

А. Е. АЛЮЯН

К ТЕОРИИ МЕЗОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКОГО  
 ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Будем называть мезометеорологическим пограничным слоем турбулентный пограничный слой атмосферы, характерные горизонтальные размеры которого имеют порядок 100 км. В работах [1, 3, 4], посвященных теории мезометеорологического пограничного слоя, предполагалось, что фоновая вертикальная скорость тождественно равна нулю. Как показали расчеты, такое предположение не всегда оправдывается. Поэтому в настоящей работе предпринята попытка сформулировать и решить ту же задачу без этого предположения с тем, чтобы фоновая скорость определялась в процессе решения.

1. *Постановка задачи.* Итак, рассмотрим, следуя [1], нестационарную задачу о мезометеорологическом пограничном слое, который развивается при движении воздушной массы над термически и орографически неоднородной подстилающей поверхностью. Предположим, что свойство фонового потока также, как и неоднородности подстилающей поверхности, не зависят от одной из горизонтальных координат (пусть этой координатой будет  $y$ ). Тогда можно предположить, что и в интересующем нас процессе все величины не зависят от  $y$ , и ограничимся рассмотрением двумерной задачи. Система уравнений в этом случае имеет вид

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial \pi'}{\partial x} + l v' + i \partial_x v' + \bar{\Delta} u' \quad (1)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -l u' + \bar{\Delta} v' \quad (2)$$

$$\frac{\partial w'}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} + S(w' + \bar{\sigma}_x u') = -H_x u' + \bar{\Delta} w' \quad (3)$$

$$\frac{\partial \pi'}{\partial z} = i \bar{\sigma}' \quad (4)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0, \quad \left( \bar{\Delta} = \frac{\partial}{\partial z} \nabla \frac{\partial}{\partial z} + \kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \quad (5)$$

Здесь приняты следующие обозначения:  $t$  — время,  $x$  — криволинейная координата, отсчитываемая вдоль поверхности Земли;  $u$  — составляющая вектора скорости ветра в направлении  $x$ . Наклоны рельефа

предполагаются малыми. Поэтому практически  $x$  можно считать горизонтальной координатой. По той же причине в качестве  $u$  можно принимать горизонтальную составляющую вектора скорости. При этом  $w'$  будет связано с вертикальной скоростью  $w$  в декартовой системе координат соотношением

$$w' = w - u' \delta_x \quad (6)$$

где  $\delta(x)$  — функция, описывающая рельеф,  $\delta_x(x)$  — тангенс угла наклона рельефа к горизонту. Величина  $w$  представляет собою составляющую вектора скорости ветра, нормальную к координатным линиям  $z = \text{const}$ . Остальные обозначения:  $v$  — горизонтальная составляющая вектора скорости вдоль оси  $y$ ;  $\pi$  — величина, пропорциональная отклонению давления воздуха от статического;  $\theta$  — потенциальная температура;  $S = \gamma_{\theta} - \gamma = \text{const}$  — параметр стратификации;  $\lambda$  — параметр конвекции;  $l = \text{const}$  — параметр Кориолиса;  $\nu$  — вертикальный коэффициент турбулентности, предполагаемый заданной функцией высоты;  $\mu = \text{const}$  — горизонтальный коэффициент турбулентности;  $\Theta_x = \frac{\partial \theta}{\partial x}$  — горизонтальный градиент фоновой потенциальной температуры.

При выводе (1) — (5) все метеоэлементы были представлены в виде

$$\begin{aligned} u &= U + u', & v &= V + v', & w &= W + w' \\ \theta &= \Theta + \theta', & \pi &= \Pi + \pi' \end{aligned} \quad (7)$$

где большими буквами обозначены фоновые значения метеоэлементов, предполагаемые известными (кроме  $W$ , которое предполагается независящим от высоты и подлежит определению), а буквами со штрихом — отклонения от фоновых значений. В данной работе мы полагали, что

$$U = U(t), \quad V = V(t), \quad \Theta = \Theta(x, t) + Sz \quad (8)$$

Переходим теперь к постановке начальных и краевых условий. Также, как в [1], запишем

$$u' = v' = w' = \theta' = 0 \quad \text{при } t = 0 \quad (9)$$

$$u = v = w = 0, \quad \theta' = f(x, t) \quad \text{при } z = 0 \quad (10)$$

где  $f(x, t)$  — заданная функция.

$$u' = v' = w' = \theta' = \pi' = 0 \quad \text{при } z = h = \text{const} \quad (11)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} = \frac{\partial v'}{\partial x} = \frac{\partial \theta'}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = 0; L \quad (12)$$

где  $x=0; L$  — границы области счета по горизонтали,  $h = \text{const}$  — граница области счета по вертикали.

Так же, как и в [1], прежде чем переходить к решению задачи, несколько преобразуем уравнения. Интегрируя (4) и (5) по  $z$  с учетом (1), получим

$$w' = \frac{\partial}{\partial x} \int_z^h u' dz \quad (13)$$

$$z' = -\lambda \int_z^h v' dz \quad (14)$$

Отсюда, вследствие (10)

$$W' = -w'_{z=0} = -\frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u' dz \quad (15)$$

Используя (8), (13) и (14), перепишем уравнения (1)–(3) в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = i \frac{\partial}{\partial x} \int_z^h u' dz + lv' + i\delta_1 v' + \bar{\Delta}u \quad (16)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -lv' + \bar{\Delta}v \quad (17)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} = -S \frac{\partial}{\partial x} \int_z^h u' dz - (S\delta_x + \tau_x) u' + \bar{\Delta}\theta \quad (18)$$

2. *Метод решения.* Для решения задачи воспользуемся тем же методом, что и в [2]. Введем в области  $D = \{|x| = L, 0 \leq z \leq h\}$  сеточную область  $D^h = \{(x_k, z_k)\}$  с шагами  $\Delta x_k$  и  $\Delta z_k$  соответственно, и аппроксимируем систему (1)–(5) следующим образом:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + (\Lambda_1^h + \Lambda_2^h) \psi = F \quad (19)$$

где

$$\Lambda_1^h = \begin{vmatrix} A_1 & 0 & -iD_x \\ 0 & A_1 & 0 \\ SD_{1,x} & 0 & A_1 \end{vmatrix}, \quad \Lambda_2^h = \begin{vmatrix} A_2 & IE & -iA_2 A_4 \\ -IE & A_2 & 0 \\ SA_2 A_4 & 0 & A_2 \end{vmatrix}$$

$$(A_2 \psi)_{l,k} = \frac{\omega_{l,k+1/2}^2 \psi_{l,k+1} - \omega_{l,k-1/2}^2 \psi_{l,k-1}}{2dk} + \\ + \frac{v_{k+1/2}}{d_x} \left( \frac{\psi_{l,k+1} - \psi_{l,k}}{\Delta z_{k+1}} \right) - \frac{v_{k-1/2}}{d_x} \left( \frac{\psi_{l,k} - \psi_{l,k-1}}{\Delta z_k} \right)$$

$$(A_2 \psi)_{l,k} = \frac{u_{l+1,k} \psi_{l+1,k} - u_{l-1,k} \psi_{l-1,k}}{2\Delta l} +$$

$$+ \frac{u}{\Delta l} \left( \frac{\psi_{l+1,k} - \psi_{l,k}}{\Delta x_{l+1}} - \frac{\psi_{l,k} - \psi_{l-1,k}}{\Delta x_l} \right)$$

$$(A_3 \psi)_{l,k} = \frac{\psi_{l+1,k} - \psi_{l-1,k}}{2\Delta l}$$

$$(A_4 \psi)_{l,k} = \sum_{q=1}^{k-1} \psi_{l,q} dk + \frac{\psi_{l,k} \Delta z_k}{2} \quad (k=1, 2, \dots, K), \quad \psi_{l,k} = \psi(x_l, z_k)$$

$$D_x = \text{diag} \{ \delta_x \}, \quad D_{1k} = \text{diag} \left\{ \delta_x + \frac{\partial \delta}{\partial x} \right\} -$$

—диагональные матрицы.

$E$  — тождественная матрица;  $F = (F_1, F_2, F_3)$  — вектор, учитывающий неоднородности краевых условий и фоновые значения метеозлементов.

$$\varphi = (u, v, w'), \quad \Delta l = \frac{\Delta x_l + \Delta x_{l+1}}{2}, \quad d_k = \frac{\Delta z_k + \Delta z_{k+1}}{2}$$

$$u_{l+1/2} = \frac{u_l + u_{l+1}}{2}$$

Конечно-разностные аппроксимации получены с помощью интегро-интерполяционного метода («Метода баланса») [5], [6].

Решение задачи (19) найдем с помощью метода переменных направлений (6)

$$\frac{\varphi^{j+1/2} - \varphi^j}{\Delta t/2} + \Lambda_1^h \varphi^{j+1/2} + \Lambda_2^h \varphi^j = F^j$$

$$\frac{\varphi^{j+1} - \varphi^{j+1/2}}{\Delta t/2} + \Lambda_1^h \varphi^{j+1/2} + \Lambda_2^h \varphi^{j+1} = F^{j+1/2}$$
(20)

Конечно-разностные уравнения (19) и (20) решаются с помощью матричной прогонки. Для определения  $w'$  используется уравнение (13).

3. *Примеры расчета.* С помощью описанной выше модели было рассчитано несколько примеров мезометеорологических процессов. Не останавливаясь на интерпретации всех проведенных расчетов, приведем лишь результаты только для  $W$ , так как основной целью данной работы был расчет этого элемента.

Численные эксперименты проводились при следующих значениях параметров:

$$\Delta z = \begin{cases} 50 \text{ м} & \text{при } z \leq 300 \text{ м} \\ 60 \text{ м} & \text{при } 300 < z \leq 660 \text{ м} \\ 75 \text{ м} & \text{при } 660 < z \leq 1100 \text{ м} \\ 100 \text{ м} & \text{при } 1100 < z \leq 2310 \text{ м} \end{cases}$$

$$l = 10^{-4} \text{ сек}^{-1}, \quad \Theta_s = 0, \quad \mu = 10^4 \text{ м}^2/\text{сек}, \quad \Delta t = 10 \text{ мин}$$

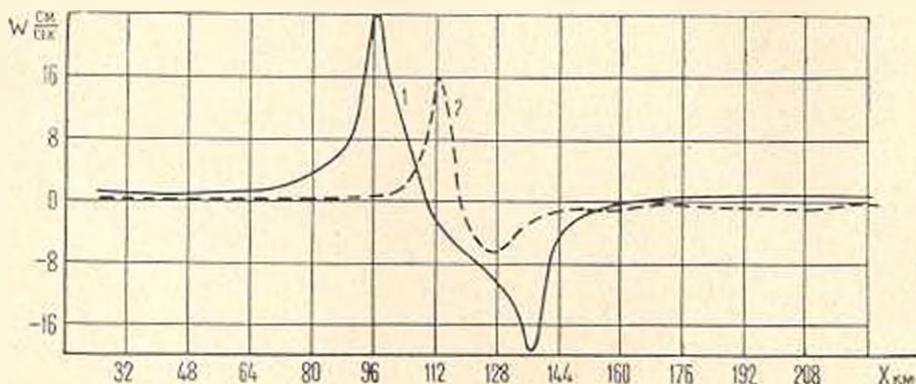
$$\lambda = 3.5 \cdot 10^{-2} \text{ м/сек}^2 \text{ град}, \quad S = 3 \cdot 10^{-3} \text{ град/м}$$

Число расчетных узлов по вертикали равно 30, по горизонтали—58. Остальные входные параметры задаются в каждом примере в отдельности.

Пример 1. Стационарная задача о бризе над теплым островом на фоне внешнего потока. Рассчитывалось два варианта. В первом предполагали, что внешний поток направлен перпендикулярно к тепловому источнику ( $U=0$ ,  $V=10$  м/сек), а во втором— вдоль теплового источника ( $U=10$  м/сек,  $V=0$ ). Для остальных параметров были приняты следующие значения:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq x < 96 \text{ км} \\ 10, & \text{если } 96 \leq x < 132 \text{ км} \\ 0, & \text{если } 132 \leq x \leq 232 \text{ км} \end{cases} \quad \begin{matrix} \Delta x = 4 \text{ км} \\ \delta_x = 0 \end{matrix}$$

Полученные в результате решения зависимости  $W(x)$  для первого варианта (сплошная линия) и для второго варианта (пунктир) даны на фиг. 1.



Фиг. 1. Профиль фоновой вертикальной скорости  $W$ : (стационарная задача). 1—внешний поток направлен перпендикулярно к тепловому источнику, 2—внешний поток направлен вдоль теплового источника.

Остальные примеры посвящены нестационарным задачам. В этих примерах мы приняли

$$f(x, t) = f(x) \cos \omega t$$

где  $\omega$ —угловая скорость вращения Земли.

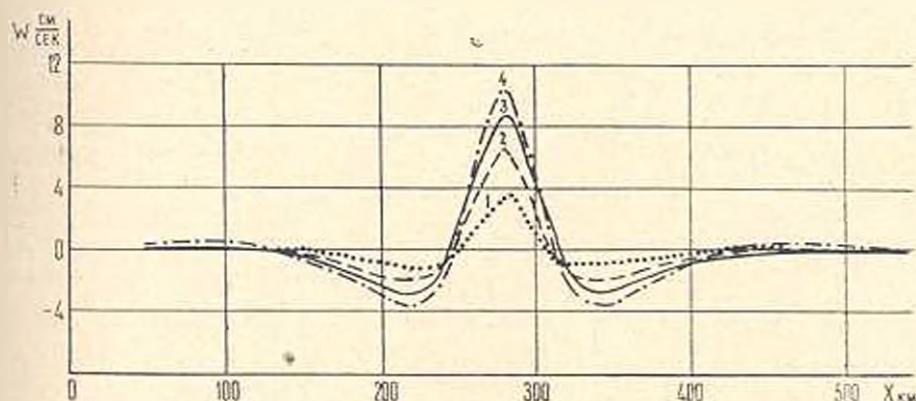
Пример 2. Нестационарная задача о бризе, развивающемся над островом, при отсутствии фонового ветра.

Полагалось:

$$U = V = \Theta_x = 0, \quad \delta_x = 0, \quad \Delta x = 10 \text{ км}$$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 0^\circ & \text{при } 0 \leq x < 280 \text{ км} \\ 10^\circ & \text{при } 280 \leq x < 310 \text{ км} \\ 0^\circ & \text{при } x > 310 \text{ км} \end{cases}$$

На фиг. 2 приведены рассчитанные графики  $W(x)$  для четырех моментов времени.



фиг. 2. Зависимость  $W(x)$  в примере 2 для четырех моментов времени.

1 —  $t = 3$  час., 2 —  $t = 6$  час., 3 —  $t = 9$  час., 4 —  $t = 12$  час.

Пример 3. Нестационарная задача о бризе над островом на фоне внешнего потока. Входные параметры имели следующие значения:

$$U = 3 \text{ м/сек}, \quad \Theta_x = V = 0, \quad \Delta x = 10 \text{ км}$$

Так как функция  $f(x)$  симметрична относительно середины острова, приведем значение ее лишь для одной половины области счета (табл. 1).

Таблица 1

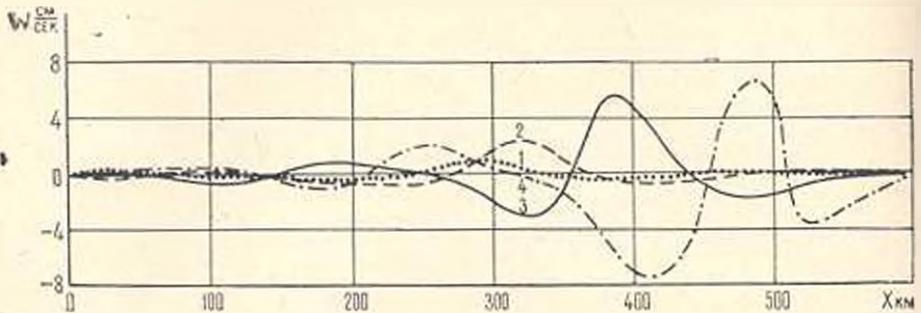
Значения функции  $\tilde{f}$  в интервале  $0 < x < L$

$x$ в км	0—190	200	210	220	230	240	250	260	270	280	290
$\tilde{f}(x) \cdot 10$	0	1	3	6	10	15	20	25	30	35	40

На фиг. 3 приведен ход  $W(x)$  во времени.

Пример 4. Нестационарная задача о ветре, возникающем над термически неоднородной и искривленной поверхностью, при отсутствии внешнего потока. Входные параметры задачи принимали следующие

значения:  $U=V=0$ ,  $\Delta x=4$  км. Значения функций  $\tilde{f}(x)$  и  $\delta_x$  приведены в табл. 2.



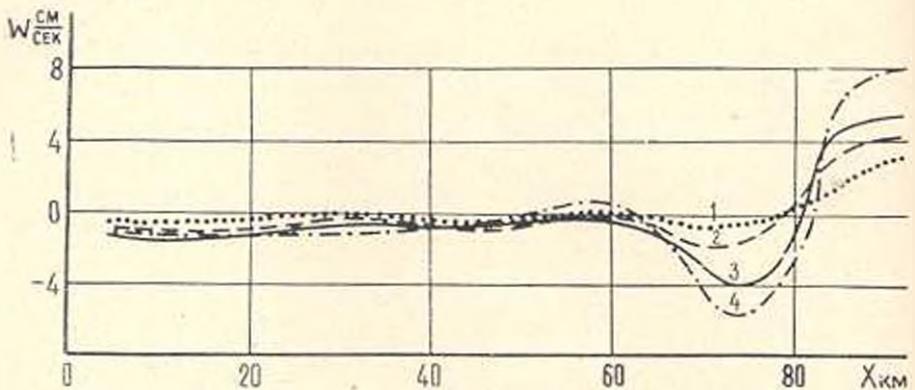
Фиг. 3. Зависимость  $W(x)$  в примере 3 во времени при наличии внешнего потока: 1 —  $t=3$  час, 2 —  $t=6$  час, 3 —  $t=9$  час, 4 —  $t=12$  час.

Таблица 2

Значения функций  $\tilde{f}(x)$  и  $\delta_x$

$x$ и км	0—28	40	52	61	76	88	100	112	124	136	148	160	172	184	200
$\delta_x \cdot 10^3$	0	3	4	4	4	4	4	4	6	6	7	7	7	7	7
$\tilde{f}(x) \cdot 10$	0	8	17	20	20	20	29	38	41	41	41	41	41	41	41

На фиг. 4 приведен ход  $W(x)$  во времени.



Фиг. 4. Зависимость  $W(x)$  в примере 4 во времени над искривленной и термически неоднородной подстилающей поверхностью. 1 —  $t=1.5$  час, 2 —  $t=3$  час, 3 —  $t=4.5$  час, 4 —  $t=6$  час.

Во всех примерах счет был устойчивым. Здесь мы не придаем особого физического смысла полученным результатам, так как принятое нами предположение о том, что  $W$  не зависит от высоты, слишком огрубляет задачу. Мы рассматриваем эти результаты как противоположный

предельный случай по сравнению с результатами задачи, изложенной в [1]. По-видимому, истинное решение находится где-то между решениями рассматриваемой в [1] задачи и решенным, полученным в данной работе.

Автор благодарен доц. В. В. Пененко за помощь в работе.

Ереванский отдел

Зак. НИ Гидромет. Института

Поступила 29 VI 1973

Ա. Ե. ԱՐՅԱՆ

ՄԻՆՈՒՐՄԻ ՊԼԱՆԵՏԱՐ ԱՂՇՄԱՆԱՅԻՆ ՇԵՐՏՈՒԾ  
ԻՆՉՈՒԲՏԵՍԻՐՈՒՄԻ ԿԱՆՈՆԱԿԱՆ ԳՐՈՑԵՆՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԴՐՈՍՐԵ

Ա մ ֆ ո ղ ո լ մ

Գիտարկվում է երկչափ ոչ ստացիոնար խնդիր միևուրրտի սահմանային շերտում մեղմեցման և օրոգրաֆիայի տեսակետից անհամասնելի է, չողվածում փորձ է արվում, օգտագործել թվային մեթոդները [1] այն դեպքի համար, երբ ֆոնի ուղղահայաց արագությունը նույնպես որոնելի ֆունկցիա է: Արդյունքները ցույց են տալիս, որ նշված արագությունները կարող են էական լինել միևուրրտի սահմանային շերտի պրոցեսների համար:

ON THE THEORY OF MESOMETEOROLOGICAL PROCESSES  
IN THE PLANETARY BOUNDARY LAYER  
OF THE ATMOSPHERE

A. E. ALOYAN

S u m m a r y

A non-stationary two-dimensional problem on the mesometeorological boundary layer over a thermally and orographically non-homogeneous underlying surface is considered. An attempt is made to use numerical methods (1) for the case where the background vertical velocity is the function sought. Some results of calculation are presented.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Алоян А. Е., Гугман Л. П., Пененко В. В. О возможных распределениях метеовозмущений в нижнем слое атмосферы. Изв. АН СССР, сер. физика атмосферы и океана, т. 10, № 5, 1971.
2. Пененко В. В. Численный метод решения некоторых задач мезометеорологии. Инф. бюл. «Численные методы механики сплошной среды», т. 4, № 1, Новосибирск, 1973.

3. Гутман Л. Н. Введение в нелинейную теорию мезометеорологических процессов. Гидрометеопиздат, Л., 1969.
4. Гутман Л. Н., Пененко В. В., Сохов Т. Е., Шапошникова М. Н. К теории мезометеорологических процессов в планетарном пограничном слое атмосферы. Тр. Зап. Сиб. РНИГМИ, вып. 1. Новосибирск, 1972.
5. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. ВИ СО АН СССР. Новосибирск, 1972.
6. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. Физматгиз, М., 1971.
7. Яненко Н. И. Методы дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Изд. «Наука», Новосибирск, 1967.