

К. Б. КАЗАРЯН

КОЛЕБАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ ТОКОНЕСУЩЕЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

При протекании электрического тока по твердому цилиндру возникают силы электромагнитного происхождения, которые необходимо учитывать при расчете такого цилиндра на прочность [1]. В работе [2] показана возможность потери устойчивости идеально проводящего соленоида, по которому протекает ток.

В настоящей работе рассматриваются колебания и устойчивость тонкой конечно-проводящей круговой цилиндрической оболочки в магнитном поле протекающего по ней по направлению образующих электрического тока. Найдены критические значения напряженности электрического поля, при которых оболочка теряет устойчивость.

1. Бесконечно длинная изотропная цилиндрическая оболочка постоянной толщины $2h$ и радиуса r отнесена к цилиндрическим ортогональным координатам (γ, θ, x) . Координатная поверхность (θ, x) совпадает со срединной поверхностью и представляется размерными координатами (x —вдоль образующей, θ —по дуге поперечного сечения).

По оболочке протекает равномерно распределенный продольный ток плотностью j_0 , вектор напряженности тока равен $\vec{E}_0$ и направлен по образующей

$$\vec{E}_0 = \begin{cases} 0 & h < \gamma < r \\ E_0 \vec{i}_x & -h \leq \gamma \leq h \\ 0 & \gamma < -h \end{cases} \quad (1.1)$$

Электромагнитные и упругие свойства материала оболочки характеризуются: модулем упругости E , коэффициентом Пуассона ν , плотностью ρ , электропроводностью σ .

Принимается следующая гипотеза магнитоупругости [3], которая для данной системы координат аналитически запишется в виде:

$$\begin{aligned} u_x &= u - \gamma \frac{\partial w}{\partial x}, & u_\theta &= v - \gamma \frac{\partial w}{\partial \theta}, & u_\gamma &= w \\ e_x &= \varphi(x, \theta, t), & e_\theta &= \psi(x, \theta, t), & h_\gamma &= f(x, \theta, t) \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $u = u(x, \theta, t)$, $v = v(x, \theta, t)$, $w = w(x, \theta, t)$ — перемещения срединной поверхности оболочки, $(u_x, u_\theta, u_\gamma)$ — перемещения произвольной точки оболочки, ψ, φ — тангенциальные компоненты индукции

рованного электрического поля, f — нормальная компонента индуцированного магнитного поля.

Кроме этой гипотезы, принимаются следующие предположения: диэлектрическая и магнитная проницаемости материала оболочки равны единице; ток смещения пренебрежимо мал по сравнению с током проводимости; электромагнитные и упругие возмущения настолько малы, что можно пользоваться линейными уравнениями.

Токонесущая оболочка обладает магнитным полем, которое определяется из уравнений магнитостатики

$$\operatorname{rot} \vec{H}_0 = \begin{cases} 0 & h < \gamma < r \\ \frac{4\pi\sigma}{c} \vec{E}_0 & -h \leq \gamma \leq h \\ 0 & \gamma < -h \end{cases} \quad \operatorname{div} \vec{H}_0 = 0 \quad (1.3)$$

следующим образом:

$$\vec{H}_0 = H_{0\theta} \vec{e}_\theta \quad H_{0\theta} = \begin{cases} 0 & h < \gamma < r \\ -\frac{2\pi\sigma E_0}{c} (r - \gamma) \left[1 - \left(\frac{r - h}{r - \gamma} \right)^2 \right] & \gamma \leq |h| \\ -\frac{8\pi\sigma E_0}{c} \frac{h}{1 - \gamma/r} & \gamma < -h \end{cases} \quad (1.4)$$

Электромагнитная сила, обусловленная электрическим током [4]

$$\vec{R}_0 = \int_{-h}^h \frac{\sigma}{c} [\vec{E}_0 \times \vec{H}_0] d\gamma$$

имеет только нормальную компоненту R_{0r}

$$R_{0r} = \frac{8\pi\sigma^2 E_0^2 h^2 \left(1 - \frac{2}{3} \frac{h}{r} \right)}{c^2} \quad (1.5)$$

а остальные компоненты равны нулю.

В (1.5) пренебрегается величиной h^2/r^2 по сравнению с 1. Таким образом, вследствие протекания тока на срединную поверхность оболочки действует радиальная нагрузка R_{0r} и под действием этой нагрузки в оболочке устанавливается безмоментное напряженное состояние.

2. Рассматривается задача устойчивости безмоментного напряженного состояния оболочки.

В возмущенном состоянии оболочки компоненты электромагнитного поля представляются в виде

$$\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{h} \quad \vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{e}$$

С учетом того факта, что возмущения малы, линеаризованные уравнения электродинамики для области $\gamma \gg |h|$ примут вид

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{h} &= \frac{4\pi\sigma}{c} \left(\vec{e} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \times \vec{H}_0 \right) & \operatorname{div} \vec{h} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{e} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{h}}{\partial t} & \operatorname{div} \vec{e} &= 4\pi\rho_e \end{aligned} \quad (2.1)$$

Вектор $\vec{u}$ представляет собой перемещение произвольной точки оболочки, ρ_e — плотность электрических зарядов.

Возмущенное состояние оболочки характеризуется силовым полем $\vec{R}$ и $\vec{m}$ электромагнитного происхождения [3]

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \int_{-h}^h \left[\frac{\sigma}{c} \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \times \vec{H} \right) \times \vec{H} + \vec{E} \operatorname{div} \vec{E} \right] d\gamma \\ m_x &= \int_{-h}^h \left[\frac{\sigma}{c} \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \times \vec{H} \right) \times \vec{H} + \vec{E} \operatorname{div} \vec{E} \right]_x \gamma d\gamma \\ m_\theta &= \int_{-h}^h \left[\frac{\sigma}{c} \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \times \vec{H} \right) \times \vec{H} + \vec{E} \operatorname{div} \vec{E} \right]_\theta \gamma d\gamma \end{aligned} \quad (2.2)$$

Линеаризованное выражение для $\vec{R}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \int_{-h}^h \left\{ \frac{\sigma}{c} \left[\vec{E}_0 \times \vec{H}_0 + \vec{E}_0 \times \vec{h} + \vec{e} \times \vec{H}_0 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{c} \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \times \vec{H}_0 \right) \times \vec{H}_0 + E_0 \operatorname{div} \vec{e} \right] \right\} d\gamma \end{aligned} \quad (2.3)$$

Искомая задача устойчивости сводится к совместному рассмотрению следующих уравнений:

уравнений устойчивости оболочки, которые в перемещениях средней поверхности имеют вид [5]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} - \frac{\nu}{r} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1-\nu^2}{2Eh} q_x &= 0 \\ \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{1-\nu^2}{2Eh} q_\theta &= 0 \\ \frac{h^2}{3} \nabla^4 w + \frac{w}{r^2} - \frac{\nu}{r} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{1-\nu^2}{2Eh} q_r &= 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

где

$$q_x = -2\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - rR_{0\gamma} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$q_\theta = -2\rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - rR_{0\gamma} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta}$$

$$q_\gamma = -2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - rR_{0\gamma} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{w}{R^2} \right) + (R_\gamma - R_{0\gamma}) + \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_\theta}{\partial \theta}$$

(Здесь величины $R_\gamma - R_{0\gamma}$, m_x , m_θ появляются вследствие изгиба оболочки и обусловлены возникшей пондеромоторной силой);

уравнений электродинамики (2.1) для области $\gamma \leq |h|$;

уравнений для электродинамики для областей $h < \gamma < r$, $\gamma < -h$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{e}^{(s)} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{h}^{(s)}}{\partial t} & \operatorname{rot} \vec{h}^{(s)} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{e}^{(s)}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{e}^{(s)} &= 0 & \operatorname{div} \vec{h}^{(s)} &= 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

индекс $s=1$ относится к области $\gamma < -h$, а $s=2$ — к области $h < \gamma < r$.

Решения приведенных уравнений (2.1) и (2.5) должны удовлетворять для компонент электромагнитного поля общим граничным условиям на колеблющихся поверхностях оболочки.

С помощью принятой здесь гипотезы магнитоупругости представляется возможным выразить остальные компоненты электромагнитного поля и, следовательно, компоненты векторов $\vec{R}$ и $\vec{m}$ с помощью функций $(\varphi, \psi, f, u, v, w)$ и значений компонент магнитного поля h_θ^+ , h_θ^- на поверхностях оболочки $\gamma = \pm h$, а также привести разрешающие уравнения относительно функций (φ, ψ, f) .

Из уравнений (2.1) согласно способу, изложенному в [3], компоненты электромагнитного поля h_x , h_θ , h_γ представляются следующим образом:

$$\begin{aligned} h_x &= \gamma \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{4\pi\sigma}{c} \psi \right) + \frac{h_x^+ + h_x^-}{2} \\ h_\theta &= \frac{2r\gamma - \gamma^2 + h^2}{2(r-\gamma)} \left(\frac{\partial f}{\partial \theta} - \frac{4\pi\sigma}{c} \varphi \right) + \\ &+ \frac{8\pi\sigma^2 E_0}{c^3} \frac{\partial w}{\partial t} \frac{r\gamma^2 - rh^2 - 2rh\gamma + h^2\gamma - \frac{\gamma^3}{3}}{r-\gamma} + \frac{(r-h)h_\theta^+ + (r+h)h_\theta^-}{2(r-\gamma)} \\ e_\gamma &= \frac{c}{4\pi\sigma} \frac{(2r\gamma - \gamma^2 + h^2)}{2(r-\gamma)} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \theta} - \frac{4\pi\sigma}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{c}{4\pi\sigma} \frac{(r-h) \frac{\partial h_0^+}{\partial x} + (r+h) \frac{\partial h_0^-}{\partial x}}{2(r-\gamma)} + \\
& + \frac{8\pi\sigma^2 E_0}{c^3} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \frac{r\gamma^2 - rh^2 - 2rh\gamma + h^2\gamma - \frac{\gamma^3}{3}}{r-\gamma} - \frac{c}{4\pi\sigma} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{h_x^+ - h_x^-}{2} \right) - \\
& - \frac{c}{4\pi\sigma} \gamma \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \theta} + \frac{4\pi\sigma}{c} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{c} H_{0\theta} \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \gamma \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right) \quad (2.6)
\end{aligned}$$

Осредняя уравнения (2.1) по толщине оболочки, получим следующие основные уравнения относительно функций (φ, ψ, f) :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \theta} - \frac{4\pi\sigma}{c} \varphi &= \frac{h_0^+ - h_0^-}{2h} - \frac{h_0^+ + h_0^-}{2r} + \frac{16\pi^2\sigma^2 E_0 h}{c^3} \frac{\partial w}{\partial t} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{h}{r} \right) \\
\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} \\
\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{4\pi\sigma}{c} \psi &= \frac{h_x^+ - h_x^-}{2h} \quad (2.7)
\end{aligned}$$

Индексы $+$ и $-$ означают значения соответствующих величин при $\gamma = +h$, $\gamma = -h$.

Компоненты сил и моментов, входящие в уравнения (2.4), согласно (1.2), (2.3), (2.2) и (2.6), (2.7) выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned}
R_\gamma &= \frac{8\pi\sigma^2 E_0 h^2 \left(1 - \frac{2}{3} \frac{h}{r} \right)}{c^2} + \frac{8\pi\sigma^2 E_0 h^2 \left(1 - \frac{2}{3} \frac{h}{r} \right) \varphi}{c^2} - \\
&- \frac{32\pi^2\sigma^3 E_0 h^2 \left(1 - \frac{4}{5} \frac{h}{r} \right)}{c^4} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\sigma E_0}{c} \left[\frac{(h_0^+ - h_0^-) h^2}{3r} + (h_0^+ + h_0^-) h \right] - \\
m_x &= \frac{E_0 \sigma h^3}{c} \left\{ \frac{44}{3} \frac{\pi^2 \sigma^2 E_0 h^2}{c^3} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial \theta} (h_x^+ + h_x^-) \left(1 - \frac{h}{r} \right) - \right. \\
&- \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial \theta} (h_x^+ - h_x^-) \left(1 - \frac{4}{5} \frac{h}{r} \right) - \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x} (h_0^+ + h_0^-) \left(1 - \frac{3h}{r} \right) + \\
&+ \left. \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} (h_0^+ - h_0^-) \left(1 - \frac{9}{5} \frac{h}{r} \right) \right\} \\
m_\theta &= 0 \quad (2.8)
\end{aligned}$$

При получении выражений (2.8) пренебрежено величиной h^2/r^2 по сравнению с 1.

Таким образом, задача устойчивости токнесущей оболочки свелась к совместному решению относительно функций ($u, v, w, f, \psi, \varphi$) уравнений (2.4), в которые подставлены значения R_0, R_1, m_x, m_θ из (1.5) и (2.8), уравнений (2.7), а также уравнений электродинамики (2.5) вне областей, занимаемых оболочкой. Для совместного решения этих уравнений необходимы граничные условия относительно значений компонент возмущенного электромагнитного поля на поверхностях оболочки.

3. Решение искомой задачи приводится в частном случае, когда возмущения не зависят от x , и в приближении $h/r \ll 1$. Для простоты также пренебрегается инерционный член $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$.

В этом случае система уравнений относительно искомых функций после некоторых преобразований примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{h^2}{3} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{(1-v^2)r}{E} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{4\pi^2 h(1-v^2)E_0^2 r}{Ec^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{w}{r^2} \right) - \\ - \frac{4\pi^2 h(1-v^2)}{Ec^2} \varphi + \frac{16\pi^2 \epsilon^2 h^2 E_0^2}{Ec^4} \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\sigma E_0 h(1-v^2)}{6rcE} (h_\theta^+ - h_\theta^-) + \\ + \frac{\sigma E_0(1-v^2)}{Ec} (h_\theta^+ + h_\theta^-) = 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} - \frac{4\pi\sigma}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{h_\theta^+ - h_\theta^-}{2h} - \frac{h_\theta^+ + h_\theta^-}{2r} \right) - \frac{16\pi^2 \epsilon^2 E_0 h}{c^4} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} - \frac{4\pi\sigma}{c^2} \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{h_\theta^+ - h_\theta^-}{2h} - \frac{h_\theta^+ + h_\theta^-}{2r} \right) - \frac{16\pi^2 \epsilon^2 E_0 h}{c^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial t} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} - \frac{4\pi\sigma}{c^2} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{h_x^+ - h_x^-}{2h} \right) - \frac{c}{4\pi\sigma} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\frac{h_x^+ - h_x^-}{2h} \right) = 0$$

Как видно из рассмотрения (3.1), последнее уравнение отделяется от остальных уравнений и поэтому оно может быть опущено.

Данная система должна решаться совместно с уравнениями электродинамики вне областей, занимаемых оболочкой, и с общими граничными условиями на поверхностях $\gamma = \pm h$ оболочки.

Отметим, что из уравнений электродинамики (2.5) следует привести уравнения, определяющие только тангенциальную компоненту $h_\theta^{(s)}$, потому что, как уже было отмечено выше, последнее уравнение из системы (3.1), содержащее поверхностные значения другой тангенциальной компоненты магнитного поля h_x^+, h_x^- , может быть опущено.

Интересующие нас уравнения и соответствующие граничные условия следующие:

$$\frac{\partial^2 h_\gamma^{(s)}}{\partial \gamma^2} - \frac{1}{r-\gamma} \frac{\partial h_\gamma^{(s)}}{\partial \gamma} + \frac{\partial^2 h_\gamma^{(s)}}{\partial \theta^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 h_\gamma^{(s)}}{\partial t^2} = 0 \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial h_0^{(s)}}{\partial \theta} - \frac{1}{r-\gamma} \frac{\partial (r-\gamma) h_\gamma^{(s)}}{\partial \gamma} = 0 \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} h_\gamma^{(1)} &= f & h_\theta^{(1)} &= h_\theta^- & \text{при } \gamma &= -h \\ h_\gamma^{(2)} &= f & h_\theta^{(2)} &= h_\theta^+ & \text{при } \gamma &= +h \end{aligned} \quad (3.3)$$

Решения уравнений (3.1) и (3.2) ищутся в виде

$$w = w_0 \exp i(\Omega t - k\theta) \quad \varphi = \varphi_0 \exp i(\Omega t - k\theta) \quad f = f_0 \exp i(\Omega - k\theta) \quad (3.4)$$

$$h_\gamma^{(s)} = \alpha^{(s)}(\gamma) \exp i(\Omega t - k\theta) \quad h_\theta^{(s)} = \beta^{(s)}(\gamma) \exp i(\Omega t - k\theta)$$

Здесь функции от γ являются неизвестными и подлежат определению, k — волновое число, Ω — частота колебаний.

Подставляя (3.4) в (3.2), получим следующие уравнения относительно $\alpha^{(s)}$ и $\beta^{(s)}$:

$$\frac{d^2 \alpha^{(s)}}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d\alpha^{(s)}}{dz} - k_1^2 \alpha^{(s)} = 0 \quad (3.5)$$

$$\beta^{(s)} = -\frac{i}{k(r-\gamma)} \alpha^{(s)} + \frac{i}{k} \frac{d\alpha^{(s)}}{d\gamma} \quad (3.6)$$

где $z = r - \gamma$, $k_1^2 = k^2 - \frac{\Omega^2}{c^2}$.

Принимается, что $V^2/c^2 \ll 1$ ($V = \frac{\Omega}{k}$ — фазовая скорость распространения упругих волн).

Тогда решение уравнения (3.5) представится в виде

$$\alpha^{(s)}(\gamma) = C_1^{(s)} J_0[k_1(r-\gamma)] + C_2^{(s)} K_0[k_1(r-\gamma)]$$

где J_0 и K_0 — модифицированные функции Бесселя нулевого порядка.

Известно, что функция K_0 в нуле имеет особенность, а функция J_0 неограниченно возрастает при стремлении аргумента к бесконечности.

Исходя из этого, следует положить $C_1^{(2)} = C_1^{(1)} = 0$.

Остальные постоянные интегрирования определяются из граничных условий (3.3), с учетом (3.4)

$$C_2^{(1)} = \frac{f_0}{K_0[k_1(r+h)]}, \quad C_1^{(2)} = \frac{f_0}{J_0[k_1(r-h)]}$$

Окончательно для функции $\alpha^{(s)}$ имеем

$$\alpha^{(1)} = f_0 \frac{K_0[k_1(r-\gamma)]}{K_0[k_1(r+h)]}, \quad \alpha^{(2)} = f_0 \frac{J_0[k_1(r-\gamma)]}{J_0[k_1(r-h)]} \quad (3.7)$$

Подставляя (3.7) в (3.6), получим

$$\beta^{(1)} = \frac{i}{k} f_0 \frac{K_0' [k_1 (r - \gamma)]}{K_0 [k_1 (r + h)]} - \frac{if_0}{k (r - \gamma)} \frac{K_0 [k_1 (r - \gamma)]}{K_0 [k_1 (r + h)]}$$

$$\beta^{(2)} = \frac{i}{k} f_0 \frac{J_0' [k_1 (r - \gamma)]}{J_0 [k_1 (r - h)]} - \frac{if_0}{k (r - \gamma)} \frac{J_0 [k_1 (r - \gamma)]}{J_0 [k_1 (r - h)]}$$
(3.8)

(штрих означает дифференцирование по γ).

Удовлетворяя граничным условиям (3.3), а также и (3.4), для компонент индуцированного магнитного поля h_θ^+ и h_θ^- получим

$$h_\theta^+ = \beta^{(2)}(h) \exp i(\Omega t - k\theta), \quad h_\theta^- = \beta^{(1)}(-h) \exp i(\Omega t - k\theta) \quad (3.9)$$

Таким образом, подставляя (3.9), (3.4) с учетом (3.8) в систему уравнений (3.1), можно получить характеристическое уравнение относительно частоты Ω . Ввиду громоздкости это уравнение здесь не приводится.

В случае $k_1 r \gg 1$ можно применить асимптотические формулы функций Бесселя.

Выражения для h_θ^+ и h_θ^- значительно упрощаются

$$h_\theta^+ = \frac{ik_1}{k} f, \quad h_\theta^- = -\frac{ik_1}{k} f$$

Учитывая, что $V^2/c^2 \ll 1$, можно считать $k_1 = k$

$$h_\theta^+ = if, \quad h_\theta^- = -if \quad (3.10)$$

Подставляя (3.10) в (3.1), получим следующую основную систему уравнений:

$$\frac{h^2}{3} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{(1 - v^2) \rho}{E} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{4\pi \sigma^2 h r (1 - v^2)}{Ec^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{w}{r^2} \right) -$$

$$- \frac{4\pi \sigma^2 h (1 - v^2)}{Ec^2} \varphi + \frac{16\pi^2 \sigma^3 h^2 E_0^2}{Ec^4} \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\sigma E_0 h (1 - v^2) i}{3rcE} f = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} - \frac{4\pi \sigma}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{i}{ch} \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{16\pi^2 \sigma^2 E_0 h}{c^4} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} - \frac{4\pi \sigma}{c^2} \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{i}{h} \frac{\partial f}{\partial \theta} - \frac{16\pi^2 \sigma^2 E_0 h}{c^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial t} = 0$$
(3.11)

Подставляя (3.4) в (3.11), приходим к характеристическому уравнению, которое имеет следующий вид:

$$a_0 \omega^4 + a_1 \omega^3 + a_2 \omega^2 + a_3 \omega + a_4 = 0 \quad (3.12)$$

где $\omega = i\Omega$, а коэффициенты a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 — действительные выражения

$$a_0 = \frac{16\pi^2 \sigma^2 \rho (1 - v^2)}{Ec^4}$$

$$a_1 = \frac{4\pi \rho \sigma k (1 - v^2) (1 + 2hk)}{Ehc^2} + \frac{512\pi^4 \sigma^5 E^2 h^2 (1 - v^2)}{Ec^8}$$

$$a_2 = \frac{\rho k^3 (1 + hk) (1 - v^2)}{Eh} + \frac{16\pi^2 \sigma^2 h^2 k^4}{3c^4} - \frac{64\pi^3 \sigma^4 h k^2 E_0^2 (1 - v^2)}{Ec^6}$$

$$a_3 = \frac{4\pi \sigma h k^5 (1 + 2hk)}{3c^2} - \frac{16\pi^2 \sigma^3 r k^3 (1 - v^2) (1 + 2hk) E_0^2}{Ec^4}$$

$$a_4 = \frac{h k^7 (1 + hk)}{3} - \frac{4\pi \sigma^2 k^5 r E_0^2 (1 + hk) (1 - v^2)}{Ec^2}$$

Критерием устойчивости являются следующие требования:

$$\operatorname{Re} \omega_i < 0 \quad i = 1, 2, 3, 4$$

где ω_i — корни уравнения (3.12).

Используя критерий Рауса—Гурвица, получим следующее критическое значение для напряженности начального электрического поля

$$E_0^2 = \frac{E h k^2 c^2}{12\pi \sigma^2 (1 - v^2) r} - \frac{\rho c^6 (1 + hk) k}{64\pi^3 \sigma^4 h^2 r} \quad (3.13)$$

Из (3.13) найдем критическое значение для плотности $j_0 = \sigma E_0$ начального электрического тока

$$j_0^2 = \frac{E h k^2 c^2}{12\pi r (1 - v^2)} (1 - \delta) \quad (3.14)$$

где δ — безразмерная величина

$$\delta = \frac{3}{16\pi^2} \frac{\rho c^4 (1 - v^2) (1 + hk)}{E \sigma^2 h^2 k}$$

Отметим, что для всех проводящих материалов $\delta \ll 1$.

4. Для сравнения рассмотрим задачу, аналогичную исходной, но без учета индуцированных электромагнитных полей.

В этом случае уравнение устойчивости имеет вид

$$\frac{h^2}{3} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} + \frac{4\pi \sigma^2 h r (1 - v^2)}{Ec^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{w}{r^2} \right) + \frac{(1 - v^2) \rho}{E} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (4.1)$$

Решение ищется в виде

$$w = w_0 \exp i(\Omega t - k\theta)$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\frac{h^2 k^4}{3} - \frac{4\pi \sigma^2 E_0^2 h (1 - v^2) (r^2 k^2 - 1)}{Ec^2 r} - \frac{(1 - v^2) \rho}{E} \Omega^2 = 0$$

откуда

$$\Omega^2 = \frac{E}{(1 - \nu^2)\rho} \left[\frac{h^2 k^4}{3} - \frac{4\pi\sigma^2 E_0^2 h (1 - \nu^2) (r^2 k^2 - 1)}{Ec^2 r} \right]$$

Условием устойчивости является требование положительности выражения в квадратной скобке.

Таким образом, мы получаем критическое значение для компоненты начального электрического поля

$$E_{0*}^2 = \frac{E h k^4 c^2 r}{12\pi\sigma^2 (1 - \nu^2) (r^2 k^2 - 1)} \quad (4.2)$$

Частота колебаний определяется из уравнения

$$\Omega = \Omega_0 \left(1 - \frac{E_0^2}{E_{0*}^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Критическое значение плотности начального электрического тока имеет вид

$$j_{0*}^2 = \frac{E h k^4 c^2 r}{12\pi (1 - \nu^2) (r^2 k^2 - 1)} \quad (4.3)$$

Сопоставление (4.3) с (3.14) показывает, что индуцированное электромагнитное поле при $kr \gg 1$ незначительно уменьшает критическое значение плотности электрического тока, оно влияет лишь только на частоту магнитоупругих колебаний.

То же самое можно отметить и в случае $kr \sim 1$. В задачах устойчивости токнесущей оболочки немаловажную роль играют температурные напряжения, возникающие вследствие выделения в оболочке джоулева тепла, определяемого по формуле [4]

$$Q = \frac{j^2}{\sigma}$$

Величина температуры ΔT нагрева оболочки равна [6]:

$$\Delta T = \frac{Qh}{\alpha_T} = \frac{j^2 h}{\sigma \alpha_T}$$

где α_T — коэффициент теплообмена.

Ниже приводятся численные результаты относительно температуры нагрева ΔT для оболочек, изготовленных из различных материалов и находящихся в реальных условиях теплообмена с окружающей средой, при критических значениях j_{0*} .

Для вычисления ΔT мы будем исходить из формулы (4.3)

$$\Delta T = \frac{E h^2 c^2}{12\pi (1 - \nu^2) \sigma \alpha_T r^3} \frac{m^4}{m^2 - 1} \quad m = kr$$

Таблица 1

Материал оболочки	E , дин/см ²	ν	m	τ , $\frac{1}{\text{сек}}$	τ_1 , $\frac{\text{эрг}}{\text{сек см}^2 \text{ z}}$	ΔT , °C		
						$\frac{h}{r} = \frac{1}{100}$	$\frac{h}{r} = \frac{1}{500}$	$\frac{h}{r} = \frac{1}{1000}$
Золото	$0.8 \cdot 10^{12}$	0.4	2	$4.5 \cdot 10^{17}$	$2 \cdot 10^5$	1300	10	1.3
Медь	$1.2 \cdot 10^{12}$	0.35	2	$5.3 \cdot 10^{17}$	$2 \cdot 10^5$	1600	13	2.6
Латунь	10^{12}	0.35	2	$2 \cdot 10^{17}$	$2 \cdot 10^5$	3500	28	3.5

Как видно из таблицы, температура нагрева оболочек, а следовательно, и температурные напряжения малы в случае $h/r=1/500$, $h/r=1/1000$.

В заключение автор выражает благодарность М. В. Белубекяну за постановку и обсуждение задачи.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 13 VII 1973

Կ. Բ. ԿԱԶԱՐՅԱՆ

ՀԱՍԱՆՔԱՏԱՐ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹԻ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԸ ԵՎ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ա մ փ ո փ ու մ

Դիտարկվում է վերջավոր-հաղորդիչ հոսանքատար թաղանթի կայունության խնդիրը:

Գտնված է սկզբնական էլեկտրական դաշտի խտության կրիտիկական արժեքները, որոնց դեպքում թաղանթը կորցնում է կայունությունը:

Ցույց է տրված, որ ինդուկցված էլեկտրամագնիսական դաշտերի հաշվառումը չնչին չափով է փոփոխում սկզբնական հոսանքի խտության կրիտիկական արժեքները:

Բերված են թաղանթի տաքացման ջերմաստիճանի վերաբերյալ թվային տվյալներ կախված թաղանթում Ջոուլյան ջերմության առաջացումից:

VIBRATION AND STABILITY OF A CURRENT-CARRYING CYLINDRICAL SHELL

K. B. KAZARIAN

S u m m a r y

The problem in stability of a finite-conducting current-carrying shell is considered. The critical values of the primary current density at which the shell loses its stability are found.

It is shown that the presence of induced electromagnetic fields decreases but insignificantly the critical values of the primary current density.

The numerical data on the shell heating temperature due to the Joule heat evolved in the shell are presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вандакуров Ю. В., Колесникова Э. Н. Устойчивость твердого проводящего цилиндра в магнитном поле протекающего по нему тока. ЖТФ, т. XXXVII, вып. 11, 1967.
2. Овакимян Р. Н. Об устойчивости цилиндрической токонесущей оболочки бесконечной проводимости. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XXII, № 4, 1969.
3. Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В. К магнитоупругости тонких оболочек и пластин. ПММ, т. 37, вып. 1, 1973.
4. Тамм И. Е. Основы теории электричества. Гостехиздат, М., 1957.
5. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. Гостехиздат, М., 1956.
6. Овакимян Р. Н. О нагрузках на цилиндрическую оболочку в электромагнитном поле. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XX, № 5, 1967.