

Յ. Ա. ՄԱՐՏԻՐՕՅԱՆ

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ВОПРОСОВ  
 ТРЕЩИНООБРАЗОВАНИЯ НА ПОВЕРХНОСТИ КОНТАКТА  
 СОСТАВНОГО ЦИЛИНДРА

В статье исследуется возможность образования трещин на поверхности контакта составного цилиндра, образованного из двух сплошных круглых цилиндров конечной длины одинакового диаметра, которые соединены между собой торцами, при сжимающей внешней торцевой нагрузке. При решении задачи сцепление между этими цилиндрами принимается полным и без начальных напряжений. На боковой поверхности составного цилиндра нормальные перемещения и касательные напряжения равны нулю.

Такая задача в 1963 г. рассматривалась в работе Баблояна А. А. и Тонояна В. С. [2]. Эта задача и данной работе вновь рассматривается для выяснения возможности трещинообразования на поверхности контакта, при этом проводится другой численный анализ.

Вопрос образования трещин на поверхности контакта связан с исследованием нормального контактного напряжения с определением его величины и знака. Для конкретных внешних нагрузок и отношений геометрических параметров составляющих цилиндров рассмотрены численные примеры, вычислены напряжения на поверхности контакта и на некоторых сечениях составного цилиндра. Исследовано влияние разнородности материалов на распределение напряжений.

Анализ полученных результатов позволяет сделать однозначное заключение о возможности образования трещин на поверхности контакта.

1. Основные расчетные формулы для напряжений

Рассмотрим цилиндр с радиусом  $R$ , состоящий из двух сплошных круглых цилиндров из различных материалов, соединенных между собой торцами (фиг. 1).

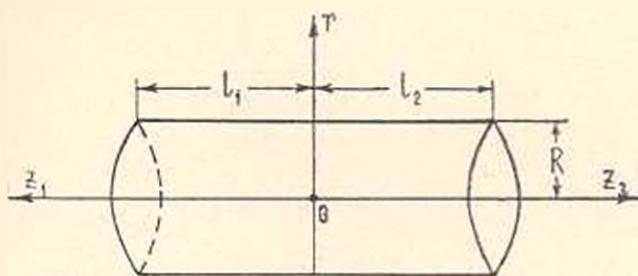
Граничные условия рассмотренной задачи имеют вид

$$\sigma_{rz}^{(i)}(R, z) = 0, \quad u_r^{(i)}(R, z) = 0 \quad (1.1)$$

$$\sigma_z^{(i)}(r, l_i) = \frac{a_0^{(i)}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(i)} J_0(\beta_k r) = f(r) \quad 0 < r < R \quad (i = 1, 2) \quad (1.2)$$

$$\sigma_{rz}^{(i)}(r, l_i) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(i)} J_1(\beta_k r) = \varphi(r)$$

где  $f(r)$  и  $z(r)$  — кусочно-непрерывные функции, ограниченные на заданном интервале.



Фиг. 1.

Условия полного контакта цилиндров по торцам даются соотношениями

$$\begin{aligned} z_{r_2}^{(1)}(r, 0) &= -z_{r_2}^{(2)}(r, 0), & z_2^{(1)}(r, 0) &= z_2^{(2)}(r, 0) \\ u_2^{(1)}(r, 0) &= -u_2^{(2)}(r, 0), & u_r^{(1)}(r, 0) &= u_r^{(2)}(r, 0) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Бигармоническая функция напряжений представляется в виде

$$\begin{aligned} \Phi^{(1)}(r, z) &= \frac{z^2 a_0^{(1)}}{12(1-\nu_1)} + \sum_{k=1}^{\infty} [X_k^{(4k-2)} \operatorname{sh} \beta_k z + X_k^{(4k-2)} \operatorname{ch} \beta_k z + \\ &+ X_k^{(4k-1)} \beta_k z \operatorname{sh} \beta_k z + X_k^{(4k)} \beta_k z \operatorname{ch} \beta_k z] \frac{J_0(\beta_k r)}{\beta_k^2 \operatorname{ch} \beta_k l_1} \end{aligned} \quad (1.4)$$

где  $a_0^{(1)}$  — коэффициенты разложения граничных функций.

Пользуясь обычными формулами [1, 2, 3], для напряжений  $\sigma_z^{(1)}$  и  $\sigma_z^{(2)}$  получим следующие формулы:

$$\begin{aligned} \sigma_z^{(1)}(r, z) &= \frac{a_0^{(1)}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \{-\operatorname{ch} \beta_k z X_k^{(4k-1)} - \operatorname{sh} \beta_k z X_k^{(4k-2)} - \\ &+ [(1-2\nu_1) \operatorname{sh} \beta_k z - \beta_k z \operatorname{ch} \beta_k z] X_k^{(4k-1)} + \\ &+ [(1-2\nu_1) \operatorname{ch} \beta_k z - \beta_k z \operatorname{sh} \beta_k z] X_k^{(4k)}\} \frac{J_0(\beta_k r)}{\operatorname{ch} \beta_k l_1} \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} \sigma_z^{(2)}(r, z) &= \sum_{k=1}^{\infty} [\operatorname{sh} \beta_k z X_k^{(4k-1)} + \operatorname{ch} \beta_k z X_k^{(4k-2)} + \\ &+ (2\nu_1 \operatorname{ch} \beta_k z + \beta_k z \operatorname{sh} \beta_k z) X_k^{(4k-1)} + (2\nu_1 \operatorname{sh} \beta_k z + \beta_k z \operatorname{ch} \beta_k z) X_k^{(4k)}] \frac{J_0(\beta_k r)}{\operatorname{ch} \beta_k l_1} \end{aligned} \quad (1.6)$$

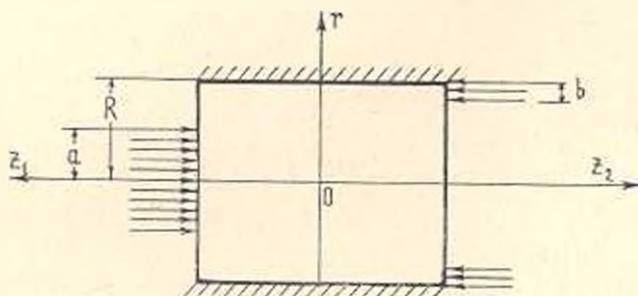
Неизвестные коэффициенты, входящие в ряды (1.4—1.6), определяются после удовлетворения граничных условий и условий контакта из конечного числа линейных алгебраических уравнений.

## 2. Численные примеры

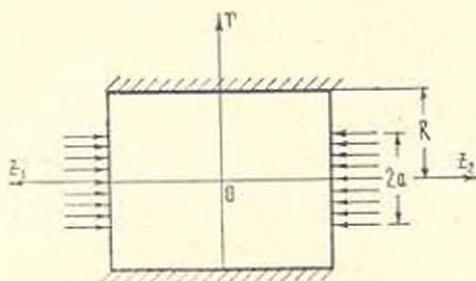
В качестве примеров рассмотрим напряженное состояние составного цилиндра, когда на некоторых частях торцов цилиндра приложены равномерно-распределенные нормальные нагрузки следующим образом:

$$a) \quad \sigma_z^{(1)}(r, l_1) = \begin{cases} -p & \text{при } 0 < r < a_1 \\ 0 & \text{при } a_1 < r < b_1 \end{cases} \quad \sigma_z^{(2)}(r, l_2) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < r < a_2 \\ -p & \text{при } a_2 < r < R \end{cases}$$

$$b) \quad \sigma_z^{(1)}(r, l_1) = \begin{cases} -p & \text{при } 0 < r < a_1 \\ 0 & \text{при } a_1 < r < R \end{cases}$$



Фиг. 2.



Фиг. 3.

Из условия равновесия имеем

$$a_1^2 + a_2^2 = R^2$$

При этих условиях имеем

$$b_k^{(1)} = 0, \quad a_0^{(1)} = \frac{2a_1^2}{R^2} p \quad (2.1)$$

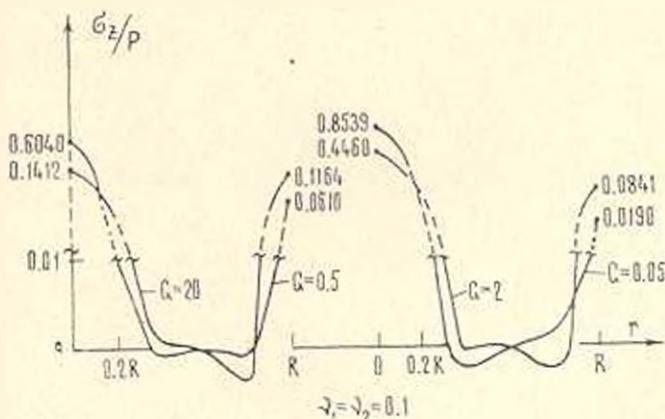
$$a) \quad a_k^{(1)} = \frac{2a_1 J_1(\beta_k a_1)}{R^2 \beta_k J_0(\beta_k R)} \quad b) \quad a_k^{(1)} = -\frac{2a_1 J_1(\beta_k a_1)}{R^2 \beta_k J_0(\beta_k R)} \quad (2.2)$$

Вычисления выполнены для значений  $l_1 = l_2 = l^* = 0.1R$ ,  $a_1 = 0.125R$ .

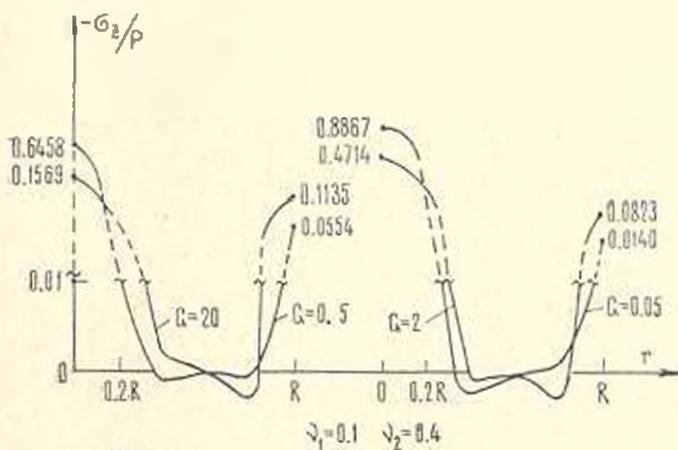
После удовлетворения граничных условий и условий контакта для определения неизвестных коэффициентов  $X_k^{(j)}$  ( $j = 1, 2, \dots, 8$ ) получается конечная система линейных уравнений. Для больших значений  $k$ , решая эту систему и подставляя значения  $X_k^{(j)}$  в (1.5) и (1.6), получим, что отброшенная часть рядов будет меньше, чем сумма следующего ряда:

$$\sum_{k=51}^{\infty} \beta_k 1e^{-\beta_k r} = 0.000005 \quad (2.3)$$

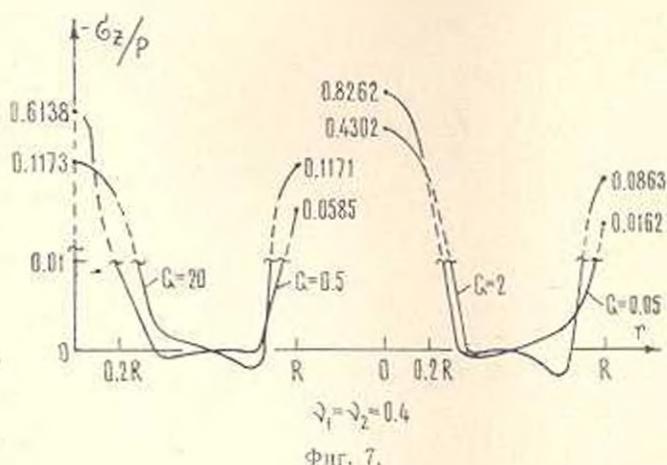
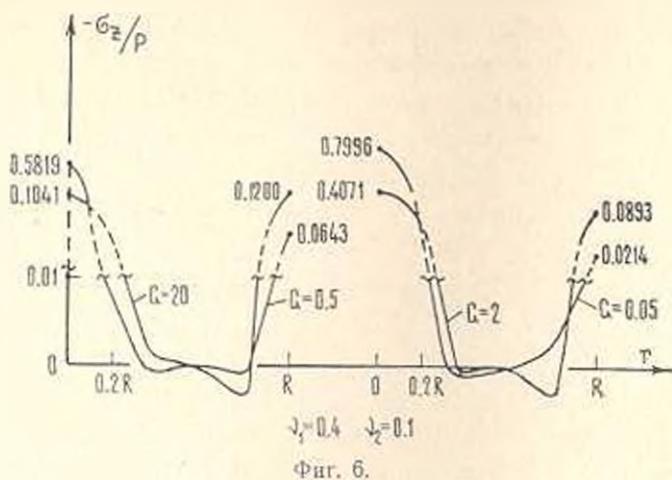
Если  $l_2 \neq l_1$  асимптотика решения получается сравнительно простой, так как некоторые члены имеют порядок  $e^{-11 \cdot 10^k}$  и при больших  $k$  практически равны нулю. Оценены ряды, содержащие беселевые и гиперболические функции, и для напряжений в общем случае получены оценки типа (2.3).



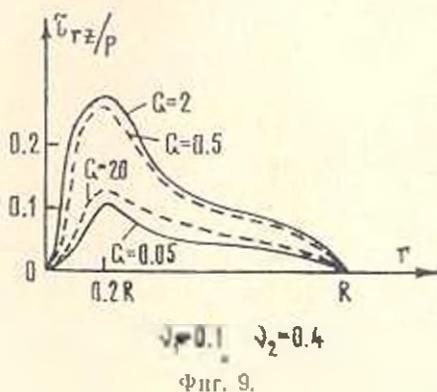
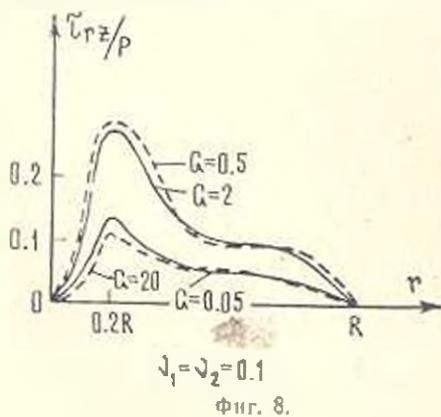
Фиг. 4.

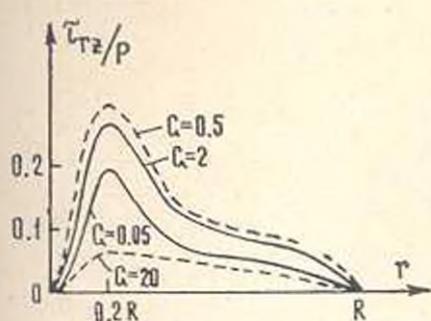


Фиг. 5.



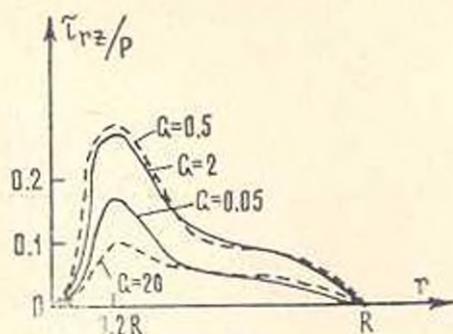
Значения нормального и касательного напряжений в некоторых точках поверхностей  $z=0, 1/4, 3/4, r=0.2R, 0.4R, 0.6R, 0.8R, R$  и на линии  $r=0$ , при  $\frac{G_1}{G_2}=1$ , для первого случая нагружения приведены в табл. 1 и 2.





$$\nu_1 = 0.4 \quad \nu_2 = 0.1$$

Фиг. 10.

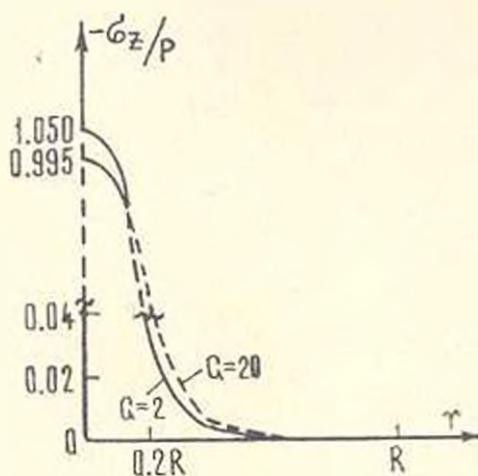


$$\nu_1 = \nu_2 = 0.4$$

Фиг. 11.

Распределения нормального и касательного напряжений на поверхности контакта при различных значениях модулей сдвига и коэффициентов Пуассона для первого случая нагружения показаны на фиг. 10—11. Диаграммы построены по расчетам, сделанным для шести точек поверхности контакта.

Распределение нормального напряжения на поверхности контакта при  $\nu_1 = \nu_2 = 0.1$ ,  $\frac{G_1}{G_2} = 2; 20$  для второго случая нагружения показано на фиг. 12.



$$\nu_1 = \nu_2 = 0.1$$

Фиг. 12.

### 3. Анализ результатов вычислений

Для первого случая нагружения двухслойной плиты, когда слои имеют одинаковые толщины, сжатие сопровождается изгибом. На осно-

вании данных фиг. 4—11 и табл. 1—2 приходим к следующим заключениям:

Таблица 1

	$\frac{z}{l}$				$\frac{r}{R}$	$\frac{z}{l}$		
	0	1/4	1/2	3/4		1/4	1/2	3/4
$\nu_1 = 0,1$	-0,5276	-0,7170	-0,8740	-0,9551	0	-0,3372	-0,1704	-0,0573
	0,0333	0,0456	0,0640	0,0814	0,2	0,0282	0,0293	0,0356
	0,0005	0,0005	0,0003	-0,0001	0,4	0,0001	0,0002	-0,0010
	-0,0000	-0,0000	-0,0000	-0,0001	0,6	-0,0001	-0,0001	-0,0010
	0,0018	0,0015	0,0009	0,0002	0,8	0,0016	0,0010	-0,0004
	-0,0731	-0,0429	-0,0207	-0,0059	1	-0,1162	-0,1891	-0,3598
$\nu_1 = 0,1 \nu_2 = 0,1$	-0,5619	-0,7417	-0,8902	-0,9654	0	-0,3712	-0,1921	-0,0645
	-0,0161	-0,0143	-0,0058	-0,0002	0,2	-0,0119	-0,0060	-0,0026
	0,0007	0,0006	0,0005	0,0002	0,4	0,0005	0,0003	-0,0010
	0,0002	0,0003	0,0005	0,0007	0,6	0,0000	-0,0001	-0,0010
	0,0019	0,0018	0,0015	0,0012	0,8	0,0018	0,0011	-0,0003
	-0,0694	-0,0392	-0,0181	-0,0072	1	-0,1337	-0,1877	-0,3594
$\nu_1 = 0,1 \nu_2 = 0,1$	-0,5028	-0,7004	-0,8680	-0,9588	0	-0,3129	-0,1551	-0,0523
	-0,0118	-0,0112	-0,0035	-0,0006	0,2	-0,0124	-0,0066	-0,0029
	0,0005	0,0005	0,0004	0,0002	0,4	0,0004	0,0002	-0,0010
	0,0001	0,0003	0,0005	0,0007	0,6	0,0000	-0,0001	-0,0010
	0,0027	0,0023	0,0018	0,0017	0,8	0,0019	0,0013	-0,0004
	-0,0770	-0,0467	-0,0226	-0,0057	1	-0,1186	-0,1031	-0,3602
$\nu_1 = 0,1 \nu_2 = 0,1$	-0,5294	-0,7200	-0,8789	-0,9621	0	-0,3381	-0,1708	-0,0574
	-0,0160	-0,0132	-0,0049	0,0001	0,2	-0,0126	-0,0065	-0,0028
	0,0006	0,0006	0,0005	0,0002	0,4	0,0005	0,0002	-0,0010
	0,0001	0,0003	0,0005	0,0007	0,6	0,0000	-0,0001	-0,0010
	0,0020	0,0019	0,0016	0,0013	0,8	0,0018	0,0011	-0,0004
	-0,0729	-0,0424	-0,0200	-0,0048	1	-0,1160	-0,1890	-0,3598

1. Нормальное напряжение  $\sigma_z$  на поверхности контакта меняет знак. Следовательно, при слабом сцеплении под действием внешней сжимающей нагрузки на отдельных участках контакт может нарушиться.

2. При постоянном отношении  $\frac{G_1}{G_2}$  максимальное напряжение  $\sigma_z$  на поверхности контакта получается меньшим при  $\nu_1 > \nu_2$  и большим при  $\nu_1 < \nu_2$ , чем при  $\nu_1 = \nu_2$ .

Таблица 2

	$\frac{(1)}{r_1} p$				$\frac{r}{R}$	$\frac{(2)}{r_2} p$		
	$z/l$					$z/l$		
	0	1/4	1/2	3/4		1/4	1/2	3/4
$\nu_1 = \nu_2 = 0,1$	0,2966	0,2742	0,2107	0,1102	0,2	-0,2809	-0,2286	-0,1375
	0,1463	0,1370	0,1095	0,0637	0,4	-0,1374	-0,1100	-0,0640
	0,0975	0,0914	0,0731	0,0426	0,6	-0,0911	-0,0731	-0,0420
	0,0731	0,0695	0,0562	0,0341	0,8	-0,0675	-0,0531	-0,0201
$\nu_1 = 0,1, \nu_2 = 0,2$	0,2868	0,2588	0,1948	0,0907	0,2	-0,2919	-0,2481	-0,1335
	0,1446	0,1306	0,1016	0,0578	0,4	-0,1426	-0,1178	-0,0701
	0,0963	0,0871	0,0679	0,0387	0,6	-0,0948	-0,0783	-0,0461
	0,0724	0,0663	0,0523	0,0301	0,8	-0,0702	-0,0570	-0,0322
$\nu_1 = 0,4, \nu_2 = 0,1$	0,2984	0,2875	0,2247	0,1202	0,2	-0,2639	-0,2123	-0,1250
	0,1445	0,1413	0,1168	0,0692	0,4	-0,1312	-0,1027	-0,0588
	0,0962	0,0946	0,0779	0,0462	0,6	-0,0973	-0,0682	-0,0385
	0,0720	0,0720	0,0603	0,0362	0,8	-0,0642	-0,0435	-0,0265
$\nu_1 = \nu_2 = 0,4$	0,2961	0,2735	0,2098	0,1092	0,2	-0,2866	-0,2281	-0,1374
	0,1460	0,1365	0,1088	0,0630	0,4	-0,1372	-0,1099	-0,0640
	0,0973	0,0910	0,0726	0,0420	0,6	-0,0912	-0,0730	-0,0420
	0,0631	0,0631	0,0560	0,0329	0,8	-0,0674	-0,0531	-0,0291

3. При любых значениях коэффициентов Пуассона и значительной разности модулей сдвига материалов максимальное напряжение  $\sigma_z$  на поверхности контакта получается меньшим при  $G_1 > G_2$  и большим при  $G_1 < G_2$ , чем при  $G_1 = G_2$ .

4. При любых значениях коэффициентов Пуассона материалов при увеличении  $\frac{G_1}{G_2}$  максимальное нормальное контактное напряжение уменьшается.

5. Для любых значений коэффициентов Пуассона при увеличении  $\frac{G_1}{G_2}$  сжимающее нормальное контактное напряжение на краю контактной поверхности увеличивается.

6. Касательное напряжение  $\tau_{rz}$  на поверхности контакта не меняет знака и не имеет особенностей.

Для второго случая нагружения двухслойной плиты, когда симметричное сжатие торцевой нормальной нагрузкой не сопровождается изгибом, на основании данных вычислений, часть которых приведена на фиг. 12, заключаем:

1. Нормальное напряжение  $\sigma_z$  на поверхности контакта меняет знак.

2. Максимальное контактное нормальное напряжение превосходит значение интенсивности равномерно-распределенной внешней нормальной нагрузки. В предельном случае для одинаковых материалов напряженное состояние составного цилиндра не зависит от свойства материалов.

3. Изменение модулей сдвига и коэффициентов Пуассона материалов слоев мало влияет на напряженное состояние двухслойной плиты.

4. Касательное напряжение  $\tau_{rz}$  на поверхности контакта может изменить знак и значительно меньше, чем в первом случае нагружения.

Ереванский политехнический  
институт им. К. Маркса

Поступила 6 VII 1973

## Չ. Ա. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ

### ԲԱՆԱԿՐՅԱԿ ԿՂԱՆԻ ԿՈՆՏԱԿՏԻ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹԻ ՎՐԱ ՆՆՂՔԻ ԱՌԱՋԱՑՄԱՆ ՄԻ ՔԱՆԻ ՀԱՐՑԵՐԻ ՌԻՍՈՒՄՆԱՍԻՐՈՒԹՅՈՒՆԸ

#### Ա մ փ ո փ ո լ մ

Ռառամասիրում է ճակատներից սեղման ժամանակ բաղադրյալ գլանի կոնտակտի մակերևույթի վրա օղակաձև ճեղքի առաջացման հնարավորության արցիքը, երբ գլանի կողմնային մակերևույթի վրա նորմալ տեղափոխումները և շոշափող յարումները բացակայում են:

Անդհանուր տեսքով տրված է լուծման դնահատականը, որը թույլ է տալիս միարժեք եզրակացություն հանելու բաղադրյալ գլանի կոնտակտի մակերևույթի վրա ճեղքի առաջացման հնարավորության մասին:

Թվային հատազտությունները ցույց են տալիս, որ եթե գլանի ճակատների որևէ հատվածներում կիրառված են հավասարաչափ բաշխված նորմալ ճնշումներ, ապա կոնտակտի մակերևույթի վրա կարող են առաջ գալ ձղող նորմալ յարումներ:

## AN INVESTIGATION ON SOME ASPECTS OF DISJOINING ON THE CONTACT SURFACE OF A COMPOSITE CYLINDER

Z. A. MARTIROSIAN

### S u m m a r y

Some aspects of formation of clearance on the contact surface of a composite cylinder under an external contracting load are investigated where normal displacements and shearing stresses on the lateral surfaces of the cylinder are equal to zero.

A general form of solution is given enabling to draw unambiguous conclusions on the formation of clearance on the contact surface.

A numerical analysis shows that under an external normal contracting load certain extending stresses may develop on the contact surface of the composite cylinder.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Абрамян Б. Л.* К задаче осесимметричной деформации круглого цилиндра. Докл. АН Арм. ССР, т. 19, № 1, 1951.
2. *Баблоян А. А., Тоноян В. С.* Изгиб двухслойной толстой круглой плиты осесимметричной нагрузкой. Изв. АН Арм. ССР, серия физ.-мат. наук, т. XVI, № 1, 1963.
3. *Мартirosян З. А.* О контактных напряжениях осесимметрично нагруженного полостного составного цилиндра. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XXVI, № 1, 1973.
4. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций. Госинформиздат, ч. I, М., 1949.
5. *Янке Е. и Эмде Ф.* Таблицы функций. ИЛ, Физматгиз, 1959.