

Н. П. ЗАМЕТАЛИНА, В. К. ПРОКОПОВ

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ЕСТЕСТВЕННО СКРУЧЕННЫХ
 СТЕРЖНЕЙ ТИПА СПИРАЛЬНЫХ СВЕРЛ

Исследование напряженного состояния является необходимым элементом рационального конструирования спирального сверла. Однако расчет спирального сверла до сих пор производится без учета его скрученности. В данной работе ставится задача расчета спирального сверла с учетом его естественной скрученности; при этом используются известные результаты Г. Ю. Джанелидзе и А. И. Лурье [1, 3] по теории равновесия скрученных стержней.

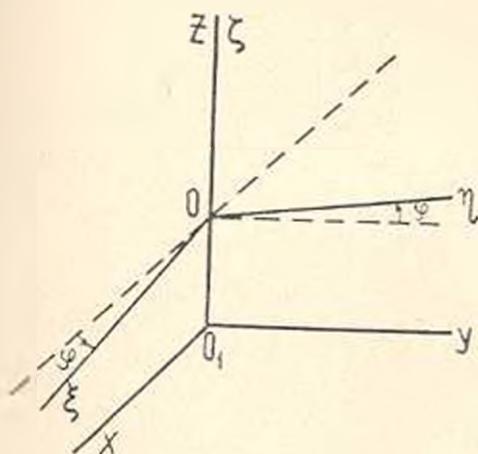
Введем координаты ξ, η с началом в центре тяжести поперечного сечения сверла, направленные вдоль главных осей инерции сечения (фиг. 1); эти оси поворачиваются вокруг оси сверла ζ на угол

$$\varphi = a\zeta \tag{1}$$

где

$$a = \frac{2}{D} \operatorname{tg} \omega \tag{2}$$

ω — угол закручивания на единицу длины, ω — наклон винтовой канавки сверла, D — диаметр сверла.



Фиг. 1.

Оси ξ, η, ζ образуют неортогональную систему координат; связь с неподвижными декартовыми осями x, y, z выражается соотношениями

$$\xi = x \cos \varphi + y \sin \varphi, \quad \eta = y \cos \varphi - x \sin \varphi, \quad \zeta = z \tag{3}$$

Очевидно, что при $z=0$ ($\xi = \eta = 0$) оси ξ, η, ζ и x, y, z совпадают.

При работе сверло испытывает совместное действие крутящего момента N и усилия подачи R , приложенных в торцевом сечении $z=l$ (l — длина сверла) и направленных вдоль оси z (ζ); величины R и N считаются заданными.

Вычисляя для координат (3) составляющие метрического тензора и символы Кристоффеля (см. [1, 2]), получим исходные уравнения задачи

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma^{11}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma^{12}}{\partial \eta} - \frac{\partial \sigma^{13}}{\partial \zeta} - 2a^2 \sigma^{23} - a^2 \gamma \sigma^{33} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma^{22}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma^{22}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma^{23}}{\partial \zeta} + 2a^2 \sigma^{13} - a^2 \gamma \sigma^{33} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma^{31}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma^{32}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma^{33}}{\partial \zeta} &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\sigma^{11} = \left(\lambda \theta + 2\mu \frac{\partial u^1}{\partial \xi} \right) (1 - a^2 \gamma^2) - 2\gamma a^2 \eta \left(\xi \frac{\partial u^1}{\partial \eta} + u^2 - \frac{1}{a} \frac{\partial u^1}{\partial \zeta} \right)$$

$$\sigma^{22} = \left(\lambda \theta + 2\mu \frac{\partial u^1}{\partial \eta} \right) (1 - a^2 \gamma^2) - 2\gamma a^2 \xi \left(\eta \frac{\partial u^2}{\partial \xi} + u^1 + \frac{1}{a} \frac{\partial u^2}{\partial \zeta} \right)$$

$$\sigma^{33} = \mu \left[\frac{\partial u^1}{\partial \eta} (1 + a^2 \gamma^2) + \frac{\partial u^2}{\partial \xi} (1 - a^2 \gamma^2) \right] - \lambda \theta a^2 \gamma \eta +$$

$$+ \mu a^2 \eta \left[u^1 + \frac{1}{a} \frac{\partial u^2}{\partial \zeta} - \xi \frac{\partial u^1}{\partial \xi} \right] + \mu a^2 \xi \left(u^2 - \frac{1}{a} \frac{\partial u^1}{\partial \zeta} - \eta \frac{\partial u^2}{\partial \eta} \right)$$

$$\sigma^{13} = \mu \left[\frac{\partial u^2}{\partial \xi} (1 - a^2 \gamma^2) - a^2 \gamma \eta \frac{\partial u^2}{\partial \eta} \right] + a^2 \eta \left[\lambda \theta + \mu \left(\frac{\partial u^1}{\partial \xi} + \frac{\partial u^2}{\partial \zeta} \right) \right] -$$

$$- \mu a \left(u^2 - \frac{1}{a} \frac{\partial u^1}{\partial \zeta} + \xi \frac{\partial u^1}{\partial \eta} \right)$$

$$\sigma^{23} = \mu \left[\frac{\partial u^3}{\partial \eta} (1 + a^2 \gamma^2) - a^2 \gamma \xi \frac{\partial u^3}{\partial \xi} \right] - a^2 \xi \left[\lambda \theta + \mu \left(\frac{\partial u^2}{\partial \eta} + \frac{\partial u^3}{\partial \zeta} \right) \right] +$$

$$+ \mu a \left(u^1 + \frac{1}{a} \frac{\partial u^2}{\partial \zeta} + \eta \frac{\partial u^2}{\partial \xi} \right)$$

$$\sigma^{33} = \lambda \theta + 2\mu a \left(\eta \frac{\partial u^2}{\partial \xi} - \xi \frac{\partial u^3}{\partial \eta} + \frac{1}{a} \frac{\partial u^3}{\partial \zeta} \right)$$

$$\sigma^{21} \gamma_1 + \sigma^{32} \gamma_2 = 0 \quad (\alpha = 1, 2, 3) \quad (6)$$

$$\int_{(\Omega)} \varepsilon^{\alpha\beta} dS = 0 \quad (\alpha = 1, 2), \quad \int_{(\Omega)} \xi \varepsilon^{\alpha\beta} dS = \int_{(\Omega)} \eta \varepsilon^{\alpha\beta} dS = 0 \quad (7)$$

$$\int_{(\Omega)} \varepsilon^{\alpha\beta} dS = R, \quad \int_{(\Omega)} [\xi \varepsilon^{\alpha\beta} - \eta \varepsilon^{\alpha\beta} + a(\xi^2 - \eta^2) \varepsilon^{\alpha\beta}] dS = N$$

Здесь $\varepsilon^{\alpha\beta}$, $\varepsilon^{\alpha\beta}$ — контрвариантные составляющие вектора перемещения и тензора напряжений; λ , μ — постоянные Ляме; $\nu_1 = \frac{\partial \tau_1}{\partial t}$.

$\nu_2 = -\frac{\partial l}{\partial t}$ — направляющие косинусы нормали к контуру сечения Γ в плоскости $\xi\tau$; l — длина дуги контура; $dS = d\xi d\tau$, Ω — площадь поперечного сечения; $\nabla = \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \zeta}$. Уравнения (6) и (7) представляют

граничные условия на боковой поверхности и условия на торце сверла.

Решение системы (4)–(7) строится в форме ряда по степеням малого параметра $\varepsilon = aD$:

$$u^{\alpha\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u_n^{\alpha\beta}, \quad \sigma^{\alpha\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \sigma_n^{\alpha\beta} \quad (8)$$

Нулевое приближение дает уравнения для незакрученного сверла в декартовых координатах. Уравнения первого приближения имеют следующий вид:

$$\frac{\partial \sigma_1^{\alpha 1}}{\partial \xi} - \frac{\partial \sigma_1^{\alpha 2}}{\partial \tau} + \frac{\partial \sigma_1^{\alpha 3}}{\partial \zeta} - \frac{2}{D} (-1)^\alpha \sigma_0^{\alpha 1} = 0 \quad (\alpha = 1, 2; \xi = 2, 3; \tau = 3, 1) \quad (9)$$

$$\frac{\partial \sigma_1^{\beta 1}}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma_1^{\beta 2}}{\partial \tau} - \frac{\partial \sigma_1^{\beta 3}}{\partial \zeta} = 0$$

$$\sigma_1^{11} = \lambda \theta_1 + 2\mu \frac{\partial u_1^1}{\partial \xi} + 2\mu \frac{\eta}{D} \frac{\partial u_0^1}{\partial \zeta}$$

$$\sigma_1^{33} = \lambda \theta_1 + 2\mu \frac{\partial u_1^3}{\partial \zeta} + \frac{2\mu}{D} \left(\eta \frac{\partial u_0^3}{\partial \xi} - \xi \frac{\partial u_0^3}{\partial \tau} \right)$$

$$\sigma_1^{12} = \mu \left(\frac{\partial u_1^1}{\partial \tau} + \frac{\partial u_1^2}{\partial \xi} \right) + \frac{\mu}{D} \left(\eta \frac{\partial u_0^2}{\partial \zeta} - \xi \frac{\partial u_0^1}{\partial \zeta} \right) \quad (10)$$

$$\sigma_1^{13} = \mu \left(\frac{\partial u_1^1}{\partial \zeta} + \frac{\partial u_1^3}{\partial \xi} \right) +$$

$$+ \frac{\eta}{D} \left[\lambda \theta_0 + \mu \left(\frac{\partial u_0^1}{\partial \xi} + \frac{\partial u_0^3}{\partial \zeta} \right) \right] - \frac{\mu}{D} \left(\xi \frac{\partial u_0^1}{\partial \tau} + u_0^2 \right)$$

$$u_n = \frac{\partial u_n^1}{\partial \xi} + \frac{\partial u_n^2}{\partial \eta} - \frac{\partial u_n^3}{\partial \zeta} \quad (n = 0, 1) \quad (11)$$

$$\varepsilon_1^1 \nu_1 + \varepsilon_1^2 \nu_2 = 0 \quad (\nu = 1, 2, 3)$$

$$\iint_{(\nu)} \varepsilon_1^{3x} dS = 0 \quad (x = 1, 2, 3), \quad \iint_{(\nu)} \varepsilon_1^{30} dS = \iint_{(\nu)} \varepsilon_1^{31} dS = 0 \quad (12)$$

$$\iint_{(\Omega)} (\varepsilon_1^{32} - \varepsilon_1^{31}) dS = -\frac{1}{D} \iint_{(\Omega)} (\xi^2 - \eta^2) \varepsilon_1^{30} dS$$

Выражения для ε_1^{22} и ε_1^{23} получаются из ε_1^{11} и ε_1^{13} заменой $\xi, \eta, u_0^1, u_0^2, u_1^1, D$ на $\eta, \xi, u_0^2, u_0^1, u_1^2, -D$, соответственно.

Решая сначала задачу о сжатии сверла, а затем задачу его кручения [1], получим формулы, определяющие напряженное состояние сверла (с точностью до первой степени параметра ε) при одновременном действии продольной сжимающей силы R и крутящего момента N :

$$\varepsilon^{11} = \varepsilon \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} - \frac{2N}{DT} \psi \right), \quad \varepsilon^{22} = \varepsilon \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} - \frac{2N}{DT} \psi \right), \quad \varepsilon^{32} = -\varepsilon \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial \eta}$$

$$\varepsilon^{23} = \left(N + \varepsilon \frac{RJ_p}{D\Omega} \right) \frac{1}{T} \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \quad \varepsilon^{33} = - \left(N + \varepsilon \frac{RJ_p}{D\Omega} \right) \frac{1}{T} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \quad (13)$$

$$\varepsilon^{30} = -\frac{R}{\Omega} + \varepsilon \left\{ \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \frac{N}{D\Omega} - \frac{2N}{DT} \left(\xi \frac{\partial \psi}{\partial \xi} - \eta \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \left[\Delta \Phi + \frac{2N}{DT} \left(\xi^2 + \eta^2 - 2\psi - \frac{J_p}{\Omega} \right) \right] \right\}$$

Здесь J_p — полярный момент инерции сечения, $T = 2 \iint_{(\Omega)} dS$ — геометрическая жесткость на кручение; оси ξ и η предполагаются осями симметрии для поперечного сечения сверла.

Функции $\Psi(\xi, \eta)$ и $\Phi(\xi, \eta)$ являются решениями следующих краевых задач:

$$\Delta \Psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} = -2; \quad \Psi|_{\Gamma} = 0 \quad (14)$$

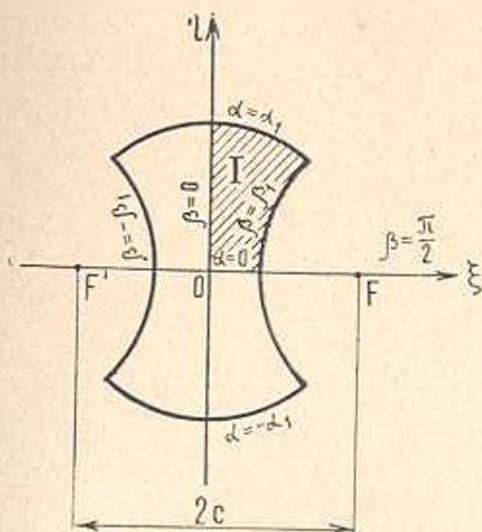
$$\Delta \Phi = -\frac{16N}{DT}; \quad \Phi|_{\Gamma} = \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0 \quad (15)$$

Таким образом, задача определения напряженного состояния спирального сверла с учетом его естественной крутки сводится к решению двух задач: гармонической задачи (14), типа задачи кручения, и бигармонической задачи (15), эквивалентной задаче изгиба тонкой плиты с заземленным контуром.

Для решения этих задач введем эллиптические координаты α, β [4] с фокусным расстоянием $2c$

$$\xi = c \operatorname{ch} \alpha \sin \beta, \quad \eta = c \operatorname{sh} \alpha \cos \beta \quad (16)$$

Поперечное сечение спирального сверла с достаточной точностью можно аппроксимировать симметричной областью, ограниченной софокусными эллипсами и гиперболами $\alpha = \pm \alpha_1; \beta = \pm \beta_1$ (фиг. 2).



Фиг. 2.

В эллиптических координатах уравнение (14) преобразуется к такому

$$\Delta^* \Psi^* = \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial \beta^2} = -c^2 h \quad (17)$$

Здесь

$$\Psi^*[\xi(\alpha, \beta), \eta(\alpha, \beta)] = \Psi^*(\alpha, \beta), \quad h = \operatorname{ch} 2\alpha - \cos 2\beta \quad (18)$$

Так как поперечное сечение сверла представляет собой симметричную область и граничные условия по всему контуру однотипны (на контуре Γ функция Ψ^* обращается в нуль), то достаточно рассмотреть заштрихованную на фиг. 2 область 1, определяя в ней функцию напряжений, требуя при этом обращения в нуль нормальной производной $\frac{\partial \Psi^*}{\partial \alpha}$ на осях симметрии области 2. Таким образом, граничные условия для области 1 предстанут в таком виде:

$$\Psi^*(\alpha_1, \beta) = 0, \quad \left. \frac{\partial \Psi^*}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=\alpha_1} = 0 \quad (19a)$$

$$\Psi^*(\alpha, \beta_1) = 0, \quad \left. \frac{\partial \Psi^*}{\partial \beta} \right|_{\beta=\beta_1} = 0 \quad (19b)$$

Решение краевой задачи (17), (19) строим в форме ряда синусов кратных дуг с неизвестными функциональными коэффициентами [4]:

$$\varphi^* = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(\beta) \sin \tau_k(z - z_1), \quad \tau_k = \frac{(2k-1)\pi}{2a_2} \quad (20)$$

Ряд (20) граничным условиям (19 а) удовлетворяет автоматически. Подстановка его в уравнение (17) и в условия (19 б) приводит к обыкновенным дифференциальным уравнениям для коэффициентов $f_k(\beta)$

$$f_k''(\beta) - \tau_k^2 f_k(\beta) = \frac{2c^2 \tau_k \operatorname{ch} 2z_1}{z_1(\tau_k^2 - 4)} + \frac{2c^2}{z_1 z_2} \cos 2\beta \quad (21)$$

и к граничным условиям для них

$$f_k'(0) = 0, \quad f_k(\beta_1) = 0 \quad (22)$$

Решение уравнений (21), удовлетворяющее условиям (22), имеет следующий вид:

$$f_k(\beta) = \frac{2c^2}{z_1 z_2 (\tau_k^2 - 4)} \left[\frac{\operatorname{ch} 2z_1 + \cos 2\beta_1}{\operatorname{ch} \tau_k \beta_1} \operatorname{ch} \tau_k \beta - (\operatorname{ch} 2z_1 + \cos 2\beta_1) \right] \quad (23)$$

Формулы (20), (23) и дают решение краевой задачи (17), (19).

Рассмотрим далее задачу (15). В эллиптических координатах (16) получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{h} \Delta^* \left(\frac{1}{h} \Delta^* \Phi \right) = - \frac{4c^2 N}{DT} \quad (24)$$

где оператор Δ^* и функция h по-прежнему определяются формулами (17), (18), а $\Phi^*(z, \beta) = \Phi[\xi(z, \beta), \tau(z, \beta)]$; граничные условия (15) сохраняют свой вид и для функции Φ^*

$$\Phi^*|_{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial \Phi^*}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0 \quad (25)$$

Уравнение (24) является уравнением Эйлера для функционала

$$J = \frac{c^2}{2} \iint_{\Omega} \left[\frac{1}{h^2} (\Delta^* \Phi^*)^2 - \frac{8c^2 N}{DT} \right] h \, d\omega \, d\beta \quad (26)$$

что легко проверяется приравнованием нулю его первой вариации и преобразованием полученного выражения по формуле Грина с использованием граничных условий (25).

Краевую задачу (24), (25) поэтому можно решать прямыми вариационными методами. В качестве первого и второго приближений следует принять функцию Φ^* в виде

$$1) \Phi^* = A h^2 (\operatorname{ch} z - \operatorname{ch} z_1)^2 (\cos \beta - \cos \beta_1)^2 \quad (27)$$

$$2) \Phi^* = B_1 h^2 (\operatorname{ch} z - \operatorname{ch} z_1)^2 (\cos \beta - \cos \beta_1)^2 + B_2 h^2 (\operatorname{ch} 2z - \operatorname{ch} 2z_1)^2 (\cos 2\beta - \cos 2\beta_1)^2 \quad (28)$$

При таком задании функции Φ^* граничные условия (25) на контуре Γ выполнены, а выражение для лапласиана $\Delta^2 \Phi^*$ примет удобный для последующего интегрирования (26) вид. После чего уравнение $\frac{\partial J}{\partial A} = 0$ в случае 1) или уравнения $\frac{\partial J}{\partial B_1} = 0, \frac{\partial J}{\partial B_2} = 0$ в случае 2) дадут возможность найти искомые коэффициенты A или B_1, B_2 .

Тольяттинский политехнический
институт

Поступила 7 VI 1972

Ն. Պ. ԶԱՄԵՏԱԼԻՆԱ, Վ. Կ. ՊՐՈՔՈՐՈՎ

ՊԱՐՈՒՐԱԶԵՎ ՇԱՂԱՓԻ ՏԵՍԱԿԻ ԲՆԱԿԱՆ ԿԵՐՊՈՎ ՈՒՈՐՎԱԾ ԶՈՂԵՐԻ
ԼԱՐՎԱԾ ՎԻՃԱԿ

Ա մ փ ո փ ու մ

Դրվում է պարուրածև շաղափի հաշվարկի խնդիրը նրա բնական ուղղածոթյան հաշվառումով, երբ նրա վրա միաժամանակ ազդում են ուղորդ մոմենտը և երկայնական սեղմող ուժը:

Հիսուական կոորդինատային սիստեմում ստացվել է ուղորման խնդրի տիպի հարմոնիկ խնդրի լուծումը և եզրագծով ամրակցված բարակ սալի ծոման խնդրին համարժեք բիհարմոնիկ խնդրի լուծումը:

THE STRAINED STATE OF NATURALLY TWISTED BARS LIKE SPIRAL DRILLS

N. P. ZAMETALINA, V. K. PROKOROV

S u m m a r y

A problem is set to calculate the spiral drill as a naturally twisted bar under a joint action of torque moment and longitudinal compressive force.

The solution of a harmonic problem similar to that of twist and the solution of a biharmonic problem equivalent to that of bending a thin plate with a squeezed contour are obtained in elliptic coordinates.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И., Джанелидзе Г. Ю. Задача Сен-Венана для стержней, близких к призматическим. Ч. I. Основные уравнения. Докл. АН СССР, 1939, т. 24, № 1; ч. II. Растяжение и кручение. Докл. АН СССР, 1939, т. 24, № 3.
2. Лурье А. И. Теория упругости. «Наука», М., 1970.
3. Джанелидзе Г. Ю. Соотношения Кирхгофа для естественно скрученных стержней и их приложения. Тр. ЛПИ, 1946, № 1.
1. Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л. Кручение упругих тел. Физматгиз, М., 1963.