ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXVII, № 3, 1974 Механика

О. В. БУГРИМ, Е. С. СИНАЙСКИЙ

К РАСЧЕТУ НАСЛЕДСТВЕННО СТАРЕЮЩЕЙ БАЛКИ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

1. Балка длиной l, материал которой проявляет свойства ползучести, расположена на упругом основании и изгибается под действием поперечной нагрузки интенсивностью q.

Исходное соотношение между деформацией $\varepsilon(t)$ и напряжением $\sigma(t)$ для наследственно стареющего материала балки принимаем в виде [1, 2]

$$\varepsilon(t) = E_0^{-1} A\sigma(t) \tag{1.1}$$

Здесь A — оператор, действующий на функции времени t

$$A\varphi(t) = \zeta(t)\varphi(t) + \int_{t_0}^{t} H(t-s)\,\eta(s)\,\varphi(s)\,ds \tag{1.2}$$

$E(t) = E_0\zeta^{-1}(t)$ — модуль упругости ($E_0 = E(\infty)$), $\zeta(t)$ и $\eta(t)$ — монотонно убывающие функции, характеризующие старение мгновенной и наследственной реакций материала, t_0 — возраст материала в момент приложения нагрузки, $H(t-s)$ — функция со слабой особенностью типа Абеля при $t = s$. В качестве $H(t-s)$ будем предполагать экспоненту дробного порядка Ю. Н. Работнова [2]

$$Э_\alpha(\beta, t-s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n (t-s)^{rn-\alpha}}{\Gamma[r(n+1)]}, \quad \beta<0, \quad 0<r=1-\alpha<1 \tag{1.3}$$

или функцию А. Р. Ржаницына [2]

$$P_\alpha(\beta, t-s) = \frac{(t-s)^{-\alpha}}{\Gamma(r)}\, e^{\beta(t-s)}, \quad \beta<0, \quad 0<r=1-\alpha<1 \tag{1.4}$$

($\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция).

Если функцию $\eta(t)$ положить в форме

$$\eta(t) = \eta(t_0)(1+\lambda e^{-\gamma t}), \qquad \lambda>0, \quad \gamma>0 \tag{1.5}$$

то уравнение (1.1) при $\sigma=\sigma_0=\mathrm{const}$ легко преобразуется по Лапласу по переменной $t-t_0$. Это позволяет при уже известной зависимости $E(t)$ тем же способом, что и в работе [3], произвести обработку трех кривых простой ползучести с моментами нагружения, отвечающими трем различным возрастам материала, и получить значения всех реологических параметров, входящих в (1.1).

Уравнение изгиба балки на упругом основании [4] при условии (1.1) принимает вид

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\omega(x)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) = A\,[q(x,t) - K(x)\,y] \tag{1.6}$$

Здесь $y(x,t)$ — прогиб, $\omega(x) = E_0(x)\,J(x)$, J — момент инерции поперечного сечения балки, $K(x)$ — коэффициент податливости основания, $q(x,t)$ — интенсивность поперечной нагрузки.

Положим

$$y = \sum_{i=0}^{n} B_i(t)\,\psi_i(x) \tag{1.7}$$

где $\psi_i(x)$, $(i = 0, 1, \ldots)$ — полная система координатных функций, удовлетворяющих граничным условиям задачи.

Применяя процедуру метода Бубнова-Галеркина [4], для определения коэффициентов $B_i(t)$ получаем систему интегральных уравнений

$$\sum_{i=0}^{n}(\alpha_{ij} + \beta_{ij}A)\,B_i(t) = Aq_j(t), \qquad j = 0, 1, \ldots, n \tag{1.8}$$

Здесь

$$\alpha_{ij} = \int_0^l \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\omega(x)\,\frac{\partial^2\psi_i}{\partial x^2}\right)\psi_j\,dx, \qquad \beta_{ij} = \int_0^l K(x)\,\psi_i\,\psi_j\,dx$$

$$q_j(t) = \int_0^l q(x,t)\,\psi_j\,dx \tag{1.9}$$

Если использовать обозначения

$$H^*\varphi(t) \equiv \int_{\tau_0}^{t} H(t-s)\,\varphi(s)\,ds, \qquad J_\alpha^*\varphi(t) = \int_{\tau_0}^{t}\frac{(t-s)}{\Gamma(r)}\,\varphi(s)\,ds \tag{1.10}$$

а также выражение оператора $Э_\alpha^*(\beta)$ через оператор Абеля J_α^* [2], то оператор A с функцией $H(t-s)$ в форме (1.3) и (1.4) получает соответственно представления

$$A\varphi(t) = \zeta(t)\,\varphi(t) + \frac{J_\alpha^*}{1-\beta J_\alpha^*}\,\eta(t)\,\varphi(t) \tag{1.11}$$

$$A\varphi(t) = \zeta(t)\,\varphi(t) + e^{\beta t}J_\alpha^*\,\eta(t)\,e^{-\beta t}\,\varphi(t) \tag{1.12}$$

Система (1.8) в рассматриваемых случаях принимает вид

$$\sum_{i=0}^{n}[(1-\beta J_t^*)(\alpha_{ij}+\beta_{ij}\zeta(t))+\beta_{ij}J_t^*\varepsilon_i(t)]B_i(t) =$$

$$=[(1-\beta J_t^*)\zeta(t)+J_t^*\varepsilon_j(t)]q_j(t), \qquad j=0,\ 1,\dots,n \tag{1.13}$$

$$\sum_{i=0}^{n}[\alpha_{ij}+\beta_{ij}\zeta(t)+J_t^*\varepsilon_i(t)]\tilde{B}_i(t)=(\zeta(t)+J_t^*\varepsilon_j(t))\tilde{q}_j(t) \tag{1.14}$$

$$j=0,\ 1,\dots,n$$

Здесь

$$\tilde{B}_i(t)=e^{-\beta t}B_i(t), \qquad \tilde{q}_j(t)=e^{-\beta t}q_j(t) \tag{1.15}$$

оператор J_t^* действует на все последующие множители — функции времени.

Для построения приближенного решения уравнений (1.13), (1.14) в промежутке $[t_0,\ t_1]$, на котором практически завершается процесс старения, используем τ-метод Ланцоша [5].

Предположим, что в интервале $[t_0,\ t_1]$ функции, входящие в (1.13), (1.14) имеют ограниченную производную по времени. Этого достаточно, чтобы существовали равномерные аппроксимации вида

$$\zeta(t)=\sum_{k=0}^{p}\zeta_k\vartheta^{rk}, \qquad \varepsilon_i(t)=\sum_{k=0}^{p}\varepsilon_{i_k}\vartheta^{rk}, \qquad \vartheta=(t-t_0)/(t_1-t_0) \tag{1.16}$$

$$B_i(t)=\sum_{g=0}^{m}B_{i,g}\vartheta^{rg}, \qquad q_j(t)=\sum_{g=0}^{m}q_{j,g}\vartheta^{rg} \tag{1.17}$$

Подставим эти разложения в уравнения (1.13). Одновременно с целью разрешимости системы (1.13) введем в ее правые части невязки в форме

$$T_{m+1}^*(\vartheta^r)(\tau_0^j+\tau_1^j\vartheta^r+\cdots+\tau_p^j\vartheta^{rp}) \tag{1.18}$$

где τ_k^j — пока неизвестные параметры, $T_{m+1}^*(\vartheta^r)$ — смещенный полином Чебышева [5]

$$T_{m+1}^*(z)=\sum_{l=0}^{m+1}c_{m+1}^{l}z^l \tag{1.19}$$

Методом неопределенных коэффициентов получаем систему линейных алгебраических уравнений, из которой определяются все неизвестные $B_{i,g}$ и τ_k^j.

$$\sum_{i=0}^{n}\Big\{\alpha_{ij}(B_{i,g}-\beta\Delta t_1^r\Omega_g^{g-1}B_{i,g-1})+\beta_{ij}\sum_{k=0}^{p+1}[\zeta_k+\Delta t_1^r\Omega_g^{g-1}(\varepsilon_{i_{k-1}}-$$

$$-\beta\zeta_{k-1})]B_{i,g-k}\Big\}=\sum_{k=0}^{p+1}[\zeta_k+\Delta t_1^r\Omega_g^{g-1}(\varepsilon_{j_{k-1}}-\beta\zeta_{k-1})]q_{j,g-k}+\sum_{k=0}^{p}\tau_k^j c_{m+1}^{g-k} \tag{1.20}$$

$$j=0,\ 1,\dots,n, \qquad g=0,\ 1,\dots,m+p+1$$

Здесь

$$\Omega_g^j = \frac{\Gamma(rj+1)}{\Gamma(rg+1)}, \quad \Delta t_1 = t_1 - t_0, \quad B_{i,k} = q_{j,k} = \eta_{jk} = \zeta_k = c^k_{m+1} = 0 \quad \text{при } k < 0$$

$$B_{i,m+k} = q_{j,m+k} = \zeta_{p+k} = \eta_{jp+k} = c^{m+1-k}_{m+1} = 0 \qquad \text{при} \quad k > 0.$$

Уравнения (1.14) приводятся к системе алгебраических уравнений аналогично. Ее можно получить непосредственно из системы (1.20), полагая в последней $\beta = 0$ и заменяя $B_{i,k}$ и $q_{j,k}$ на $\tilde{B}_{i,k}$ и $\tilde{q}_{j,k}$ соответственно.

Используемый τ-метод определяет неизвестные функции $B_i(t)$ в виде ускоренно сходящихся [5] разложений (1.17) по дробным степеням временной переменной θ и позволяет судить о погрешности решения каждого уравнения системы (1.13) или (1.14) по невязке (1.18), не превосходящей суммы $|\tau_0| + |\tau_1| + \cdots + |\tau_n|$. Число τ-членов определяется степенью аппроксимирующих полиномов (1.16), которая для устанавливаемых из опыта функций $\zeta(t)$ и $\eta_i(t)$ может быть выбрана достаточно низкой.

2. В качестве иллюстрации рассмотрим изгиб лежащей на упругом основании и защемленной на концах бетонной балки длиной $l = 60$ *м* с линейно меняющейся жесткостью $\omega(x) = \omega_0(1 - \varepsilon x/l)$, $\omega_0 = 7.39 \cdot 10^{10}$ *нм²*, $\varepsilon = 0.25$. Для коэффициента упругой податливости основания положим $K(x) = a(x/l)^2 + b(x/l) + c$, $a = -3.92 \cdot 10^7$, $b = 3.92 \cdot 10^7$, $c = 1.96 \cdot 10^7$ *н/м²* [6]. Функцию $H(t - s)$ в уравнении (1.1) примем в форме (1.4).

В результате обработки серии кривых простой ползучести ($\sigma = \sigma_0 = \text{const}$) бетона [7], отвечающих нагружениям в возрасте $t_{01} = 5$, $t_{02} = 7$, $t_{03} = 28$ суток, получены следующие значения параметров $\gamma = 0.233$ *сут⁻¹*, $\lambda = 5.72$, $r = 0.614$, $\beta = -0.00838$ *сут⁻¹*, $\varkappa(t_{01}) = 0.0185$, $\varkappa(t_{02}) = 0.017$, $\varkappa(t_{03}) = 0.00874$ $сут^{-r}$.

Сравнение вычисленных при этих параметрах из уравнения (1.1) значений величины $\chi(t) = \varepsilon(t) - \sigma_0 E^{-1}(t)$ с экспериментальными данными для нее приведено в табл. 1.

Таблица 1

t	(сутки)	5	7	14	28	60	90	150	210
χ_1	опыт	0	0.095	0.195	0.24	0.32	0.38	0.43	0.46
	расчет	0	0.107	0.179	0.232	0.319	0.372	0.434	0.467
χ_2	опыт		0	0.14	0.20	0.27	0.33	0.39	0.42
	расчет		0	0.130	0.192	0.281	0.335	0.396	0.427
χ_3	опыт				0	0.11	0.15	0.19	0.21
	расчет				0	0.108	0.149	0.193	0.214

Функции $\zeta(t)$ и $\eta_i(t)$ в интервале от $t_0 = 5$ *сут* до $t_1 = 20$ *сут* достаточно хорошо аппроксимируются выражениями

$$\xi(t) = 1.72 - 0.731\,\vartheta^{r} + 0.0215\,\vartheta^{2r}, \qquad \eta(t) = 0.0525 - 0.061\,\vartheta^{r} + 0.028\,\vartheta^{2r}.$$

В соответствии с граничными условиями координатные функции в (1.7) выберем в виде

$$\psi_i(x) = (1 - x/l)^2 (x/l)^{i+2}, \qquad i = 0, 1, \ldots, n$$

При $n = 2$ система (1.14) содержит три интегральных уравнения. Ограничиваясь в разложениях (1.17) третьей степенью величины ϑ^r ($m = 3$) и полагая для простоты $q(x, t) = q_0 e^{\beta t}$ ($q_0 = \mathrm{const}$) найдем из системы (1.20) в единицах $q_0 l^4/\omega_0 \cdot 10^{-3}$

$\bar{B}_{00} = 11.10$	$\bar{B}_{01} = -1.422$	$\bar{B}_{02} = -0.9814$	$\bar{B}_{03} = 0.2478$
$\bar{B}_{10} = -31.19$	$\bar{B}_{11} = 5.863$	$\bar{B}_{12} = 4.034$	$\bar{B}_{13} = -1.103$
$\bar{B}_{20} = 31.27$	$\bar{B}_{21} = -5.749$	$\bar{B}_{22} = -3.957$	$\bar{B}_{23} = 1.076$

Невязки решения уравнений системы (1.14) в тех же единицах не превышают величины $6 \cdot 10^{-5}$. Вычисления выполнены на ЭВМ „Минск-22".

Согласно (1.7), (1.15), (1.17) для прогиба окончательно получаем

$$y(x, t) \approx (1 - x/l)^2 e^{\beta t} \sum_{i=0}^{2} \sum_{k=0}^{3} \bar{B}_{ik}\, \vartheta^{rk} (x/l)^{i+2}$$

В заключение авторы благодарят М. И. Розовского за обсуждение работы.

Днепропетровский
горный институт

Поступила 19 VI 1972

Օ. Վ. ԲՈՒՏՐԻՄ, Ե. Ս. ՍԻՎԱՅՍԿԻ

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՀԻՄՔԻ ՎՐԱ ԳՏՆՎՈՂ ԺԱՌԱՆԳԱԿԱՆՈՐԵՆ ԾԵՐԱՑՈՂ ՀԵԾԱՆԻ ՀԱՇՎԱՐԿԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ամփոփում

Բուբնով-Գալյորկինի մեթոդով առաձգական հիմքի վրա գտնվող ժառանգականության և ծերացման հատկություններով անհամասեռ հեծանի ծռման խնդիրը բերվել է ժամանակի նկատմամբ ոչ ինվարիանտ կորիզներով Վոլտերի ինտեգրալ հավասարումների սիստեմի։ Այս սիստեմի լուծման թվային իրագործումը կատարվել է Լանցոշի τ-մեթոդով։

ON THE CALCULATION OF AN HEREDITARY AGING BEAM ON THE ELASTIC FOUNDATION

O. V. BUGRIM, E. S. SINAYSKY

S u m m a r y

The problem of buckling a nonhomogeneous beam possessing the properties of heredity and aging based on an elastic foundation is reduced to a system of integral Volterra equations with hereditary kernels noninvariant in respect to time. This system has been solved numerically by Lanczos' τ-method.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* Ползучесть стареющих материалов. Ползучесть бетона. Инж. ж. МТТ, 1967, № 6.
2. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. Изд. «Наука», М., 1966.
3. *Синайский Е. С.* Об одном способе обработки кривых экспериментальной реологии. Инж. ж. МТТ, 1967, № 6.
4. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. Изд. «Наука», М., 1970.
5. *Ланцош К.* Практические методы прикладного анализа. Физматгиз, М., 1961.
6. *Клепиков С. Н.* Расчет конструкций на упругом основании. Изд. «Будівельник», К., 1967.
7. *Улицкий И. И., Русинов И. А.* Экспериментальные исследования деформативности бетона и жесткости железобетонных изгибаемых элементов при длительном загружении. Сб. «Строительные конструкции». Госстройиздат, УССР, 1959, вып. 13.