ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXVII, № 3, 1974 Механика

Г. Г. ОГАНЯН

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ ХИМИЧЕСКИ АКТИВНОЙ СРЕДЫ В ОКРЕСТНОСТИ КАУСТИКИ

Рассматривается задача определения параметров движения вязкой химически реагирующей неоднородной бинарной газовой смеси при наличии в ней процессов теплопроводности и диффузии в окрестности каустики, являющейся огибающей лучей фронтов волн (в приближении геометрической акустики). В зависимости от отношения времени протекания химической реакции к макроскопическому времени [1] различают два вида процессов распространения возмущений: квазиравновесный и квазизамороженный. При отсутствии теплопроводности, диффузии и химических реакций задача рассматривалась в [2, 3].

В настоящей работе методом [1] выведены нелинейные диссипативные уравнения движения среды в окрестности каустики для всех видов процессов. При этом использованы лучевые соотношения [4] и показано, что полученные уравнения верны как для однородной, так и неоднородной среды в порядке $\varepsilon=\gamma^{1/3}$, где γ — интенсивность волны вдали от каустики. Найдены давление и компоненты скорости частиц смеси в окрестности и на самой каустике в линейно-диссипативном приближении.

Интересен тот факт, что если отнести компоненты скорости частиц к некоторому множителю в интенсивности лучевого решения, характеризующему неоднородность среды или процесс релаксации, то движение в окрестности каустики для обоих процессов описывается одними и теми же уравнениями. Для случая специальных сред с близкими значениями замороженной и равновесной скоростей звука получена система уравнений, содержащая третью производную, которая [5] приводит к дисперсии волн.

1. Предположим, что в потоке химически реагирующей бинарной газовой смеси происходит только одна реакция. Уравнения движения смеси возьмем в виде [6, 7]

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v)=0 \tag{1}$$

$$\rho\frac{du}{dt}=-\frac{\partial P}{\partial x}+\eta_1\Delta u+\left(\frac{1}{3}\eta_1+\eta_2\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right) \tag{2}$$

$$\rho\frac{dv}{dt}=-\frac{\partial P}{\partial y}+\eta_1\Delta v+\left(\frac{1}{3}\eta_1+\eta_2\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right) \tag{3}$$

$$\rho\mu \frac{dc}{dt} - Q\frac{dq}{dt} = \mu \frac{\partial}{\partial x}\left[\rho D\left(\frac{\partial c}{\partial x} + \frac{k_T}{T}\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{k_P}{P}\frac{\partial P}{\partial x}\right)\right] +$$

$$+ \mu\frac{\partial}{\partial y}\left[\rho D\left(\frac{\partial c}{\partial y} + \frac{k_T}{T}\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{k_P}{P}\frac{\partial P}{\partial y}\right)\right] \tag{4}$$

$$\rho T\frac{ds}{dt} + Q\frac{dq}{dt} = \left(\frac{4}{3}\lambda_1 + \lambda_2\right)\left[\left(\frac{\partial u}{dx}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] + 2\left(\lambda_2 - \frac{2}{3}\lambda_1\right)\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} +$$

$$+ \lambda_1\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + k\Delta T + \left[k_T\left(\frac{\partial \mu}{\partial c}\right)_{P,T} - T\left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_{P,c}\right]\rho D\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial c}{\partial x} +\right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{k_T}{T}\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{k_P}{P}\frac{\partial P}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial c}{\partial y} + \frac{k_T}{T}\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{k_P}{P}\frac{\partial P}{\partial y}\right)\right\} +$$

$$+ D\left\{\left(\frac{\partial c}{\partial x} + \frac{k_T}{T}\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{k_P}{P}\frac{\partial P}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x}\rho\left[k_T\left(\frac{\partial \mu}{\partial c}\right)_{P,T} - T\left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_{P,c} + \mu\right] +\right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial c}{\partial y} + \frac{k_T}{T}\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{k_P}{P}\frac{\partial P}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial y}\rho\left[k_T\left(\frac{\partial \mu}{\partial c}\right)_{P,T} - T\left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_{P,c} + \mu\right]\right\} \tag{5}$$

$$\dot q = \frac{\partial q}{\partial t} + u\frac{\partial q}{\partial x} + v\frac{\partial q}{\partial y}, \qquad Q = \nu\mu \tag{6}$$

Здесь t — время, ρ — плотность, u и v — продольная и поперечная составляющие скорости, P — давление, T — температура, s — энтропия, Q, q и $\dot q$ — сродство, полнота и скорость химической реакции, c — концентрация, μ — химический потенциал, λ_1 и λ_2 — первый и второй коэффициенты вязкости, D, $k_T D$, $k_P D$ — коэффициенты диффузии, термодиффузии и бародиффузии, величина ν/M пропорциональна стехиометрическому коэффициенту, с которым входит первый компонент в уравнение химической реакции, M — молекулярная масса первого компонента, Δ — оператор Лапласа.

Система (1)—(5) описывает движение химически реагирующей бинарной газовой смеси с учетом в ней процессов диффузии и теплопроводности.

Чтобы замкнуть систему уравнений (1)—(5), рассмотрим соотношение Гиббса

$$Tds = de + pdV - \mu dc$$

где e — удельная внутренняя энергия, $V = 1/\rho$ — удельный объем. Первые частные производные

$$\mu = \frac{Q}{\nu} = e_1 = \left(\frac{\partial e}{\partial c}\right)_{s,V}, \quad -P = e_2 = \left(\frac{\partial e}{\partial V}\right)_{s,c}, \quad T = e_3 = \left(\frac{\partial e}{\partial s}\right)_{V,c}$$

являющиеся также уравнениями состояния среды, служат недостающими соотношениями для замыкания системы.

В состоянии термодинамического равновесия [6] $Q = q = 0$. Допустим, что вблизи этого состояния имеется аналитическая зависимость q от Q

$$\dot{q} = -\frac{1}{\tau} H_1(\rho, c)\, Q + \cdots \tag{7}$$

где коэффициент $H_1(\rho, c) > 0$ является функцией порядка единицы, τ — время протекания химической реакции.

Рассматриваемую область течения релаксирующей смеси считаем областью двумерных коротких волн [8]. Введем систему координат x_1, y_1 с началом в точке, находящейся на пересечении каустики с ударной волной и движущейся со скоростью a_1, представляющей соответствующую характерную скорость звука линейной задачи на каустике

$$\begin{aligned} x_1 &= (x - x^0)\cos\theta + (y - y^0)\sin\theta \\ y_1 &= -(x - x^0)\sin\theta + (y - y^0)\cos\theta \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь (x^0, y^0) — координаты центра подвижных координат (x_1, y_1) в системе (x, y). Координатные линии $x_1 = 0$ и $y_1 = 0$ направлены соответственно по внутренней нормали и по касательной к каустике в сторону движения фронта волны. Причем $\dfrac{\partial x^0(t)}{\partial t} = a_1\cos\theta$, $\dfrac{\partial y^0(t)}{\partial t} = a_1\sin\theta$, $\theta(t)$ — угол наклона касательной к каустике в точке (x^0, y^0) луча к оси Ox.

Для проекций u_1, v_1 скорости частиц смеси на направления подвижной системы координат получаем

$$u_1 = u\cos\theta - v\sin\theta, \qquad v_1 = -u\sin\theta + v\cos\theta \tag{9}$$

В дальнейшем производится сжатие координат (x_1, y_1)

$$x_1 = \varepsilon^{1/2} x_1', \qquad y_1 = \varepsilon y_1' \tag{10}$$

Преобразования (8)—(10) позволяют рассматривать течение газовой смеси в узкой области волны, которая фактически представляет собой структуру размытого ударного фронта.

Допустим, что разность значений всех параметров возмущенной и невозмущенной газовой смеси мала. Невозмущенные величины обозначим нулевым индексом

$$\begin{aligned} &P = P_0 + \varepsilon P', \quad \rho = \rho_0 + \varepsilon\rho', \quad s = s_0 + \varepsilon s', \quad T = T_0 + \varepsilon T', \quad Q = \varepsilon Q' \\ &q = q_0 + \varepsilon q', \quad c = c_0 + \varepsilon c', \quad a = a_0 + \varepsilon a', \quad u_1 = \varepsilon u_1', \quad v_1 = \varepsilon^{3/2} v_1' \end{aligned} \tag{11}$$

В выражениях (10)—(11) величина ε есть малый параметр. Между невозмущенной (линейной) скоростью звука a_0 и скоростью звука a_1 на каустике существует связь [9]

$$a_n = a_1 - a_1 K_r y_1 \qquad (12)$$

где K_r — кривизна луча в рассматриваемой точке.

При выводе последующих уравнений во всех случаях будем удерживать лишь главные члены и в окончательных уравнениях делать переход к переменным (9)—(10).

1. *Квазиравновесный процесс*

За независимые переменные примем плотность ρ, давление P, сродство Q. Аналогично [1], для давления P получим

$$\frac{\partial P}{\partial t} - a_e^2 \frac{d\rho}{dt} = \frac{ds}{dt} \left(\frac{ds}{dP}\right)^{-1}_{\rho,\,Q} + \left(\frac{dP}{\partial Q}\right)_{\rho,\,s} \frac{dQ}{dt}, \qquad a_e = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)^{1/2}_{s,\,Q}$$

Здесь a_e — равновесная скорость звука. Комбинируя это соотношение с уравнениями (1), (3), (4), можно получить

$$\frac{dP}{dt} + u \frac{\partial P}{\partial x} + v \frac{\partial P}{\partial y} + \rho a_e^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = L_{2e} + L_{3e} - L_{4e} \qquad (13)$$

где

$$L_{2e} = \left(\frac{\partial P}{\partial s}\right)_{\rho,\,Q} \frac{1}{\rho T} \left\{ k\Delta T + \left(\frac{4}{3}\lambda_1 + \lambda_2\right)\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] + \right.$$

$$\left. + \lambda_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \cdots \right\}$$

$$L_{3e} = \left(\frac{\partial P}{\partial Q}\right)_{\rho,\,s} \left(\frac{\partial Q}{\partial t} + u\frac{\partial Q}{\partial x} + v\frac{\partial Q}{\partial y}\right) - \frac{Q}{\rho T}\left(\frac{\partial P}{\partial s}\right)_{\rho,\,Q} \left(\frac{\partial q}{\partial t} + u\frac{\partial q}{\partial x} + v\frac{\partial q}{\partial y}\right)$$

$$L_{4e} = \frac{D}{T}\left(\frac{\partial P}{\partial s}\right)_{\rho,\,Q} \left[k_T\left(\frac{\partial \mu}{\partial c}\right)_{P,\,T} - T\left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_{P,\,c}\right] \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial c}{\partial x} + \frac{k_T}{T}\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{k_P}{P}\frac{\partial P}{\partial x}\right) + \right.$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial c}{\partial y} + \frac{k_T}{T}\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{k_P}{P}\frac{\partial P}{\partial y}\right)\bigg\} + \frac{D}{\rho T}\left(\frac{\partial P}{\partial s}\right)_{\rho,\,Q} \left\{\left(\frac{\partial c}{\partial x} + \frac{k_T}{T}\frac{\partial T}{\partial x} + \right.\right.$$

$$+ \frac{k_P}{P}\frac{\partial P}{\partial x}\bigg)\frac{\partial}{\partial x}\rho\left[k_T\left(\frac{\partial \mu}{\partial c}\right)_{P,\,T} - T\left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_{P,\,c} + \mu\right] + \left(\frac{\partial c}{\partial y} + \frac{k_T}{T}\frac{\partial T}{\partial y} + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{k_P}{P}\frac{\partial P}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial y}\rho\left[k_T\left(\frac{\partial \mu}{\partial c}\right)_{P,\,T} - T\left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_{P,\,c} + \mu\right]\right\}$$

Приращение температуры представим в виде

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_{\rho,\,Q} \left[dP - \frac{1}{\gamma_e} a_e^2 d\rho - \left(\frac{\partial P}{\partial Q}\right)_{\rho,\,T} dQ\right], \qquad \gamma_e = \frac{c_{P,\,Q}}{c_{V,\,Q}} \qquad (14)$$

где $c_{P,\,Q}$ — удельная теплоемкость при постоянном давлении и сродстве, $c_{V,\,Q}$ — удельная теплоемкость при постоянном объеме и сродстве

Пусть $a_0 = a_{e0}$, то есть рассматриваемая двумерная короткая волна с узкой возмущенной зоной движется с равновесной скоростью звука в покоящейся среде. Примем

$$a_e = a_{e0} + \varepsilon a_e' \tag{1.3}$$

В дальнейшем штрихи над всеми величинами опускаем.

Преобразования (8) — (10) и последующая линеаризация посредством (11) уравнений (1) и (2) дают

$$\rho = \frac{\rho_0}{a_{e1}} u_1 = \frac{1}{a_{e1}^2} P \tag{1.4}$$

Аналогичным образом из уравнения (3) получем

$$\rho_0 a_{e1} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} = \frac{\partial P}{\partial y_1}$$

Отсюда с учетом второго равенства из (1.4) находим

$$\frac{\partial u_1}{\partial y_1} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \tag{1.5}$$

то есть в окрестности пересечения фронта волны с каустикой движение смеси потенциальное.

Для отклонения давления $P = P(\rho, Q, s)$ от значения вблизи положения равновесия можно получить

$$P = a_{e0}^2 \rho + \left(\frac{\partial P}{\partial s_0}\right)_{\rho, Q} s + \left(\frac{\partial P}{\partial Q_0}\right)_{\rho, s} Q$$

Чтобы приведенное соотношение совпало с (1.4), необходимо потребовать

$$s = 0, \qquad Q = 0 \tag{1.6}$$

Преобразование и последующая линеаризация с помощью (8) — (11) соотношений (6) и (7) дают

$$\frac{\partial q}{\partial x_1} = N_e H_{10} Q, \qquad N_e = \frac{L}{\tau a_{e1}}, \qquad H_{10} = \frac{H_{10}}{L_1} \tag{1.7}$$

где $L = \varepsilon^{3/2} L_1$, L_1, имеющая размерность длины, есть величина порядка единицы.

Из (1.6) видно, что возмущенные энтропия и сродство — малые более высокого порядка, чем остальные возмущенные параметры. Более точная оценка показывает, что $s \sim \varepsilon^{3/2}$, $Q \sim \varepsilon^{3/2}$. Тогда из (1.7) получим условие $H_{1e} \gg 1$ или $\tau \sim \varepsilon^3$. Таким образом, в квазиравновесном процессе время протекания химической реакции много меньше макрофизического времени L/a_{e1}.

Линеаризируя уравнение (1.1) и учитывая соотношения (1.2), (1.6) и (1.4), получим

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial P_0}\right)_{\rho, Q}\left(1 - \frac{1}{\chi_e}\right)\rho_0 a_{e1}\, du_1 \qquad (1.8)$$

Применение преобразований (8)—(11) к уравнению (4) и учет соотно-шения (1.7) дают

$$\frac{\partial c}{\partial x_1} = -\frac{\nu}{\rho_0} N_e H_{10} Q \qquad (1.9)$$

Разлагая $c = c(\rho, Q, s)$ в ряд Тейлора вблизи положения равновес[ия], учитывая требования (1.6) и соотношения (1.4), получим

$$c = \left(\frac{\partial c}{\partial \rho_0}\right)_{Q, s} \frac{\rho_0}{a_{e1}} u_1 \qquad (1.10)$$

Аналогичным образом для приращения равновесной скорости звука на-ходим

$$a_e = (\alpha_e^0 - 1) u_1, \qquad \alpha_e^0 = \left| \frac{\partial}{\partial \rho_0}(a_e \rho) \right|_{Q, s} \qquad (1.11)$$

Преобразуя посредством (8)—(11) уравнение (1.1), учитывая линеари-зованное уравнение (2) и соотношения (1.8)—(1.11) и затем переход[я] к переменным x_1, y_1, u_1, v_1 (без штрихов), получим

$$\left(2y_1 \frac{\partial \theta}{\partial t} - 2a_{e1}\frac{y_1}{R_r} + 2\frac{\alpha_e^0}{\sqrt{\rho_0 a_{e1}}}\bar{u}_1\right)\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} + a_{e1}\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial y_1} + 2\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t} =$$
$$= \Bigg\{\left(\frac{4}{3}\eta_1 + \eta_2\right)\frac{1}{\rho_0} + \frac{k}{\rho_0 T_0}\left(\frac{\partial P}{\partial s_0}\right)_{\rho, Q}\left(\frac{\partial T}{\partial P_0}\right)_{\rho, Q}\left(1 - \frac{1}{\chi_e}\right) -$$
$$- \frac{\tau \rho_0}{\nu H_{10}}\left(\frac{\partial P}{\partial Q_0}\right)_{\rho, s}\left(\frac{\partial c}{\partial \rho_0}\right)_{Q, s} + B_{e0}\Bigg| \frac{D}{a_{e1}^2}\left(\frac{\partial c}{\partial \rho_0}\right)_{Q, s} +$$
$$+ \frac{k_T D}{T_0}\left(\frac{\partial T}{\partial P_0}\right)_{\rho, Q}\left(1 - \frac{1}{\chi_e}\right) + \frac{k_P D}{P_0}\Bigg|\Bigg\}\frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial x_1^2} \qquad (1.12)$$

Здесь $B_{e0} = \left(\frac{\partial P}{\partial s_0}\right)_{\rho, Q}\left[\frac{k_T}{T_0}\left(\frac{\partial \mu}{\partial c_0}\right)_{P, T} - \left(\frac{\partial \mu}{\partial T_0}\right)_{P, c}\right]$, $R_r = K_r^{-1}$ — рад[иус] кривизны луча в рассматриваемой точке, $\bar{u}_1 = \sqrt{\rho_0 a_{e1}}\, u_1$, $\bar{v}_1 = \sqrt{\rho_0 a_{e1}}\, v_1$.

Уравнение (1.12) совместно с уравнением (1.5) описывает движен[ие] смеси в окрестности каустики. При отсутствии химических реакц[ий], теплопроводности и диффузионных эффектов оно совпадает с уравн[е]нием, полученным в [3].

Вводя потенциал скорости $\varphi(x_1, y_1)$, из системы (1.12) и (1.5) получим

$$\left(2a_{e1}\frac{y_1}{R} + 2\frac{\alpha_e^0}{\sqrt{\rho_0 a_{e1}}}\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + a_{e1}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2} + 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial t} = \delta\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_1^3} \qquad (1.13)$$

где $1/R = 1/R_k - 1/R_l$ — разность кривизн каустики и луча, $\frac{1}{R_k} = \frac{1}{a_{e1}}\frac{\partial\vartheta}{\partial t} = \frac{\partial\vartheta}{\partial l}$, l — элемент дуги каустики, δ — выражение в фигурной скобке в уравнении (1.12).

Исследуем полученное уравнение.

а) Пусть нелинейный и диссипативный эффекты пренебрежимо малы по сравнению с линейным. Уравнение (1.13) приведется к виду

$$2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial t} + 2a_{e1}\frac{y_1}{R}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + a_{e1}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1^2} = 0 \qquad (1.14)$$

Отметим, что уравнение (1.14) можно также получить вышеприведенным методом из акустического уравнения потенциала для неоднородной среды [10]

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - a_0^2\Delta\Phi + \frac{a_0^2}{\rho_0}\left(\frac{\partial\rho_0}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\rho_0}{\partial y}\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) = 0 \qquad (1.15)$$

которое заменой $\Phi = \rho_0^{1/2}\Phi'$ приводится с точностью до недифференцируемых слагаемых с Φ', не влияющих на решение вблизи каустики, к волновому уравнению. Последнее путем замены $\Phi' = a_{e1}^{-1/2}\varphi$ приводится в переменных (9), (10) к уравнению (1.14). Заметим, что для давления $P = -\rho_0\partial\Phi/\partial t$ получится уравнение (1.15) с обратным знаком перед третьим слагаемым. Замена $P = \sqrt{\rho_0}\,P_1$ приводит с точностью до недифференцируемых членов к волновому уравнению для P_1. Периодическое по времени решение волнового уравнения вблизи каустики определено в [9, 11, 12], нестационарное — в [4, 9, 13, 14].

Компоненты скорости по нормали и по касательной к фронту слабой ударной волны имеют вид

$$u_1 = (\rho_0 a_{e1})^{-1/2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} = \frac{P}{\rho_0 a_{e1}}, \qquad v_1 = (\rho_0 a_{e1})^{-1/2}\frac{\partial\varphi}{\partial y_1} \qquad (1.16)$$

Для скачкообразной падающей волны решение для давления имеет вид [11]

$$\frac{P}{A_1}(-y_1)^{1/4} = \begin{cases} P_{-1/6}\left(\frac{x_1}{\alpha_1}\right) & \text{при} \quad x_1 > \alpha_1 \\ 2P_{-1/6}\left(\frac{x_1}{\alpha_1}\right) & \text{при} \quad -\alpha_1 < x_1 < \alpha_1 \\ \sqrt{3}\,P_{-1/6}\left(-\frac{x_1}{\alpha_1}\right) + \frac{2}{\pi}Q_{-1/6}\left(-\frac{x_1}{\alpha_1}\right) & \text{при} \quad x_1 < -\alpha_1 \end{cases} \qquad (1.17)$$

причем имеет место [15]

$$2P_{-1/6}\left(\frac{x_1}{z_1}\right)=\sqrt{3}\,P_{-1/6}\left(-\frac{x_1}{z_1}\right)+\frac{2}{\pi}\,Q_{-1/6}\left(-\frac{x_1}{z_1}\right)$$

Здесь $P_{-1/6}$, $Q_{-1/6}$ — функции Лежандра. $P_{лин}=A_1(-y_1)^{-1/4}$ есть лучевое решение вдали от каустики, $z_1=\frac{2}{3}(-y_1)^{3/2}\left(\frac{2}{R}\right)^{1/2}$. Из (1.17) видно, что оно удовлетворяет (1.14), в котором отбрасывается первое слагаемое, то есть в порядке $\varepsilon^{1/3}=\gamma^{1/3}$ (линейное решение) движения в переменных (9), (10) — установившееся.

б) Пусть теперь в уравнении (1.13) малы только нелинейные эффекты. Уравнение (1.13) примет вид

$$2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial t}+2a_{e1}\frac{y_1}{R}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}+a_{e1}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1^2}=\delta\frac{\partial^3\varphi}{\partial x_1^3}\qquad(1.18)$$

Решение уравнения (1.18) будем искать в виде ($\delta=\text{const}$)

$$\varphi=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_0(x_1-\tau,\ y_1,\ t)(2\pi\delta t)^{-1/2}\exp\left(-\frac{\tau^2}{2\delta t}\right)d\tau\qquad(1.19)$$

Предполагая, что $\varphi_0(x_1, y_1, t)$ есть решение (1.14), легко можно показать, что φ удовлетворяет уравнению (1.18). Поскольку для давления $P=\sqrt{\rho_0 a_{e1}}\,\partial\varphi/\partial x$ также имеет место свертка (1.19), то, взяв для P_0 значение (1.17), получим

$$\frac{P}{A_1}(-y_1)^{1/4}(2\pi\delta t)^{1/2}=\int_{-\infty}^{x_1-z_1}P_{-1/6}\left(\frac{x_1-\tau}{z_1}\right)\exp\left(-\frac{\tau^2}{2\delta t}\right)d\tau+$$

$$+2\int_{x_1-z_1}^{x_1+z_1}P_{-1/6}\left(\frac{x_1-\tau}{z_1}\right)\exp\left(-\frac{\tau^2}{2\delta t}\right)d\tau+\int_{x_1+z_1}^{\infty}\left[\sqrt{3}\,P_{-1/6}\left(\frac{-x_1+\tau}{z_1}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{2}{\pi}Q_{-1/6}\left(\frac{-x_1+\tau}{z_1}\right)\right]\exp\left(-\frac{\tau^2}{2\delta t}\right)d\tau\qquad(1.20)$$

Вычислим по (1.20) давление в окрестности каустики $y_1=0$. Используя разложение функций Лежандра по отрицательным степеням аргументов, легко вычислим путем замены переменной $x_1-\tau=-\tau$ особые интегралы [16]. Затем вычисляем с помощью перемножения степенных рядов интеграл

$$\int_{x_1}^{x_1-z_1}(x_1-\tau)^{-2m-1/6}\exp\left(-\frac{\tau^2}{2\delta t}\right)d\tau=$$

$$=-\exp\left(-\frac{x_1^2}{2\delta t}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n-2m+\frac{5}{6}}\,z_1^{\,n-2m+5/6}$$

где

$$k = \frac{1}{6},\ \frac{5}{6}, \qquad c_{2n} = (2\delta t)^{-2n} \sum_{s=0}^{n} \frac{(2x_1)^{2s}}{(2s)!\,(2n-2s)!} \tag{1.21}$$

$$c_{2n+1} = (2\delta t)^{-2n-1} \sum_{s=0}^{n} \frac{(2x_1)^{2s+1}}{(2s+1)!\,(2n-2s)!}$$

Аналогично вычисляется второй интеграл в (1.20), который разбивается на интегралы в пределах $(x_1 - \alpha_1,\ x_1)$ и $(x_1,\ x_1 + \alpha_1)$, причем разложение функций Лежандра берется по положительным степеням аргументов и для второго интеграла имеет место $c_n(-x_1) = (-1)^n c_n(x_1)$.

Итак, решение (1.20) в окрестности каустики запишется в виде

$$P = A_2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^{-2m}\alpha_1^{2m}}{\Gamma\left(\frac{2}{3}+m\right) m!} (\delta t)^{-m} \left[D_{2m-\frac{1}{6}}\left(-\frac{x_1}{\sqrt{\delta t}}\right) + \right.$$

$$\left. + \sqrt{3}\, D_{2m-\frac{1}{6}}\left(\frac{x_1}{\sqrt{\delta t}}\right)\right] - A_2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2^{-2m-2/3}\alpha_1^{2m+2/3}}{\Gamma\left(\frac{4}{3}+m\right) m!} (\delta t)^{-m-1/3} \times$$

$$\times \left[D_{2m-\frac{5}{6}}\left(-\frac{x_1}{\sqrt{\delta t}}\right) - \sqrt{3}\, D_{2m-\frac{5}{6}}\left(\frac{x_1}{\sqrt{\delta t}}\right)\right] + A_3 \sum_{n=0}^{\infty} c_n \alpha_1^{n+1/6} \times$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{11}{12}+m\right)\Gamma\left(\frac{5}{12}+m\right)}{\left(n-2m+\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{4}{3}+m\right) m!} - \frac{\Gamma\left(\frac{7}{12}+m\right)\Gamma\left(\frac{1}{12}+m\right)}{\left(n-2m+\frac{5}{6}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}+m\right) m!} \right] -$$

$$-\frac{A_3}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n \alpha_1^{n+1/6} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{11}{12}+m\right)\Gamma\left(\frac{5}{12}+m\right)}{\left(n-2m+\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(\frac{4}{3}+m\right) m!} - \right.$$

$$\left. - \frac{\Gamma\left(\frac{7}{12}+m\right)\Gamma\left(\frac{1}{12}+m\right)}{\left(n-2m+\frac{5}{6}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}+m\right) m!} \right] + \frac{A_3}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} \alpha_1^{n+5/6} \times$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{5}{12}+m\right)\Gamma\left(\frac{1}{12}+m\right)}{(n-2m+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}+m\right) m!} - \frac{\Gamma\left(\frac{11}{12}+m\right)\Gamma\left(\frac{5}{12}+m\right)}{(n-2m+2)\Gamma\left(\frac{3}{2}+m\right) m!} \right] \tag{1.22}$$

где

$$A_2 = 2^{1/3} 3^{-1/2} A_1 \left(\frac{2}{R}\right)^{1/12} (\delta t)^{-1/6} \exp\left(-\frac{x_1^2}{4\delta t}\right)$$

$$A_3 = 2^{-1/4} A_2 \pi^{1/4} (\delta t)^{-1/4} \exp\left(-\frac{x_1^2}{4\delta t}\right)$$

а $D_{2m-k}\left(\frac{x_1}{\sqrt{\delta t}}\right)$ — функции параболического цилиндра.

Из (1.22) по (1.4) получается значение для u_1. Решение для потенциала $\sqrt{\rho_0 a_0}\,\varphi(x_1, y_1)$ дается (1.19), причем значение φ_0 берется из [4] при $k_1 = 1$. Тогда, аналогично вычислениям в (1.20), можно выразить компоненту скорости $v_1 = \partial\varphi/\partial y_1$ через формулу, подобную (1.22). При $x_1 = 0$, то есть на самой каустике, полученные формулы еще более упрощаются.

Рассмотрим сходимость полученных рядов типа (1.22). Для рядов, содержащих функции D_{2m-k}, используя их выражения через вырожденные гипергеометрические функции [15], а также асимптотические выражения этих функций [17], можно показать, что они сходятся для всех y_1. Легко проверить, что в последних слагаемых внутренний ряд сходится. Что же касается внешнего ряда, то из (1.21) видно, что

$$c_n < \frac{(1+2x_1)^{2n}}{(2n)!}$$

то есть внешний ряд также сходится. Сходимость рядов типа (1.22) для всех y_1 доказана.

2. *Квазизамороженный процесс*

Примем за независимые переменные плотность ρ, давление P, концентрацию c. Аналогично [1], для давления получим

$$\frac{dP}{dt} - a_f^2 \frac{d\rho}{dt} = \left(\frac{\partial P}{\partial s}\right)_{\rho, c} \frac{ds}{dt} + \left(\frac{\partial P}{\partial c}\right)_{\rho, s} \frac{dc}{dt}, \qquad a_f = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{s, c}^{1/2} \tag{2.1}$$

Здесь a_f — замороженная скорость звука. Аналогично выводу (1.1), из (2.1) получаем альтернативную форму

$$\frac{\partial P}{\partial t} + u\frac{\partial P}{\partial x} + v\frac{\partial P}{\partial y} + \rho a_f^2\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = L_{2f} + L_{3f} + L_{4f} \tag{2.2}$$

где

$$L_{2f} = \left(\frac{\partial P}{\partial s}\right)_{\rho, c} \left(\frac{\partial P}{\partial s}\right)_{\rho, Q}^{-1} L_{2r}$$

$$L_{3f} = \left[\frac{\nu}{\rho}\left(\frac{\partial P}{\partial c}\right)_{\rho, s} - \frac{Q}{\rho T}\left(\frac{\partial P}{\partial s}\right)_{\rho, c}\right]\left(\frac{\partial q}{\partial t} + u\frac{\partial q}{\partial x} + v\frac{\partial q}{\partial y}\right)$$

$$L_{4f} = \left\{\left(\frac{\partial P}{\partial c}\right)_{\rho, s} + \frac{1}{T}\left(\frac{\partial P}{\partial s}\right)_{\rho, c}\left[k_T\left(\frac{\partial \mu}{\partial c}\right)_{P, T} - T\left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_{P, c}\right]\right\} \times$$

$$\times D\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial c}{\partial x} + \frac{k_T}{T}\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{k_P}{P}\frac{\partial P}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial c}{\partial y} + \frac{k_T}{T}\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{k_P}{P}\frac{\partial P}{\partial y}\right)\right\} +$$

$$+\frac{D}{\rho T}\left(\frac{\partial P}{\partial s}\right)_{\rho, c}\left\{\left(\frac{\partial c}{\partial x}+\frac{k_T}{T}\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{k_P}{P}\frac{\partial P}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x}\rho\left[k_T\left(\frac{\partial \mu}{\partial c}\right)_{P,T}-T\left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_{P,c}-\mu\right]+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial c}{\partial y}+\frac{k_T}{T}\frac{\partial T}{\partial y}+\frac{k_P}{P}\frac{\partial P}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial y}\rho\left[k_T\left(\frac{\partial \mu}{\partial c}\right)_{P,T}-T\left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_{P,c}+\mu\right]\right\}$$

Приращение температуры напишем в виде

$$dT=\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_{\rho, c}\left[dP-\frac{1}{\chi_f}a_f^2 d\rho-\left(\frac{\partial P}{\partial c}\right)_{\rho, T}dc\right], \qquad \chi_f=\frac{c_{P,c}}{c_{V,c}} \tag{2.3}$$

где $c_{P,c}$ — удельная теплоемкость при постоянном давлении и концентрации, $c_{V,c}$ — удельная теплоемкость при постоянном объеме и концентрации.

Пусть теперь $a_0=a_{f0}$, то есть скорость движения двумерной короткой волны по покоящейся смеси равна замороженной скорости звука. Примем

$$a_f=a_{f0}+\varepsilon a_f' \tag{2.4}$$

Как и в п. 1, штрихи над всеми переменными опускаем.

С учетом (12), для отклонения давления $P=P(\rho, s, c)$ от равновесного значения в покоящейся среде имеем

$$P=a_{f1}^2\rho+\left(\frac{\partial P}{\partial s_0}\right)_{\rho, c}s+\left(\frac{\partial P}{\partial c_0}\right)_{\rho, s}c \tag{2.5}$$

Преобразования (8)—(10), последующая линеаризация (11) уравнений (1)—(2) и интегрирование снова приводят к соотношениям (1.4) с заменой a_{e1} на a_{f1}, где a_{f1} — замороженная скорость звука на каустике. Тогда сравнение с (2.5) приводит к требованию

$$s=0, \qquad c=0 \tag{2.6}$$

Иными словами, в рассматриваемом приближении сжатие газовой смеси происходит обратимо не только при постоянном сродстве, но и концентрации реагирующей смеси.

Как и в п. 1, выполняются условие (1.5) потенциальности движения газовой смеси в окрестности каустики и соотношение (1.7), в котором необходимо заменить N_e на N_f, $N_f=L/\tau a_{f1}$. Из (2.6) видно, что возмущенные энтропия и концентрация — величины более высокого порядка малости, чем остальные возмущенные параметры ($s\sim\varepsilon^{3/2}$, $c\sim\varepsilon^{3/2}$). Преобразуя и производя линеаризацию уравнения (4) посредством (8)—(11), убеждаемся, что $q\sim c\sim\varepsilon^{3/2}$. Тогда из (1.7) получаем условие $N_f\ll 1$, т. е. в квазизамороженном процессе время протекания химической реакции τ много больше макроскопического времени L/a_{f1}.

Согласно требованию (2.6), соотношениям (1.4) и (12), для дифференциала возмущения температуры из (2.3) получим

$$dT = \left(\frac{\partial T}{\partial P_0}\right)_{s,c}\left(1 - \frac{1}{\chi_f}\right)\rho_0 a_{f1} du_1 \tag{2.7}$$

Преобразования (8)—(10) и линеаризация (11) приводят уравнение (4) к виду

$$\frac{\partial c}{\partial x_1} = \frac{\nu}{\rho_0}\frac{\partial q}{\partial x_1} - \frac{k_T D}{T_0 a_{f1}}\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} - \frac{k_P D}{P_0 a_{f1}}\frac{\partial^2 P}{\partial x_1^2} \tag{2.8}$$

В рассматриваемом приближении [1]

$$Q = \left(\frac{\partial Q}{\partial \rho_0}\right)_{s,c}\frac{\rho_0}{a_{f1}}u_1, \quad a_f = (\alpha_f^0 - 1)u_1, \quad \alpha_f^0 = \left[\frac{\partial}{\partial \rho_0}(\rho a_f)\right]_{s,c} \tag{2.9}$$

Выражая (2.8) с помощью (1.4), (1.7), (2.7), (2.9) через скорость частиц смеси, подставляя полученное соотношение, а также (2.7), (2.9) в преобразованное посредством (8)–(11) уравнение (2.2), получим, возвращаясь к переменным u_1, v_1, x_1, y_1 (без штрихов),

$$\begin{gathered}
\left(2\frac{y_1}{R}a_{f1} + 2\frac{\alpha_f^0}{\sqrt{\rho_0 a_{f1}}}\bar{u}_1\right)\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} + a_{f1}\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial y_1} + 2\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t} + \\
+ \frac{\nu H_{10}}{\rho_0 a_{f1}^2}\left(\frac{\partial P}{\partial c_0}\right)_{\rho,s}\left(\frac{\partial Q}{\partial \rho_0}\right)_{s,c}\bar{u}_1 = \\
= \left\{\left(\frac{4}{3}\lambda_1 + \lambda_2\right)\frac{1}{\rho_0} + \frac{k}{\rho_0 T_0}\left(\frac{\partial P}{\partial s_0}\right)_{\rho,c}\left(\frac{\partial T}{\partial P_0}\right)_{s,c}\left(1 - \frac{1}{\chi_f}\right) + \right. \\
+ \left[B_{f0} + \left(\frac{\partial P}{\partial c_0}\right)_{\rho,s}\right]\frac{k_T D}{T_0}\left(\frac{\partial T}{\partial P_0}\right)_{s,c}\left(1 - \frac{1}{\chi_f}\right) + \\
\left. + \left[B_{f0} + \left(\frac{\partial P}{\partial c_0}\right)_{\rho,s}\right]\frac{k_P D}{P_0}\right\}\frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial x_1^2}
\end{gathered} \tag{2.10}$$

Здесь

$$B_{f0} = \left[k_T\left(\frac{\partial \mu}{\partial c}\right)_{P,T}\frac{1}{T_0} - \left(\frac{\partial \mu}{\partial T_0}\right)_{P,c}\right]\left(\frac{\partial P}{\partial s_0}\right)_{\rho,c}$$

$$\bar{u}_1 = \sqrt{\rho_0 a_{f1}}\, u_1, \qquad \bar{v}_1 = \sqrt{\rho_0 a_{f1}}\, v_1$$

R^{-1} — разность кривизн каустики и луча.

Уравнение (2.10) совместно с (1.5) описывает движение газовой смеси в окрестности каустики в случае квазизамороженного процесса.

Обозначая

$$\tau = \frac{\nu H_{10}}{\rho_0 a_{f1}^2}\left(\frac{\partial P}{\partial c_0}\right)_{\rho,s}\left(\frac{\partial Q}{\partial \rho_0}\right)_{s,c}, \qquad u = \bar{u}_1 e^{\frac{\tau}{2}t}, \qquad v = \bar{v}_1 e^{\frac{\tau}{2}t}$$

и вводя, согласно (1.5), потенциал скорости $\varphi(x_1, y_1, t)$, уравнение (2.10) приведем к виду

$$\left(2\frac{y_1}{R}a_{f1}-2e^{-\frac{\gamma}{2}t}\frac{\varepsilon_f^0}{1+\gamma_0 a_{f1}}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}+a_{f1}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1^2}-2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial t}=\delta\frac{\partial^3\varphi}{\partial x_1^3} \quad (2.11)$$

где δ равняется выражению в фигурной скобке из (2.10). Отсюда видно, что без учета нелинейных членов уравнение (2.11) совпадает с (1.13), в котором a_{e1} должно быть заменено на a_{f1}. Тогда, рассуждая как в п. 1, можно получить решения (1.17) и (1.22) в окрестности каустики, где δ уже дается правой частью уравнения (2.10).

3. *Среды с близкими скоростями звука*

Из уравнения состояния среды можно найти связь между замороженной и равновесной скоростями звука [1]

$$a_f^2-a_e^2=\frac{1}{\rho^2}\frac{e_{12}^2}{e_{11}}\geqslant 0, \qquad e_{12}=\left(\frac{\partial^2 e}{\partial V\,\partial c}\right)_s, \qquad e_{11}=\left(\frac{\partial^2 e}{\partial c^2}\right)_{V,s}$$

Знак неравенства ставится, исходя из условия термодинамической устойчивости системы. Видно, что a_e можем достичь значения a_f только при $e_{12}=0$.

Пусть значения скоростей a_f и a_e в покоящейся среде близки. Тогда величина $e_{12}=e_{120}$ в покоящейся среде мала. Положим

$$e_{120}=\varepsilon_u e'_{120} \quad (3.1)$$

Здесь ε_u — новый малый параметр.

При последующем упрощении уравнений движения среды необходимо в (11) сделать замену

$$q'\to\varepsilon_u q', \qquad Q'\to\varepsilon_u Q', \qquad c'\to\varepsilon_u c' \quad (3.2)$$

Как и в п. 1, 2, штрихи над возмущенными параметрами опускаем и при упрощении уравнений удерживаем лишь главные члены.

Так как невозмущенная (линейная) скорость a_0 не совпадает со скоростями a_{f0} и a_{e0}, значения которых близки, то положим

$$a_0-a_{f0}=\varepsilon_u^2 a_0\sigma_{f1}, \qquad a_0-a_{e0}=\varepsilon_u^2 a_0\sigma_{e1} \quad (3.3)$$

где σ_{e1}, σ_{f1} — постоянные порядка единицы.

После преобразований (8)—(11) уравнения (5) в порядке до ε_u^2 имеем $s=0$ $(s\sim\varepsilon\varepsilon_u^2)$.

Аналогично [1], можно показать, что в порядке до $\varepsilon=\varepsilon_u^2$ отклонения давлений (2.5) и (1.6) совпадают друг с другом и равны (1.4) с заменой a_{e1} на a_{f1}.

Согласно уравнению (4), в порядке до ε_u^2 имеем

$$\frac{\partial c}{\partial x_1}=\frac{\nu}{\nu_0}\frac{\partial q}{\partial x_1} \quad (3.4)$$

Разлагая $Q(\rho, s, c)$ в ряд Тейлора вблизи положения термодинамического равновесия, можно найти

$$Q = \nu e_{110} c - \frac{\nu}{\rho_0^2} e_{120} \rho' \tag{3.5}$$

Комбинация (3.4) с (1.7), (3.5) и (1.4) дает

$$\frac{\partial q}{\partial x_1} = \frac{H_{10}}{\tau}\left(\frac{\nu^2 e_{110}}{\rho_0 a_1} q - \frac{\nu e_{120}}{\rho_0 a_1^2} u_1\right) \tag{3.6}$$

Как и прежде, выполняется условие потенциальности движения (1.5). Учитывая (12) и вторую формулу из (3.3), путем преобразований (8)—(11) уравнение (1.1) приводится к виду

$$2\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1\frac{\partial}{\partial t}\ln(\rho_0 a_1) + \left(2y_1\frac{\partial \delta}{\partial t} - 2a_1\frac{y_1}{R_r} + 2\alpha_f^0 u_1\right)\frac{\partial u_1}{\partial x_1} +$$

$$+ a_1\frac{\partial v_1}{\partial y_1} - 2a_1\sigma_{e1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \left(\frac{4}{3}\lambda_1 + \lambda_2\right)\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{k}{\rho_0^2 a_1 T_0}\left(\frac{\partial P}{\partial s_0}\right)_{\rho, Q}\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} +$$

$$+ \frac{e_{120}}{\nu\rho_0 e_{110}}\frac{\partial Q}{\partial x_1} + \frac{k_T D}{\rho_0 a_1}\frac{B_{f0}}{T_0}\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} - \frac{k_P D}{\rho_0 a_1}\frac{B_{f0}}{P_0}\frac{\partial^2 P}{\partial x_1^2} \tag{3.7}$$

Аналогичные упрощения над уравнением (2.2) приводят его к виду, который, как легко показать [1], совпадает с уравнением (3.7).

Из уравнений (3.7) и (3.6), исключая полноту реакции q, получим ($\bar{u}_1 = \sqrt{\rho_0 a_1}\, u_1$, $\bar{v}_1 = \sqrt{\rho_0 a_1}\, v_1$)

$$2\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t} + \left(2\frac{y_1}{R}a_1 - 2a_1\sigma_{e1} + 2\frac{\alpha_f^0}{\sqrt{\rho_0 a_1}}\bar{u}_1\right)\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} + a_1\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial y_1} -$$

$$- \frac{\tau}{H_{10}}\frac{e_{120}^2}{\nu^2\rho_0 e_{110}^2}\frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial x_1^2} = \left\{\left(\frac{4}{3}\lambda_1 + \lambda_2\right)\frac{1}{\rho_0} + \left(\frac{\partial T}{\partial P_0}\right)_{\rho, c}\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\left[\frac{k}{\rho_0 T_0}\left(\frac{\partial P}{\partial s_0}\right)_{\rho, c} +\right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{k_T D}{T_0}B_{f0}\right] + \frac{k_P D}{P_0}B_{f0}\right\}\frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial x_1^2} + \frac{\tau}{H_{10}}\frac{\rho_0 a_1}{\nu^2 e_{110}}\left\{\left(\frac{4}{3}\lambda_1 + \lambda_2\right)\frac{1}{\rho_0} +\right.$$

$$+ \left(\frac{\partial T}{\partial P_0}\right)_{\rho, c}\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\left[\frac{k}{\rho_0 T_0}\left(\frac{\partial P}{\partial s_0}\right)_{\rho, c} + \frac{k_T D}{T_0}B_{f0}\right] +$$

$$\left. + \frac{k_P D}{P_0}B_{f0}\right\}\frac{\partial^3 \bar{u}_1}{\partial x_1^3} + \frac{\tau}{H_{10}}\frac{\rho_0 a_1}{\nu^2 e_{110}}\frac{\partial}{\partial x_1}\left[2\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial t} +\right.$$

$$\left. + \left(2\frac{y_1}{R}a_1 - 2a_1\sigma_{e1} + 2\frac{\alpha_f^0}{\sqrt{\rho_0 a_1}}\bar{u}_1\right)\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} + a_1\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial y_1}\right] \tag{3.8}$$

Уравнение (3.8) совместно с уравнением (1.5) описывает движение газовой смеси в окрестности каустики для случая, когда замороженная и равновесная скорости звука мало отличаются друг от друга.

В предельных случаях уравнение (3.8) переходит в (1.12) и (2.10).

Автор выражает благодарность А. Г. Багдоеву за постановку задачи и постоянный интерес к работе.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 9 VII 1973

Գ. Գ. ՕՀԱՆՅԱՆ

ՔԻՄԻԱՊԵՍ ԱԿՏԻՎ ՄԻՋԱՎԱՅՐԻ ՇԱՐԺՄԱՆ ՊԱՐԱՄԵՏՐԵՐԻ ՈՐՈՇՈՒՄԸ ԿԱՈՒՍՏԻԿԱՅԻ ՇՐՋԱԿԱՅՔՈՒՄ

Ամփոփում

Դիտարկվում է բինար մածուցիկ գազային խառնուրդի համար շարժման հավասարումների գծային և դիսիպատիվ-գծային լուծումների որոշման խնդիրը։ Հաշվի են առնված տարբեր դիֆուզիոն էֆեկտները և ջերմահաղորդականության պրոցեսը։

Աշխատանքում ստացված և հետազոտված են ոչ գծային հավասարումները կաուստիկայի շրջակայքում կվազիսառեցված և կվազիհավասարակշռված պրոցեսների համար։ Գծային և դիսիպատիվ-գծային մոտավորություններով գտնված են ճնշումը խառնուրդի մասնիկի արագության բաղադրիչները կաուստիկայի վրա և նրա շրջակայքում։

Հատուկ միջավայրերի համար, երբ ձայնի սառեցված և հավասարակշռված արագությունների մեծությունները քիչ են տարբերվում իրարից, ստացված է հավասարումների սիստեմ, որը պարունակում է ալիքների դիսպերսիան բնութագրող փնտրվող ֆունկցիայի երրորդ կարգի ածանցյալ։

DETERMINATION OF PARAMETERS OF MOTION OF A CHEMICALLY ACTIVE MEDIUM NEAR THE CAUSTIC

G. G. OHANIAN

Summary

The problem of determination of linear and linear-dissipative solutions to the equations of motion in a binary-viscous mixture of gases where only one chemical reaction takes place near the caustic is considered.

In the mixture of gases all diffusive and heat-conductive effects are taken into account.

Some non-linear equations near the caustic for quasi-frozen and quasi-equilibrium processes of propagation of disturbances are derived and analysed.

Pressure and components of velocity of the mixture particles on linear and linear-dissipative approximation are found near and on the caustic. A system of equations containing the third order derivative which produces the dispersion of waves is obtained for a special medium where frozen velocity of sound and equilibrium velocity are nearly equal.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рыжов О. С.* О нелинейной акустике химически активных сред. ПММ, т. 35, вып. 6, 1971.
2. *Guiraud J. P.* Le acoustique geometrique et la localisation. Comptes rendus, t. 26 № 6, 1965.
3. *Багдоев А. Г.* Определение давления в окрестности встречи ударных волн. Докл. АН АрмССР, т. XVII, № 5, 1968.
4. *Багдоев А. Г., Оганян Г. Г.* Определение параметров газа вблизи каустики. Докл. АН Арм. ССР, т. XIX, № 2, 1969.
5. Нелинейная теория распространения волн. Под ред. Лайтхилла. «Мир», М., 1970.
6. *Де Гроот С., Мазур П.* Неравновесная термодинамика. «Мир», М., 1964.
7. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. Гостехиздат, М., 1954.
8. *Рыжов О. С., Христианович С. А.* О нелинейном отражении слабых ударных волн. ПММ, т. 22, вып. 5, 1958.
9. *Lewis R. M., Bleistein N., Ludwig D.* Uniform asymtotic theory of creeping waves. Comm. on pure and applied Mathematics, № 2, 1967.
10. *Фридлендер Ф.* Звуковые импульсы. ИЛ, М., 1962.
11. *Газарян Ю. Л.* О распространении звука в неоднородных средах. Сб. «Вопросы динамич. теории распространения сейсмич. волн.», Л., № 5, 1961.
12. *Кравцов Ю. А.* О видоизменении метода геометрической оптики. Радиофизика, т. 7, № 4, 1964.
13. *Бабич В. М.* Аналитический характер поля нестационарной волны в окрестности каустики. Сб. «Вопросы динамич. теории распространения сейсмич. волн», Л., № 5, 1961.
14. *Булдырев В. С.* Волновое поле в окрестности каустики в нестационарных задачах дифракции в случае сферических и цилиндрических границ раздела сред. Сб. «Вопросы динамич. теории распространения сейсмич. волн.», Л., № 5, 1961.
15. *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложения. Физматгиз, М.—Л., 19
16. *Градштейн И. С. и Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. «Наука», М., 1971.
17. *Бейтман Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции, т. 1. «Наука», М., 19 стр. 267.