ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXVII, № 2, 1974 Механика

М. Р. ГАЛАДЖЕВА, В. Х. СИРУНЯН, Б. И. СМЕТАНИН

# О РАСКЛИНИВАНИИ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Рассматривается задача о расклинивании упругой полуплоскости узким жестким клином с углом при вершине $2\alpha$. В окрестности вершины врезающегося клина образуется трещина, ориентированная по его биссектрисе. Клин вдавливается в полуплоскость силой $P$. Трение на гранях клина предполагается отсутствующим.

Задача сведена к интегральному уравнению первого рода с сингулярным ядром сложной структуры. Найдено асимптотическое решение этого уравнения «методом больших $\lambda$» [1]. Определены значения параметров клина, при которых должно происходить расклинивание полуплоскости. Расклинивание полуплоскости клином постоянной толщины изучено ранее в работе [2].

1. Будем предполагать, что в силу узости клина граничные условия задачи возможно снести на его ось. Тогда, разыскивая решение уравнений Ламе в цилиндрической системе координат в форме интегралов Меллина, сведем задачу к следующему интегральному уравнению первого рода:

$$\int_a^b \frac{\gamma(\rho)}{\rho} d\rho \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} L(-is)\left(\frac{\rho}{r}\right)^s ds = -\int_0^a \frac{f(\rho)}{\rho} d\rho \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} L(-is)\left(\frac{\rho}{r}\right)^s ds + D_0 \tag{1.1}$$

$$(a \leqslant r \leqslant b, \ D_0 = \text{const})$$

$$L(-is) = -2i\left(s^2 - \sin^2\frac{\pi s}{2}\right)(\sin \pi s)^{-1} \tag{1.2}$$

Здесь $\gamma(r)$ — функция, описывающая форму трещины, $f(r)$ — функция, описывающая форму клина, $a$ и $b$ — координаты начала и конца трещины (фиг. 1). Необходимо найти решение уравнения (1.1), (1.2), удовлетворяющее очевидным условиям

$$\gamma(a) = f(a), \qquad \gamma(b) = 0 \tag{1.3}$$

Величины $a$ и $b$ определим затем из условий [4]

$$\lim_{r\to a}[\gamma'(r) - f'(r)] = 0$$

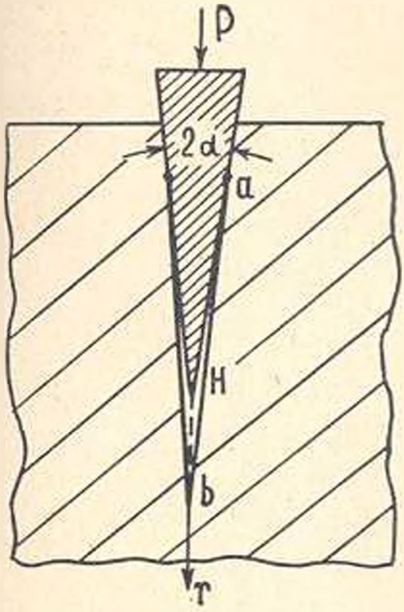
$$\lim_{r\to b}\gamma'(r)\sqrt{b-r} = -\frac{K}{\pi\Delta}, \quad \left(\Delta = \frac{G}{1-\nu}\right) \tag{1.4}$$

где $K$ — модуль сцепления материала полуплоскости, $G$ и $\nu$ — упругие постоянные полуплоскости.

Отметим, что контактные давления $q(r)$ между поверхностями клина и полуплоскости могут быть найдены после определения функции $\gamma(r)$ по формуле[1]

$$q(r) = -\frac{\Delta}{2\pi}\frac{d}{dr}\int_0^b \frac{v(\rho)}{\rho}\,d\rho \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} L(-is)\left(\frac{\rho}{r}\right)^s ds \qquad (0 \leqslant r \leqslant a)$$

$$v(r) = f(r) \quad (0 \leqslant r \leqslant a), \qquad v(r) = \gamma(r) \quad (a \leqslant r \leqslant b). \tag{1.5}$$




Фиг. 1.

Связь между глубиной погружения клина $H$ и величиной вдавливающей силы P может быть затем определена из условия статики

$$P = 2\alpha\int_0^a q(r)\,dr \tag{1.6}$$

Введем новую неизвестную функцию

$$\delta(r) = \gamma(r) - f(r) \quad (a \leqslant r \leqslant H), \qquad \delta(r) = \gamma(r) \quad (H \leqslant r \leqslant b) \tag{1.7}$$

Затем, полагая $c=0$, $s=iu$ и учитывая, что

$$\int_0^\infty L(u)\sin\left(u\ln\frac{\rho}{r}\right)du = -\frac{8\rho^2 r^2}{(\rho-r)(\rho+r)^3}, \qquad f(r) = \alpha(H-r) \tag{1.8}$$

приведем интегральное уравнение (1.1) к виду

[1] Рассматривается случай плоской деформации.

$$\int_a^b \frac{\delta(\rho)}{\rho} Q\left(\ln\frac{\rho}{r}\right) d\rho = g(r) \qquad (a \leqslant r \leqslant b) \tag{1.9}$$

$$Q(t) = \int_0^\infty L(u)\sin(ut)\,du \qquad \left(t = \ln\frac{\rho}{r}\right) \tag{1.10}$$

$$g(r) = -\frac{h}{H}(H-r)\ln\left|\frac{r-H}{r+H}\right| + \frac{2rh}{H+r} + D$$
$$(h = H\alpha), \qquad D = \mathrm{const} \tag{1.11}$$

Решение уравнения (1.9) должно удовлетворять условиям

$$\delta(a) = \delta(b) = 0 \tag{1.12}$$

Введем новые переменные и обозначения

$$r = a\exp\frac{1+x}{\lambda}, \qquad \rho = a\exp\frac{1+\xi}{\lambda}, \qquad \lambda = \frac{2}{\ln b/a}$$
$$\varphi(\xi) = \delta\left(a\exp\frac{1+\xi}{\lambda}\right), \qquad p(x) = g\left(a\exp\frac{1+x}{\lambda}\right) \tag{1.13}$$

Тогда уравнение (1.9) можно записать в форме

$$\int_{-1}^{1} \varphi(\xi)\, Q\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right) d\xi = \lambda p(x) \qquad (|x| \leqslant 1) \tag{1.14}$$

Выделяя сингулярную часть ядра $Q(t)$, перепишем уравнение (1.14) следующим образом:

$$\int_{-1}^{1} \frac{\varphi(\xi)}{\xi - x} d\xi = \psi(x) \qquad (|x| \leqslant 1) \tag{1.15}$$

$$\psi(x) = p(x) - \frac{1}{\lambda}\int_{-1}^{1} \varphi(\xi)\, F\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right) d\xi \tag{1.16}$$

$$F(t) = \int_0^\infty [L(u) - 1]\sin(ut)\,du$$

Нетрудно показать, что функция $F(t)$ при $0 \leqslant |t| \leqslant 2/\lambda$, $\lambda > 0$ непрерывна со всеми производными.

Ограниченное решение уравнения (1.15) имеет вид

$$\varphi(x) = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi^2}\int_{-1}^{1} \frac{\psi(t)\,dt}{(t-x)\sqrt{1-t^2}} \qquad (|x|) \leqslant 1) \tag{1.17}$$

при дополнительных условиях

$$\Phi = -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{t\psi(t)\,dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{\psi(t)\,dt}{\sqrt{1-t^2}} = 0 \qquad \left(\Phi = \int_{-1}^{1}\varphi(\xi)\,d\xi\right) \tag{1.18}$$

Соотношение (1.17) представляет собой с учетом (1.16) интегральное уравнение второго рода относительно $\varphi(x)$. Условия (1.18) могут быть удовлетворены путем выбора двух произвольных постоянных: $D$ в (1.11) и $\Phi$.

Раскладывая функцию $p(x)$ в ряд по степеням $\lambda^{-1}$, получим

$$p(x) = h\sum_{k=0}^{\infty}[A_k(x-x_0) - B_k(x-x_0)\ln\lambda]\lambda^{-k}$$

$$A_0 = 1 + D/h, \qquad A_1 = (x-x_0)\left(\frac{1}{2} + \ln\frac{|x-x_0|}{2}\right)$$

$$A_2 = \frac{(x-x_0)^2}{2}\ln\frac{|x-x_0|}{2}, \qquad x_0 = \lambda\ln\frac{H}{a} - 1 \tag{1.19}$$

$$B_0 = 0, \quad B_1 = x - x_0, \quad B_2 = 0.5(x-x_0)^2 \quad \text{и т. д.}$$

Легко убедиться, что разложение (1.19) равномерно сходится по $x\in[-1, 1]$, если

$$\lambda > \varkappa = (1{,}10)^{-1}\sup[(1-x_0),\ (1+x_0)] \tag{1.20}$$

Регулярную часть ядра $F(t)$ при больших $\lambda$ (малых $t$) разложим в ряд по степеням $t$

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{2n+1}$$

$$a_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\int_0^{\infty}[L(u)-1]\,u^{2n+1}\,du \qquad (n = 0, 1, \ldots) \tag{1.21}$$

Можно показать, что разложение (1.21) равномерно сходится при $|t|\leqslant\pi$ и, следовательно, равномерно сходится по $x\in[-1,1]$ и $\xi\in[-1, 1]$, если

$$\lambda > 2/\pi \tag{1.22}$$

Вычислением установлено

$$a_0 = -\frac{5}{12}, \quad a_1 = \frac{11}{180}, \quad a_2 = -\frac{239}{12096} \tag{1.23}$$

На основании (1.19) и (1.21) можно заключить, что асимптотически при больших $\lambda$ решение интегрального уравнения (1.17) следует искать в виде

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^{-i} (\ln \lambda)^j \varphi_{ij}(x) \tag{1.24}$$

причем разложение (1.24) будет иметь смысл, по крайней мере, при

$$\lambda > \sup(\varkappa,\ 2\pi^{-1}) \tag{1.25}$$

Подставляя (1.16), (1.19), (1.21), (1.24) в уравнение (1.17) и приравнивая члены правой и левой частей при одинаковых степенях $\lambda^{-1}$ и $\ln \lambda$, последовательно найдем

$$\varphi_{00}(x) = 0$$

$$\varphi_{10}(x) = -\frac{h\sqrt{1-x^2}}{\pi}\left\{\frac{1}{2} - 2\ln 2 + \frac{x-x_0}{\sqrt{1-x^2}}\left[\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(x-x_0) - \arcsin x\right]\right\}$$

$$\varphi_{20}(x) = -\frac{h\sqrt{1-x^2}}{2\pi}\left\{(4\ln 2 - 1)x_0 - 2x\ln 2 + \right.$$

$$\left. + \frac{(x-x_0)^2}{\sqrt{1-x^2}}\left[\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(x-x_0) - \arcsin x\right]\right\}, \qquad \varphi_{01}(x) = 0 \tag{1.26}$$

$$\varphi_{11}(x) = h\pi^{-1}\sqrt{1-x^2}, \qquad \varphi_{21}(x) = h(2\pi)^{-1}\sqrt{1-x^2}(x-2x_0)$$

$$\varphi_{12}(x) = 0, \qquad \varphi_{02}(x) = 0, \qquad \varphi_{22}(x) = 0 \quad \text{и т. д.}$$

Подставляя выражения (1.26) в (1.24) и возвращаясь затем к старым обозначениям и переменным в соответствии с (1.13), получим с учетом (1.7) следующее выражение для функции $\gamma(r)$:

$$\gamma(r) = hE(r) + \frac{h}{2}\ln\frac{r}{H}\left(\ln\frac{r}{H} + 2\right) + h\left(1 - \frac{r}{H}\right) \quad (a \leqslant r \leqslant H)$$

$$\gamma(r) = hE(r) \qquad (H \leqslant r \leqslant b) \tag{1.27}$$

$$E(r) = -\frac{1}{2\pi}\left\{\ln\frac{r}{H}\left(\ln\frac{r}{H} + 2\right)\arccos\left(\lambda\ln\frac{r}{\sqrt{ab}}\right) + \right.$$

$$\left. + \left[(2\ln 4\lambda - 1)\left(\ln\frac{H}{\sqrt{ab}} - 1\right) - \ln 4\lambda \ln\frac{r}{\sqrt{ab}}\right]\sqrt{\ln\frac{r}{a}\ln\frac{b}{r}}\right\} + O(\lambda^{-3})$$

Практически формулу (1.27) можно использовать при $\lambda > 4$.

2. Подставим в соотношения (1.4) $\gamma(r)$ в виде (1.27) и введем обозначения

$$\ln\frac{H}{a} = \mu, \qquad \ln\frac{b}{a} = \tau, \qquad \frac{2K}{\pi\Delta\sqrt{H}} = M \tag{2.1}$$

Разлагая затем полученные выражения в ряды по малым параметрам $\mu$ и $\tau$ и удерживая лишь члены порядка $\mu^2$, $\mu\tau$ и $\tau^2$, найдем

$$\mu A_1(\tau) + B_1(\tau) = 0, \qquad \mu A_2(\tau) + B_2(\tau) = -M$$

$$A_1(\tau) = \frac{1}{\sqrt{|\tau|}}\left[-2 + 0.5\tau\left(\ln|\tau| - 1.579\right)\right], \qquad A_2(\tau) = A_1(-\tau)$$

$$B_1(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\tau}}\left[\tau\left(1.579 - \ln\tau\right) + 0.25\tau^2\left(1.079 - \ln\tau\right)\right] \tag{2.2}$$

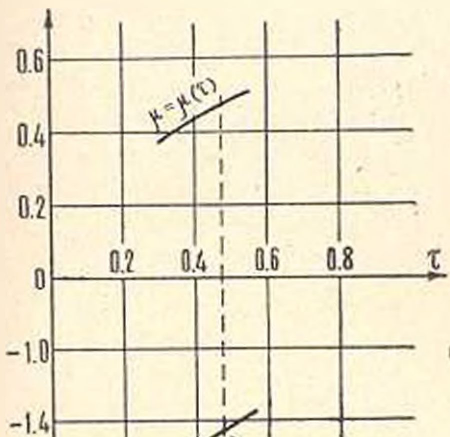
$$B_2(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\tau}}\left[\tau\left(0.421 + \ln\tau\right) - 0.25\tau^2\left(2.079 - \ln\tau\right)\right]$$

Из первого соотношения (2.2) определим

$$\mu = \mu(\tau) = -B_1(\tau)\, A_1^{-1}(\tau) \tag{2.3}$$

а второе соотношение (2.2) представим в форме

$$y(\tau) = -M, \qquad y(\tau) = B_2(\tau) - A_2(\tau)\, B_1(\tau)\, A_1^{-1}(\tau) \tag{2.4}$$




Фиг. 2.

Графики функций $\mu(\tau)$ и $y(\tau)$ даны на фиг. 2. Задавая значение $M$, получим искомое $\tau$, как точку пересечения кривых $y = y(\tau)$ и $y = -M$. Затем на графике $\mu = \mu(\tau)$ отыщем искомое $\mu$. Таким образом, при заданных $H$ и $\alpha$ определяются величины $a$ и $b$.

Как показали численные расчеты, решение системы (2.2), удовлетворяющее очевидному условию $\mu < \tau$, возможно при $\tau > 0.47$. При этом (фиг. 2)

$$M = \frac{2K}{\alpha\Delta\sqrt{H}} < 1.46 \tag{2.5}$$

Неравенство (2.5) при заданных постоянных материала полуплоскости $\nu$, $G$ и $K$ определяет значения параметров $\alpha$ и $H$ клина, при которых должно происходить расклинивание полуплоскости.

В качестве примера рассмотрим расклинивание оргстекла клином с параметрами $\alpha=1^\circ$ и $H=0.85$ *см*. Следуя [3], положим[1] $E=2.45\cdot 10^5$ *нсм*$^{-2}$, $\nu=0.25$, $K=1500$ *нсм*$^{-3/2}$.

Из системы (2.2) найдем: $a=0.52$ *см*, $b=0.86$ *см*.

Авторы благодарят В. М. Александрова за постановку задачи и ценные советы при обсуждении настоящей работы.

НИИ механики и прикладной математики
Северо-Кавказского научного центра высшей школы

Поступила 20 X 1972

Մ. Ռ. ԳԱԼԱՋԵՎԱ, Վ. Խ. ՍԻՐՈՒՆՅԱՆ, Բ. Ի. ՍՄԵՏԱՆԻՆ

## ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԿԻՍԱՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՍԵՊԱՎՈՐՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

### Ամփոփում

*Դիտարկվում է նեղ, կոշտ, ողորկ եռանկյունաձև սեպով առաձգական կիսահարթության սեպավորման խնդիրը: Սեպի գագաթի շրջակայքում առաջանում է ճաք: Խնդիրը բերվում է առաջին սեռի ինտեգրալ հավասարումից ճաքի տեսքը բնութագրող ֆունկցիայի որոշմանը:*

*Վերլուծված է այդ հավասարման ճշգրիտ լուծումը, ըստ ինչ որ բնութագրող պարամետրի նկատմամբ լոգարիթմա-աստիճանային շարքի:*

*Կատարված է խնդրի թվային հետազոտումը:*

## ON THE WEDGING OF AN ELASTIC SEMI-PLANE

M. R. HALADGEVA, V. Kh. SIROUNIAN, B. I. SMETANIN

### Summary

The problem on wedging an elastic semi-plane by a narrow tight smooth triangular wedge is considered. In the neighbourhood of the apex a crack is formed. The problem is reduced to the definition of a function, characterizing the shape of the crack, from the first order integral eguation. An expansion of the precise solution of this equation into a logarithmic-power series according to a certain characteristic parameter is obtained.

A numerical analysis of the problem is presented.

---

[1] Проведенные нами эксперименты для пластин из оргстекла дали значение для модуля сцепления $K$, близкое приведенному.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров В. М.* Асимптотические методы в контактных задачах теории упругости. ПММ, т. 32, вып. 4, 1968.
2. *Светлицкий Б. И.* О расклинивании упругого бесконечного клина. ПММ, т. 33, вып. 5, 1969.
3. *Панасюк В. В.* Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. Изд. «Наукова думка», Киев, 1968.
4. *Irwin G. K.* Fracture, Handbuch der Physik. Bd. 6, Springer. Berlin, 1958.