka}\sum_{p=1}^{\infty}\left[kC_{pk}^{(1)}X_p^{(2)} + \frac{ak}{b}C_{pk}^{(2)}X_p^{(1)} + \frac{a}{b}d_{pk}^{(1)}Y_p^{(2)} + d_{pk}^{(2)}Y_p^{(1)}\right] + \frac{b}{ka}\gamma_k^{(2)}$$

$$2X_0^{(1)} = -8c_2\ln\left(\cos\frac{\gamma_1}{2}\right) - \int_{\gamma_2}^{\gamma_1}F_1(\cos\vartheta)\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}d\vartheta -$$

$$-\sum_{p=1}^{\infty}\frac{Y_p^{(2)}M_p^{(2)}-\lambda X_p^{(2)}N_p^{(2)}}{p}z_p(\cos\gamma_1)+$$

$$+\frac{b^2}{a^2}\sum_{p=1}^{\infty}Y_p^{(1)}\frac{\overline{M}_{p\frac{a}{b}}(\cos\gamma_1)-\overline{K}_{p\frac{a}{b}}(\cos\gamma_1)}{p}-$$

$$-\frac{b^2}{a^2}\sum_{p=1}^{\infty}X_p^{(1)}\frac{\overline{N}_{p\frac{a}{b}}(\cos\gamma_1)-P_{p\frac{a}{b}}(\cos\gamma_1)}{p} \tag{1.7}$$

$$2X_0^{(2)}=-8c_1\ln\left(\cos\frac{\xi_1}{2}\right)-\int_0^{\xi_1}F_2(\cos\vartheta)\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}d\vartheta-$$

$$-\sum_{p=1}^{\infty}\frac{Y_p^{(1)}M_p^{(1)}-\lambda X_p^{(1)}N_p^{(1)}}{ab^{-1}p}z_p(\cos\xi_1)+$$

$$+\frac{a}{b}\sum_{p=1}^{\infty}Y_p^{(2)}\frac{\overline{M}_{p\frac{b}{a}}(\cos\xi_1)-K_{p\frac{b}{a}}(\cos\xi_1)}{p}-$$

$$-\frac{a}{b}\sum_{p=1}^{\infty}X_p^{(2)}\frac{\overline{N}_{p\frac{b}{a}}(\cos\xi_1)-\overline{P}_{p\frac{b}{a}}(\cos\xi_1)}{p}$$

где введены обозначения

$$C_{pk}^{(1)}=\frac{b}{2}M_k^{(2)}\int_0^{\xi_1}y_p(\cos\vartheta)\,y_k(\cos\vartheta)\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}d\vartheta,\qquad d_{pk}^{(1)}=-C_{pk}^{(1)}\frac{N_k^{(2)}}{\lambda M_k^{(2)}}$$

$$C_{pk}^{(2)}=-\frac{k}{2}\int_0^{\xi_1}\overline{H}_{p\frac{b}{a}}(\cos\vartheta)\,y_k(\cos\vartheta)\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}d\vartheta$$

$$X_0^{(1)}=\frac{Ev\pi}{2\lambda a},\qquad d_{pk}^{(2)}=\frac{k}{2}\int_0^{\xi_1}\overline{I}_{p\frac{b}{a}}(\cos\vartheta)\,y_k(\cos\vartheta)\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}d\vartheta \tag{1.8}$$

$$\gamma_k^{(1)}=-\frac{b}{2}\int_0^{\xi_1}F_2(\cos\vartheta)\,y_k(\cos\vartheta)\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}d\vartheta+2c_1z_k(\cos\gamma_1)$$

$$\gamma_k^{(2)}=-\frac{k}{2}\int_0^{\xi_1}F_1(\cos\vartheta)\,y_k(\cos\vartheta)\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}d\vartheta+2c_2z_k(\cos\xi_1)$$

$$F_1(\cos\vartheta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\vartheta} \frac{f_1\left(\frac{a\tau_1}{\pi}\right)\cos\frac{\tau_1}{2}\,d\tau_1}{\sqrt{\cos\tau_1 - \cos\vartheta}}$$

$$\overline{H}_1(\cos\vartheta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\vartheta} \frac{\tau_1(\pi-\tau_1)\cos\frac{\tau_1}{2}\,d\tau_1}{\sqrt{\cos\tau_1 - \cos\vartheta}} \qquad (1.8)$$

Функции $y_k(\cos\vartheta)$, $z_k(\cos\vartheta)$, $\overline{L}_k(\cos\vartheta)$ исследованы в работах [2—3], а входящие в $C_{pk}^{(2)}$ интегралы связаны с фучкциями

$$\overline{H}_k(\cos\vartheta) = L_k(-\cos\vartheta) \qquad \overline{N}_k(\cos\vartheta) = H_k(-\cos\vartheta)$$
$$P_k(\cos\vartheta) = K_k(-\cos\vartheta) \qquad \overline{Q}_k(\cos\vartheta) = R_k(-\cos\vartheta) \qquad (1.9)$$

которые детально исследованы в работах [3—4].

Учитывая (1.9), а также оценки соответствующих рядов и функций из [1—4], получим, что суммы модулей коэффициентов при неизвестных бесконечных систем (1.5) меньше единицы при $\lambda = 0.25$, а соответственные суммы в системах (1.7), а также свободные члены этих систем стремятся к нулю при возрастании «k». Следовательно, совокупность бесконечных систем (1.5) и (1.7) квазивполне регулярна, и неизвестные $X_k^{(0)}$, $Y_k^{(0)}$ можно определить методом последовательных приближений.

Напряжения и перемещения определяются по формулам (1.3). На линиях разреза выражения для напряжений видоизменяются выделением особенностей у корня разреза

$$2\sigma_x(0,\tau_1) = -\frac{\sqrt{2}\,R_2\sin\frac{\tau_1}{2}}{\sqrt{\cos\tau_{11}-\cos\tau_1}} + F_2(1) - \sqrt{2}\sin\frac{\tau_1}{2}\,T(\tau_1) \qquad (1.10)$$
$$(\tau_{11} < \tau_1 < \pi)$$

где коэффициент особенности R_2 определяется по формуле

$$R_2 = -4c_2 + \sum_{p=1}^{\infty}\left[Y_p^{(1)}M_p^{(2)} - \lambda Y_p^{(2)}N_p^{(2)}\right] y_p(\cos\tau_{11}) -$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\left[Y_p^{(1)}\overline{L}_{p\frac{b}{a}}(\cos\tau_{11}) - X_p^{(1)}\overline{H}_{p\frac{b}{a}}(\cos\tau_{11})\right] + F_1(\cos\tau_{11})$$

а регулярная функция $T(\eta)$ имеет вид

$$T(\tau_1) = \frac{b}{a}\sum_{p=1}^{\infty} X_p^{(1)}p\int_{\tau_{11}}^{\vartheta}\frac{\left[\overline{N}_{p\frac{b}{a}}(\cos\vartheta) - \overline{P}_{p\frac{b}{a}}(\cos\vartheta)\right]\operatorname{ctg}\frac{\vartheta}{2}\,d\vartheta}{\sqrt{\cos\vartheta-\cos\tau_1}} -$$

$$-\frac{b}{a}\sum_{p=1}^{\infty} pY_p^{(1)}\int_{\eta_1}^{\pi}\frac{[\overline{M}_{p\frac{p}{a}}(\cos\theta)+\overline{K}_{p\frac{b}{a}}(\cos\theta)]\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\,d\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos\eta_1}}-$$

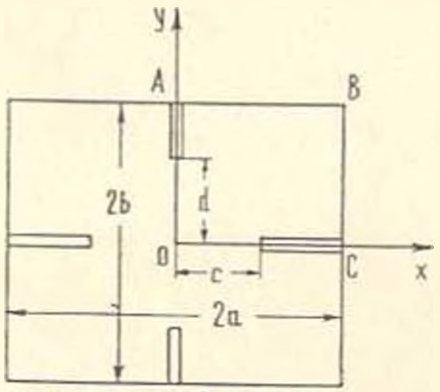
$$-\sum_{p=1}^{\infty} p\,[Y_p^{(2)}M_p^{(2)}-iN_p^{(2)}X_p^{(2)}]-\int_{\eta_1}^{\pi}\frac{F_1(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos\eta_1}}$$

Заменой

$$X_p^{(1)}\rightleftarrows X_p^{(2)},\qquad Y_p^{(1)}\rightleftarrows Y_p^{(2)},\qquad a\rightleftarrows b,\qquad f_1\rightleftarrows f_2,\qquad \xi\rightleftarrows\eta$$

из (1.10) получим выражение для напряжения $\sigma_y(\xi, 0)$.

2. Одновременно рассматривается вторая задача, когда прямоугольник ослаблен четырьмя симметрично расположенными внешними разрезами (фиг. 2), то есть когда граничные условия имеют вид



Фиг. 2.

$$\tau_{xy}(0, y)=u(0, y)=0 \qquad \text{при} \quad (0\leqslant y<d)$$

$$\tau_{xy}(x, 0)=v(x, 0)=0 \qquad \text{при} \quad (0\leqslant x<a)$$

$$\sigma_x(a, y)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\beta_n y,\qquad \sigma_y(x, b)=\frac{b_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\cos\alpha_n x \tag{2.1}$$

$$\sigma_x(0, y)=f_1(y)\quad (d<y\leqslant b),\qquad \sigma_y(x, 0)=f_2(x)\quad (c<x\leqslant a)$$

$$\tau_{xy}(x, y)|_l=0$$

В этом случае изменяются только бесконечные системы (1.7), где надо учесть, что

$$\gamma_n^{(1)}=2C_1 y_n(\cos\eta_1)+\frac{k}{2}\int_{\eta_1}^{\pi}F_2(\cos\theta)\,x_n(\cos\theta)\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

$$C_{pk}^{(1)} = \frac{k}{2}\int_0^{\pi} z_p(\cos\vartheta)\, z_k(\cos\vartheta)\operatorname{ctg}\frac{\vartheta}{2}\,d\vartheta$$

$$C_{pk}^{(2)} = -\frac{k}{2}\int_0^{\pi} H_{p\frac{b}{a}}(\cos\vartheta)\, z_k(\cos\vartheta)\operatorname{ctg}\frac{\vartheta}{2}\,d\vartheta$$

$$d_{pk}^{(2)} = -\frac{k}{2}\int_0^{\pi} L_{p\frac{b}{a}}(\cos\vartheta)\, z_k(\cos\vartheta)\operatorname{ctg}\frac{\vartheta}{2}\,d\vartheta \qquad (2.2)$$

$$F_i(\cos\vartheta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{f_i\left(\frac{a\gamma_1}{\pi}\right)\sin\frac{\gamma_1}{2}\,d\gamma_1}{\sqrt{\cos\vartheta-\cos\gamma_1}}$$

$$H_{p\frac{b}{a}}(\cos\vartheta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\varphi_{pb:a}(\pi-\gamma_1)\sin\frac{\gamma_1}{2}\,d\gamma_1}{\sqrt{\cos\vartheta-\cos\gamma_1}} \qquad (2.3)$$

$$L_{pb:a}(\cos\vartheta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\varphi_{pb:a}(\gamma_1)\sin\frac{\gamma_1}{2}\,d\gamma_1}{\sqrt{\cos\vartheta-\cos\gamma_1}}$$

$$R_2 = F_1(\cos\gamma_{11}) - 4C_1 + \sum_{p=1}^{n}\left|Y_p^{(2)}M_p^{(2)} - iX_p^{(2)}N_p^{(2)}\right| z_p(\cos\gamma_{11}) -$$

$$-\sum_{p=1}^{n}\left|Y_p^{(1)}L_{pb:a}(\cos\gamma_{11}) - X_p^{(1)}H_{pb:a}(\cos\gamma_{11})\right| \qquad (2.4)$$

Из (1.9) и значений интегралов, входящих в (2.2), приведенных в работах [2—4], следует, что системы алгебраических уравнений квазивполне регулярны.

Отметим некоторые частные случаи.

1. В первой задаче (фиг. 1), подставляя $d=0$, получим решение задачи о равновесии прямоугольника с одним внутренним разрезом [5], [6] (фиг. 3).

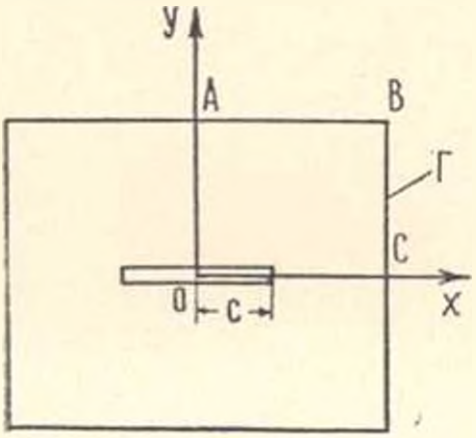
2. При $d=b$ (фиг. 1) получается решение задачи, когда прямоугольник имеет один выходящий на границу разрез (фиг. 4) [7].

3. При $d=b$ (фиг. 2) получается решение для задачи о равновесии прямоугольной области с двумя симметричными разрезами (фиг. 5), ранее рассмотренной в работе [5].

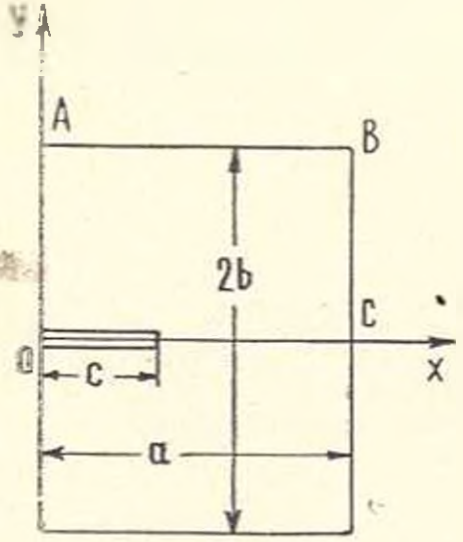
3. В качестве примера для первой задачи вычислим коэффициент при особенности по формуле (1.11) для квадрата, ослабленного равносторонним крестообразным разрезом, когда квадрат подвергается дву

стороннему растяжению равномерными силами P и Q, то есть когда параметры задачи принимают следующие значения:

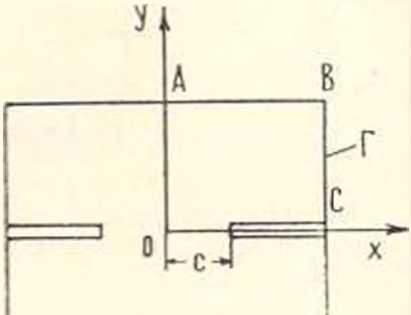
$$a = b = \infty, \quad c = d, \quad a_0 = 2Q, \quad b_0 = 2P, \quad a_k = b_k = 0 \qquad (3.1)$$



Фиг. 3.



Фиг. 4.



Фиг. 5.

Значение коэффициента R_1^* для некоторых отношений c/a приведены в табл. 1.

Таблица 1

c/a	1:2	1:4	1:10
$R_1^* = \frac{R_1 \sin(\pi c/a)}{1-\nu}$	$0.843P - 0.021Q$	$0.142P - 0.051Q$	$0.185P - 0.021Q$

В табл. 2 даны значения коэффициента особенности R_2 (2.4) для задачи, приведенной в п. 2, при тех же значениях параметров (3.1).

Таблица 2

c/a	1/2	3/4	9/10
$R_2^* = \frac{R_2 \cos(\pi c/2a)}{\sqrt{2}}$	$0.821P - 0.023Q$	$0.432P - 0.015Q$	$0.176P - 0.007Q$

Случай $d = 0$, $c = 0$ первой задачи был рассмотрен в работе [5], где приведены некоторые значения R для различных отношений c/a.

Частные случаи второй задачи $c=0$ и $c=a$ рассматривались в работах Бови и Нила [6, 7], а также в работе [5].

Частный случай первой задачи, когда $a = b = \infty$, $c = d$, $P = Q$ подробно рассматривается в работе Сталлибраса [8].

Для изучения влияния отношений c/d и P/Q на значение коэффициента при особенности R рассмотрим подробно предельный случай п. 1, когда $a = b = \infty$ (фиг. 1), то есть рассмотрим задачу для плоскости, ослабленной крестообразным разрезом, когда плоскость растягивается по направлениям осей ox и oy равномерными силами с интенсивностями соответственно P и Q. Предполагается, что берега разреза нагружены только равномерным давлением p.

4. Решение задачи можно получить из решения задачи п. 1 предельным переходом, когда $a \to \infty$, $b \to \infty$. Однако, предельный переход затруднителен из-за наличия бесконечных систем в задаче для конечного прямоугольника. Поэтому целесообразно функцию напряжений рассматриваемой задачи представить отдельно в виде

$$\Phi(x, y) = \frac{Py^2 - Qx^2}{2} + \int_0^\infty A^*(\alpha)(1 + \alpha x) e^{-\alpha x} \cos \alpha y d\alpha + \int_0^\infty C(\beta)(1 - \beta y) e^{-\beta y} \cos \beta x d\beta \qquad (4.1)$$

где неизвестные функции $A(\alpha)$ и $C(\alpha)$ должны определяться из следующих граничных условий:

$$\begin{aligned} &\sigma_y(x, 0) = p \quad (0 \leqslant x \leqslant c); && V(x, 0) = 0 \quad (c < x < \infty) \\ &\sigma_x(0, y) = p \quad (0 \leqslant y < d); && U(x, 0) = 0 \quad (d < y < \infty) \\ &\tau_{xy}|_\Gamma = 0 && \sigma_y(x, \infty) = Q; \quad \sigma_x(\infty, y) = P \end{aligned} \qquad (4.2)$$

Удовлетворяя условиям (4.2), используя при этом формулы (1.3), задачу можно свести к решению следующей системы интегральных уравнений:

$$X(t) = Q - p - \frac{4}{\pi}\int_0^d \frac{\xi^2 t\, Y(\xi)\, d\xi}{(\xi^2 + t^2)^2}, \qquad (0 < t < c)$$

$$Y(t) = P - p - \frac{4}{\pi}\int_0^c \frac{\xi^2 t\, X(\xi)\, d\xi}{(\xi^2 + t^2)^2}, \qquad (0 < t < d) \tag{4.3}$$

где функции $X(t)$ и $Y(t)$ связаны с функциями $A(\alpha)$ и $B(\alpha)$ соотношениями

$$\alpha A(\alpha) = \int_0^d t\, Y(t)\, J_0(\alpha t)\, dt, \qquad \beta C(\beta) = \int_0^c t X(t)\, J_0(\beta t)\, dt \tag{4.4}$$

Нормальные напряжения на линиях $x = 0$, $y = 0$ выражаются через функции $X(t)$ и $Y(t)$ формулами

$$\sigma_x(0, y) = \frac{yY(d)}{\sqrt{y^2 - d^2}} - Y(0) - \int_0^d \frac{yY'(t)\, dt}{\sqrt{y^2 - t^2}} + \int_0^c \frac{yt\,(y^2 - 2t^2)\, X(t)}{(y^2 + t^2)^{3/2}}\, dt$$

$$(|y| > d)$$

$$\sigma_y(x, 0) = \frac{xX(c)}{\sqrt{x^2 - c^2}} - X(0) - \int_0^c \frac{xX'(t)\, dt}{\sqrt{x^2 - t^2}} + \int_0^d \frac{xt\,(x^2 - 2t^2)\, Y(t)}{(x^2 + t^2)^{3/2}}\, dt \tag{4.5}$$

$$(|x| > c)$$

Отметим, что путем замены переменных уравнения (4.3) легко сводятся к системе интегральных уравнений Винера-Хопфа

$$\varphi_1(t) + \frac{e^{-t}}{\pi}\int_0^\infty \frac{\varphi_2(\xi)\, d\xi}{\operatorname{ch}^2(t - \xi + \gamma)} = Q_1 e^{-t}$$

$$\varphi_2(t) + \frac{e^{-t}}{\pi}\int_0^\infty \frac{\varphi_1(\xi)\, d\xi}{\operatorname{ch}^2(t - \xi - \gamma)} = P_1 e^{-t} \tag{4.3'}$$

где

$$Q_1 = Q - p, \qquad P_1 = P - p, \qquad \gamma = \ln \alpha = \ln \frac{d}{c}$$

$$\varphi_1(t) = e^{-t} X(ce^{-t}), \qquad \varphi_2(t) = e^{-t} Y(de^{-t})$$

В частном случае при $\gamma = 0$ $(c = d)$ система (4.3′) распадается на два независимых друг от друга уравнения. При $P = Q$ получается только одно уравнение для функции $\varphi(t) = \varphi_1 = \varphi_2$, которое подробно исследовано в работе [8].

Решая приближенно [9] систему уравнений (4.3), для коэффициента при особенности $X(c)$ формулы (4.5) в зависимости от $\alpha = d/c$ получим следующее выражение:

$$X(c) = Q_1 - \frac{2yP_1}{\pi} + \frac{2(P_1 - Q_1)}{\pi^2}\left|y(\pi - y) - 2\alpha^4 g^2\right| +$$

$$+ \frac{4P_1\alpha^3 g^2}{\pi^3}\left|\frac{3(\pi^2 - 8) + 18 - \pi^2}{6(\alpha^2 + 1)} + \left(\operatorname{arctg}\frac{1}{\alpha} - \alpha g\right)\operatorname{arctg}\frac{1}{\alpha} - \right.$$

$$\left. - 0.522 \sum_{p=2}^{\infty} \frac{p!\, g^p}{(1.5)_p (p + 1.4701)}\right| \qquad (4.6)$$

Коэффициент $Y(d)$ получается из формулы (4.6) заменой $\alpha \to \frac{1}{\alpha}$, $Q_1 \rightleftarrows P_1$. В (4.6) введены обозначения

$$g = (\alpha^2 + 1)^{-1}, \qquad y = \operatorname{arctg}\alpha - \alpha g, \qquad (a)_p = \Gamma(a + p)/\Gamma(a)$$

Погрешность формулы (4.6) не превышает 2%.

При малых значениях α ряд, входящий в (4.6), сходится медленно. Однако, формулы

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{p!\, g^p}{(1.5)_p (p + 1)} = \frac{1}{g}\operatorname{arctg}^2\frac{1}{\alpha}$$

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{p!\, g^p}{(1.5)_p (p + 2)} = \frac{1}{2g^2}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{\alpha} - \alpha g\right)^2 + \frac{1}{2}$$

позволяют вычислить значение этого ряда с любой наперед заданной точностью.

В табл. 3 приведены значения коэффициента при особенности $X(c) = \gamma_1(\alpha) Q_1 - \gamma_2(\alpha) P_1$, вычисленные по формуле (4.6) для конечных значений c и d.

Как видно из табл. 3, изменение функции $\gamma_1(\alpha)$ незначительно ($1 \leqslant \gamma_1(\alpha) \leqslant 1.096$ при $0 \leqslant \alpha < \infty$), то есть влияние силы Q_1 на значение коэффициента $X(c)$ практически не зависит от отношения $\alpha = d/c$. Влияние же силы P_1 на $X(c)$ при малых значениях α незначительно, а при увеличении α его влияние возрастает, но всегда меньше влияния Q_1. При $\alpha = 0$, $(d = 0)$, $X(c) = Q_1$, то есть не зависит от силы P_1. При $\alpha = \infty$, $(c = 0)$, $X(c) = \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi^2}\right)(Q_1 - P_1) \neq 0$, но напряжение $\sigma_y(x, 0)$ не имеет особенности, так как сумма первых двух членов формулы (4.5) при $c = 0$ обращается в нуль.

Сравнение результатов работы с имеющимися в литературе решениями частных задач [5—8] показывает, что при одинаковых значениях параметров задач численные результаты (значения коэффициентов при особенностях напряжений) при больших отношениях c/a совпадают.

и при малых — имеются некоторые расхождения, которые возникли из-за приближенности комформного отображения в [6, 7].

Таблица 3

α	$\gamma_1(\alpha)$	$\gamma_2(\alpha)$	α	$\gamma_1(\alpha)$	$\gamma_2(\alpha)$
0.0	1.00000	0.00000	1.6	1.08451	0.41311
0.1	1.00038	0.00049	1.7	1.08613	0.44028
0.2	1.00261	0.00381	1.8	1.08746	0.46582
0.3	1.00751	0.01229	1.9	1.08855	0.48981
0.4	1.01474	0.02727	2.0	1.08947	0.51235
0.5	1.02347	0.04891	2.1	1.09022	0.53351
0.6	1.03276	0.07638	3.1	1.09353	0.68791
0.7	1.04186	0.10828	4.1	1.09429	0.77869
0.8	1.05020	0.14309	5.1	1.09453	0.83721
0.9	1.05756	0.17941	6.1	1.09462	0.87776
1.0	1.06386	0.21611	7.1	1.09466	0.90743
1.1	1.06915	0.25236	8.1	1.09468	0.93004
1.2	1.07354	0.28759	9.1	1.09469	0.94782
1.3	1.07715	0.32144	10.1	1.09470	0.96215
1.4	1.08011	0.35371	101.0	1.09472	1.08136
1.5	1.08253	0.38426	—	—	—

В более частных случаях, например, для плоскости с одним разрезом получается известное решение [10].

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 29 XI 1972

Ա. Հ. ԲԱԲԼՈՅԱՆ, Ա. Մ. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

ԽԱՉԱՁԵՎ ԿՏՐՎԱԾՔՆԵՐՈՎ ԹՈՒԼԱՑՎԱԾ ՈՒՂՂԱՆԿՅԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐԱԿՇՌՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ամփոփում

Դիտարկվում է առաձգականության տեսության հարթ խնդիրը խաչաձև կտրվածքներով թուլացված ուղղանկյան համար։ Մի դեպքում երկու ներքին ուղղագիծ սիմետրիկ կտրվածքները հատվում են ուղղանկյան կենտրոնում, մյուս դեպքում կտրվածքները սկսվում են ուղղանկյան եզրերի կենտրոններից։

Երկու դեպքում էլ խնդրի լուծումը բերվում է կվազիլիվին ռեգուլյար գծային հանրահաշվական հավասարումների անվերջ սիստեմների անհայտների որոշմանը։

Լարումների արտահայտություններում անջատված են եզակիությունները։ Նշված են մասնավոր դեպքերը։ Բերված են թվային օրինակներ։

ON EQUILIBRIUM OF A RECTANGLE WEAKENED BY CROSS-SHAPED CUTS

A. A. BABLOYAN, A. M. MKRTCHIAN

S u m m a r y

A plane problem in the theory of elasticity for a rectangle, weakened by cross-shaped cuts, is considered.

In one case two straight symmetric cuts intersect in the centre of the rectangle while in the other the cuts start from the middle of the rectangle edges.

In both cases the solution to the problem is reduced to determination of coefficients of expansion from quasi-quite regular infinite systems of algebraic equations.

Some singularities in the expressions for stresses as well as a few particular cases are presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абрамян Б. Л.* К плоской задаче теории упругости для прямоугольника ПММ, т. XXI, вып. 1, 1957.
2. *Баблоян А. А.* Решение некоторых парных уравнений, встречающихся в задачах теории упругости. ПММ, т. XXXI, вып. 2, № 4, 1967.
3. *Баблоян А. А., Гулканян Н. О.* Об одной смешанной задаче для прямоугольника. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XXII, № 1, 1969.
4. *Баблоян А. А., Мкртчян А. М.* Об одной смешанной задаче для прямоугольника. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XXIV, № 5, 1971.
5. *Баблоян А. А., Мкртчян А. М.* Решение плоской смешанной задачи для прямоугольника. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XXV, № 2, 1972.
6. *Бови О.* Растяжение прямоугольной пластинки с симметричным разрезом. Прикл. механика, т. 31, № 4, 1964.
7. *Бови О., Нил Д.* Растяжение прямоугольной пластинки с трещиной на кромке. Прикл. механика, т. 32, № 3, 1965.
8. *Stallybrass M. P.* A unified approach to the solution of four crack problems inplane elastostatics. Proc. Cambrige Phil. Soc., 70, № 1, 1971.
9. *Иванов В. В.* Теория приближенных методов. Изд. «Наукова Думка», Киев, 1968.
10. *Sneddon I. N., Srivastav R. P.* The Stress in the Vicinity of an Infinite Row of Collinear Cracs in an Elastic Body. Proceedings Royal Society of Edinburgh. Section A, vol. LXVII, Part 1, 1965.