ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXVII, № 3, 1974 Механика

С. Т. ХАЧАТРЯН

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ НА ЗАДАННОМ ИНТЕРВАЛЕ ВРЕМЕНИ

Современный этап развития прикладной теории устойчивости неразрывно связан с созданием математически строгих алгоритмов исследования устойчивости неустановившихся состояний с учетом конечности времени протекания процесса [1, 3, 4, 5].

В настоящей статье предлагается алгоритм получения условий устойчивости и неустойчивости невозмущенного движения [1] по отношению к заданной области предельных отклонений параметров линейной части нестационарной системы дифференциальных уравнений второго порядка посредством матриц вдвое меньшего порядка по сравнению с общепринятыми.

1. Рассматривая материальные системы, описываемые уравнениями возмущенного движения, воспользуемся определением об устойчивости движения на заданном интервале времени в следующей постановке [1].

Определение. Если уравнения возмущенного движения таковы, что при достаточно малом $\rho>0$ любое решение $x=x(t)$ уравнения, начальное значение $x_0=x(t_0)$ которого удовлетворяет условию

$$(G(t_0)\, x_0,\ G(t_0)\, x_0) \leqslant \rho^2 \tag{1.1}$$

на заданном (конечном) интервале $t_0 \leqslant t < T$ удовлетворяют условию

$$(G(t)\, x(t),\ G(t)\, x(t)) \leqslant \rho^2 \tag{1.2}$$

где $G(t)$ — заданная ограниченная матрица, то невозмущенное движение по отношению к области (1.2) устойчиво на интервале $[t_0, T)$, в противном случае — неустойчиво. Поскольку задача об устойчивости на заданном интервале времени $[t_0, T)$ в общем случае зависит от выбора начального момента t_0, невозмущенное движение будем называть равномерно устойчивым в смысле приведенного выше определения, если оно устойчиво на любом интервале $[t_*, T)$, где $t_* \in [t_0, T)$.

2. Пусть уравнения возмущенного движения представлены в виде

$$L(t)\frac{d^2q}{dt^2} + N(t)\, q = h(t, q) \tag{2.1}$$

где $L(t)$ и $N(t)$ — квадратные матрицы порядка m, а $h(t, q)$ и q — непрерывные вектор-функции.

Будем предполагать, что $L(t)$ — невырожденная матрица, матрицы $L(t)$ и $N(t)$ непрерывны на заданном интервале времени $[t_0, T)$, а элементы $h(t, q)$ — нелинейные функции возмущений q_i $(i = 1, \ldots, m)$ — таковы, что равномерно по t в пределах интервала $[t_0, T]$

$$\lim_{q \to 0} \frac{h(t, q)}{|q|} = 0 \tag{2.2}$$

Из свойства нелинейности $h(t, q)$, выраженного условием (2.2), следует наличие решения $q = 0$ уравнения (2.1) и далее будем рассматривать решения, остающиеся достаточно близкими к тривиальному. Невырожденность матрицы $L(t)$ обеспечивает возможность приведения уравнения (2.1) к нормальному виду

$$\frac{dx}{dt} = U(t)\, x + H(t, x) \tag{2.3}$$

где

$$U(t) = \begin{pmatrix} 0 & -L^{-1}(t)\, N(t) \\ E_m & 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} \dfrac{dq}{dt} \\ q \end{pmatrix}, \quad H(t, x) = \begin{pmatrix} L^{-1}(t)\, h(t, q) \\ 0 \end{pmatrix}$$

а E_m — единичная матрица порядка m.

Пусть матрица $U(t)$ дифференцируема и имеет простую структуру. Тогда существует невырожденная и дифференцируемая матрица $K(t)$, преобразующая матрицу $U(t)$ к диагональному виду

$$K^{-1}(t)\, U(t)\, K(t) = \Lambda(t) = \operatorname{diag}(\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t))$$

где $n = 2m$.

Элементы диагональной матрицы $\Lambda(t)$ являются собственными значениями матрицы $U(t)$, а столбцы матрицы $K(t)$ — ее собственными векторами. Пусть K_s — собственный вектор матрицы $U(t)$, отвечающий собственному значению λ_s $(s = 1, \ldots, n)$, $(\lambda_s = \lambda_s(t))$.

Обозначим через $\gamma_1(t), \ldots, \gamma_m(t)$ — собственные значения, а через $\varkappa_1(t), \ldots, \varkappa_m(t)$ — соответствующие собственные векторы матрицы $L^{-1}(t)\, N(t)$. Обозначим $\mu(t) = \varkappa^{-1}(t)$ и представим $\varkappa(t)$ и $\mu(t)$ в виде блочных матриц

$$\varkappa = (\varkappa_1, \ldots, \varkappa_m), \qquad \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix}$$

Тогда из [2] соотношения между собственными векторами и собственными значениями матриц $L^{-1}(t)\, N(t)$ и $U(t)$ можно представить следующими формулами:

$$\lambda_s = i\sqrt{|\gamma_j|}\left(\cos\frac{\arg\gamma_j}{2} + i\sin\frac{\arg\gamma_j}{2}\right) \tag{2.4}$$

$$\lambda_s = i\sqrt{|\gamma_j|}\left(\cos\frac{\arg\gamma_j + 2\pi}{2} + i\sin\frac{\arg\gamma_j + 2\pi}{2}\right) \tag{2.4б}$$

$$K_\sigma = \begin{pmatrix} \lambda_\sigma x_j \\ x_j \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

где

$$j = \begin{cases} \sigma & \text{при} \quad \sigma \leqslant m \\ \sigma - m & \text{при} \quad \sigma > m \end{cases}$$

$j = 1, \ldots, m$; $\gamma_j \neq 0$, $i = \sqrt{-1}$ и, если через Ω_σ и Ω_s обозначить соответственно области определения σ и s, то Ω_σ, $\Omega_s \subset \{1, \ldots, n\}$ и $\Omega_s \cap \Omega_\sigma = \varnothing$.

Формулы (2.4) позволяют утверждать, что среди каждой пары собственных значений матрицы $U(t)$, соответствующей одному собственному значению матрицы $L^{-1}(t)\,N(t)$, собственные значения матрицы $U(t)$ отличаются только знаком. Следовательно, если матрицу $\Lambda(t)$ представить в блочном виде

$$\Lambda(t) = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{pmatrix}$$

где Λ_1 и Λ_2 — диагональные матрицы порядка m, то можно выбрать такое размещение собственных значений матрицы $U(t)$ в диагональной матрице $\Lambda(t)$, при котором выполняется равенство

$$\Lambda_1 = -\Lambda_2 \tag{2.6}$$

Полагая, что столбцы K_σ $(\sigma = 1, \ldots, n)$ нормированы, примем $G(t) = K^{-1}(t)$ и зададим область предельных отклонений следующим образом:

$$V(t, x) = (K^{-1}(t)\,x,\ K^{-1}(t)\,x) \leqslant \rho^2 \tag{2.7}$$

3. Введем обозначение

$$x = K(t)\,y \qquad (y = y(t)) \tag{3.1}$$

В новых переменных уравнение (2.3) примет вид

$$\frac{dy}{dt} = \Lambda(t)\,y - K^{-1}(t)\frac{dK(t)}{dt}\,y + K^{-1}(t)\,H(t, Ky) \tag{3.2}$$

Полная производная по t в силу уравнений возмущенного движения от положительно определенной на интервале $[t_0, T)$ функции $V(t, x) = V(t, Ky) = \|y\|^2$ равна

$$\frac{1}{2}\,\frac{dV(t, x)}{dt} = \sum_{\sigma=1}^{n} \operatorname{Re}\lambda_\sigma\,|y_\sigma|^2 + y^* P(t)\,y +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(y^* K^{-1}(t)\,H(t, Ky) + H^*(t, Ky)\,K^{*-1}(t)\,y\right) \tag{3.3}$$

где

$$P(t) = -\frac{1}{2}\left(K^{-1}(t)\frac{dK(t)}{dt} + \frac{dK^*(t)}{dt}K^{*-1}(t)\right)$$

Из (2.5) следует

$$K(t) = \begin{pmatrix} \varkappa\Lambda_1; & \varkappa\Lambda_2 \\ \varkappa; & \varkappa \end{pmatrix}; \qquad K^{-1}(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \Lambda_1^{-1}\mu; & \mu \\ \Lambda_2^{-1}\mu; & \mu \end{pmatrix}$$

Тогда из (3.1) имеем

$$y = \begin{pmatrix} \psi \\ \varphi \end{pmatrix}$$

где

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{2}\left(\Lambda_1^{-1}\mu\frac{dq}{dt} + \mu q\right) \\ \varphi &= \frac{1}{2}\left(\Lambda_2^{-1}\mu\frac{dq}{dt} + \mu q\right) \end{aligned} \tag{3.4}$$

ψ и φ — столбцовые матрицы порядка m.

Тогда

$$\sum_{s=1}^{n}\operatorname{Re}\lambda_s|y_s|^2 = \frac{1}{4}\left[\left(\Lambda_1^{-1}\mu\frac{dq}{dt} + \mu q\right)^*\operatorname{Re}\Lambda_1\left(\Lambda_1^{-1}\mu\frac{dq}{dt} + \mu q\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\Lambda_2^{-1}\mu\frac{dq}{dt} + \mu q\right)^*\operatorname{Re}\Lambda_2\left(\Lambda_2^{-1}\mu\frac{dq}{dt} + \mu q\right)\right] = \psi^*\operatorname{Re}\Lambda_1\psi + \varphi^*\operatorname{Re}\Lambda_2\varphi$$

Учитывая (2.6), имеем

$$\sum_{s=1}^{n}\operatorname{Re}\lambda_s|y_s|^2 = \sum_{i=1}^{m}\operatorname{Re}\lambda_i(|\psi_i|^2 - |\varphi_i|^2)$$

Будем предполагать, что здесь $\lambda_i\ (i = 1, \dots, m)$ определены через (2.4б).

Тогда имеем

$$\sum_{s=1}^{n}\operatorname{Re}\lambda_s|y_s|^2 = \sum_{i=1}^{m}\sqrt{|\gamma_i|}\sin\frac{\arg\gamma_i}{2}(|\psi_i|^2 - |\varphi_i|^2) \tag{3.5}$$

Обозначив

$$\begin{aligned} D(t) &= -\frac{1}{4}\left(\Lambda_1^{-1}\mu\frac{d\varkappa\Lambda_1}{dt} + \frac{d\Lambda_1^*\varkappa^*}{dt}\mu^*\Lambda_1^{*-1}\right) \\ F(t) &= -\frac{1}{4}\left(\mu\frac{d\varkappa}{dt} - \frac{d\varkappa^*}{dt}\mu^*\right) \end{aligned} \tag{3.6}$$

и учитывая (2.6), эрмитову матрицу $P(t)$ в (3.3) можно представить следующим образом:

$$P(t)=\begin{pmatrix}F(t)+D(t), & F(t)-D(t)\\ F(t)-D(t), & F(t)+D(t)\end{pmatrix} \tag{3.7}$$

Тогда имеем

$$y^*P(t)\,y=\left(\Lambda_1^{-1}\mu\frac{dq}{dt}\right)^* D(t)\,\Lambda_1^{-1}\mu\,\frac{dq}{dt}+(\mu q)^*F(t)\,\mu q$$

Введя переменные (3.4), получим

$$y^*P(t)\,y=(\psi-\varphi)^*D(t)\,(\psi-\varphi)+(\psi+\varphi)^*F(t)\,(\psi+\varphi) \tag{3.8}$$

Лемма. Пусть дана эрмитова матрица $P(t)$ порядка n с собственными значениями $\nu_1(t),\dots,\nu_n(t)$, определяемая по (3.6) и (3.7) через эрмитовы матрицы простой структуры $D(t)$ и $F(t)$ одного и того же порядка m с собственными значениями $\alpha_1(t),\dots,\alpha_m(t)$ и $\beta_1(t),\dots,\beta_m(t)$ соответственно, причем $n=2m$. Тогда матрица $P(t)$ имеет простую структуру, а собственные значения $\nu_1(t),\dots,\nu_n(t)$ связаны с $\alpha_1(t),\dots,\alpha_m(t)$ и $\beta_1(t),\dots,\beta_m(t)$ следующим соотношением:

$$\nu_s(t)=\begin{cases}2\beta_s(t) & \text{при } s\leqslant m\\ 2\alpha_{s-m}(t) & \text{при } s>m\end{cases} \tag{3.9}$$

где $s=1,\dots,n$.

Доказательство. Пусть $\chi(t)$ и $\eta(t)$ — невырожденные унитарные матрицы порядка m, приводящие соответственно матрицы $D(t)$ и $F(t)$ к диагональному виду. Введем матрицу

$$S(t)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\eta(t), & \chi(t)\\ \eta(t), & -\chi(t)\end{pmatrix} \tag{3.10}$$

Тогда

$$S^{-1}(t)\,P(t)\,S(t)=2\begin{pmatrix}\eta^*(t)\,F(t)\,\eta(t), & 0\\ 0, & \chi^*(t)\,D(t)\,\chi(t)\end{pmatrix} \tag{3.11}$$

Таким образом, невырожденная матрица $S(t)$ из (3.10) приводит матрицу $P(t)$ к диагональному виду. Следовательно, эрмитова матрица $P(t)$ имеет простую структуру. Как видно из (3.11), соотношение (3.9) справедливо. Лемма доказана.

Из (3.5), (3.8) и (3.9) в силу известных свойств произвольной эрмитовой формы имеем

$$\frac{\sum\limits_{l=1}^{s}\sqrt{|\gamma_l(t)|}\,\sin\dfrac{\arg\gamma_l(t)}{2}\,(|\psi_l|^2-|\varphi_l|^2)}{\|\psi\|^2+\|\varphi\|^2}\leqslant\max_l\left|\sqrt{|\gamma_l(t)|}\,\sin\frac{\arg\gamma_l(t)}{2}\right| \tag{3.12}$$

$$\min_l[\alpha_l(t),\ \beta_l(t)]\leqslant\frac{(\psi-\varphi)^*D(t)\,(\psi-\varphi)+(\psi+\varphi)^*F(t)\,(\psi+\varphi)}{2\,[\|\psi\|^2+\|\varphi\|^2]}\leqslant$$

$$\leqslant\max_l\,[\alpha_l(t),\ \beta_l(t)] \tag{3.13}$$

где $l=1,\dots,m$.

С учетом (2.6) выражение $\frac{1}{2}(y^*K^{-1}(t)H(t, Ky) + H^*(t, Ky)K^{*-1}(t)y)$ в (3.3) можно представить следующим образом:

$$\delta(t, q) = \frac{1}{2}(y^*K^{-1}(t)H(t, Ky) + H^*(t, Ky)K^{*-1}(t)y) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{dq^*}{dt}\mu^*\Lambda_1^{*-1}\Lambda_1^{-1}\mu L^{-1}(t)h(t, q) + h^*(t, q)L^{*-1}(t)\mu^*\Lambda_1^{*-1}\Lambda_1^{-1}\mu\frac{dq}{dt}\right) \tag{3.14}$$

Подставив (3.5), (3.8), (3.14) в (3.3), получим

$$\frac{1}{2}\frac{dV(t, q)}{dt} = \sum_{i=1}^{m} \sqrt{|\gamma_i(t)|}\sin\frac{\arg\gamma_i(t)}{2}(|\psi_i|^2 - |\varphi_i|^2) +$$

$$+ (\psi - \varphi)^* D(t)(\psi - \varphi) + (\psi + \varphi)^* F(t)(\psi + \varphi) + \delta(t, q) \tag{3.15}$$

4. Сформулируем условия равномерной устойчивости и неустойчивости невозмущенного движения на заданном интервале времени $[t_0, T)$ по отношению к заданной области предельных отклонений (2.7).

Теорема 1. *Если для всех* $t_* \in [t_0, T)$ *выполняется условие*

$$\int_{t_*}^{t}\left\{\max_i\left|\sqrt{|\gamma_i(t)|}\sin\frac{\arg\gamma_i(t)}{2}\right| + 2\max_i|\alpha_i(t), \beta_i(t)|\right\}dt < 0 \tag{4.1}$$

$$i = 1, \ldots, m$$

то невозмущенное движение (тривиальное решение уравнения (2.1)) *равномерно устойчиво на заданном интервале* $[t_0, T)$ *по отношению к области* (2.7).

Доказательство. Из (3.2) имеем

$$\frac{d\|y\|}{dt} = \sum_{s=1}^{n}\operatorname{Re}\lambda_s\frac{|y_s|^2}{\|y\|} + \frac{y^*P(t)y}{\|y\|} + \frac{1}{2\|y\|}(y^*K^{-1}(t)H(t, Ky) +$$

$$+ H^*(t, Ky)K^{*-1}(t)y).$$

Интегрируя вдоль решения уравнений возмущенного движения на интервале $[t_*, T)$, возведя обе части полученного уравнения в квадрат и учитывая (3.5), (3.8), (3.14) и (3.15), имеем

$$V(t, q(t)) = V(t_*, q(t_*))\exp 2\int_{t_*}^{t}\left[\frac{\sum_{i=1}^{m}\sqrt{|\gamma_i(t)|}\sin\frac{\arg\gamma_i(t)}{2}}{\|\psi\|^2 + \|\varphi\|^2}(|\psi_i|^2 - |\varphi_i|^2) +\right.$$

$$\left. + \frac{(\psi - \varphi)^* D(t)(\psi - \varphi) + (\psi + \varphi)^* F(t)(\psi + \varphi) + \delta(t, q)}{\|\psi\|^2 + \|\varphi\|^2}\right]dt \tag{4.2}$$

Из (2.2) и (3.14) имеем, что при достаточно малых $|q|$, то есть для решений уравнения (2.1), близких к тривиальному, в силу (3.12) и (3.13) выполняется неравенство

$$V(t,\, q(t)) \leqslant V(t_*,\, q(t_*)) \exp 2 \int_{t_*}^{t} \Big\{ \max_i \Big| \sqrt{|\gamma_i(t)|}\, \sin \frac{\arg \gamma_i(t)}{2} \Big| + 2 \max_i |\alpha_i(t),\, \beta_i(t)| \Big\} dt$$

Следовательно, при выполнении условия (4.1) имеет место

$$V(t,\, q(t)) < V(t_*,\, q(t_*))$$

то есть условие устойчивости на интервале $[t_*, T)$, а следовательно, и условие равномерной устойчивости невозмущенного движения на заданном интервале времени $[t_0, T)$ выполняется. Теорема доказана.

Теорема 2. *Если в какой-либо момент $t_* \in [t_0, T)$ выполняется условие*

$$\int_{t^*}^{t} \Big\{ \max_i \Big| \sqrt{|\gamma_i(t)|}\, \sin \frac{\arg \gamma_i(t)}{2} \Big| + 2 \min_i [\alpha_i(t),\, \beta_i(t)] \Big\} dt > 0 \qquad (4.3)$$

$$i = 1, \ldots, m$$

то невозмущенное движение (тривиальное решение уравнения (2.1)) не может быть равномерно устойчивым на интервале $[t_0, T)$ по отношению к области (2.7).

Доказательство. Пусть невозмущенное движение на интервале $[t_0, T)$ равномерно устойчиво по отношению к области (2.7) и при $t = t_*$ выполняется условие (4.3). Тогда, в силу предположения равномерной устойчивости, невозмущенное движение будет устойчиво на интервале $[t_*, T)$. Введем обозначение

$$\omega(t,\, q) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} \sqrt{|\gamma_i(t)|}\, \sin \frac{\arg \gamma_i(t)}{2} + (\psi - \varphi)^* D(t) (\psi - \varphi)}{|\psi|^2 + |\varphi|^2} + \frac{(\psi + \varphi)^* F(t) (\psi + \varphi)}{|\psi|^2 + |\varphi|^2}$$

Допустим, что

$$\max_i \Big| \sqrt{|\gamma_i(t_*)|}\, \sin \frac{\arg \gamma_i(t_*)}{2} \Big| = \sqrt{|\gamma_j(t_*)|}\, \sin \frac{\arg \gamma_j(t_*)}{2}$$

Рассмотрим частное решение уравнения (2.1) $q^j = \varkappa(\psi^0 + \varphi^0)$, определенное начальными условиями $\varphi(t_*) = 0$, $\psi_j(t_*) = \rho$, $\psi_l(t_*) = 0$, $l \neq j$. Будем предполагать, что t лежит в окрестности точки t_*.

Тогда, в силу непрерывности форм (3.5) и (3.8), из (3.13) и (4.3) имеем

$$\int_{t_0}^{t} w(t, q^0(t))\,dt > \int_{t_0}^{t} \left[\max_i \left| \sqrt{|\gamma_i(t)|}\, \sin \frac{\arg \gamma_i(t)}{2} - \right.\right.$$

$$\left.\left. + 2 \min_i |\alpha_i(t), \beta_i(t)| \right| \right] dt > 0$$

Следовательно, для достаточно малых ρ из (4.2) при выполнении условия (4.3) будем иметь

$$V(t, q^0(t)) > V(t_0, q^0(t_0)) \tag{4.4}$$

Наличие частных решений, вдоль которых в окрестности точки t_0 выполняется условие (4.4), позволяет утверждать, что невозмущенное движение неустойчиво. Теорема доказана.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 16 I 1978

Ս. Թ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

ՏՐՎԱԾ ԺԱՄԱՆԱԿԱՄԻՋՈՑՈՒՄ ՇԱՐԺՄԱՆ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Հոդվածում բերվում է տրված (վերջավոր) ժամանակամիջոցում շարժման կայունության որոշումը [1] և ձևակերպվում է երկրորդ կարգի m դիֆերենցիալ հավասարումներով նկարագրվող սիստեմի շարժման կայունության և անկայունության պայմանները՝ գրգռումների փոփոխման տրված տիրույթի նկատմամբ։ Նշված պայմանները ստացված են անմիջականորեն, առանց սիստեմը նորմալ տեսքի բերելու։ Այդ պատճառով զգալիորեն պարզեցվում է հաշվարկման ալգորիթմը, որովհետև կայունության և անկայունության պայմանները ստացվում են երկու անգամ փոքր կարգ ունեցող մատրիցաների միջոցով։

ON STABILITY OF MOTION AT A SPECIFIED TIME INTERVAL

S. T. KHACHATRIAN

Summary

The article presents a definition of motion stability at a specified (finite) time interval and a determination of conditions of stability and instability of undisturbed motion with respect to a prescribed domain of limiting deviations of parameters of linear part in a non-stationary system m of differential equations of the second kind without reducing them to a normal form.

Such an algorithm significantly simplifies the procedure of calculation, allowing to use matrices of twice as smaller order.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абгарян К. А.* Лекции по теории устойчивости. М., 1972.
2. *Абгарян К. А.* Матрицы и дифференциальные уравнения. (Пособие для аспирантов). М., 1971.
3. *Абгарян К. А.* Об устойчивости движения на конечном промежутке времени. ПММ, 1968, т. 32, вып. 6.
4. *Каменков Г. В.* Об устойчивости движения на конечном интервале времени. ПММ, 1953, т. 17, вып. 5.
5. *Лебедев А. А.* Об устойчивости движения на заданном интервале времени. ПММ, 1954, т. 18, вып. 2.