

А. Г. БАГДОЕВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ
 ДЛЯ УРАВНЕНИЙ МАГНИТОТЕРМОУПРУГОСТИ

В работе рассматривается общий и вместе с тем простой подход к получению решений уравнений движения однородной среды при наличии сосредоточенных импульсов. Решения находятся методом интегральных преобразований Фурье и Лапласа, а затем приводятся к форме записи через аналитические функции, введенной В. И. Смирновым и С. Л. Соболевым [1]. Указанным методом в плоской задаче определены фундаментальные решения для уравнений однородного изотропного упругого тела, магнитоупругости, однородного анизотропного упругого тела, термоупругости.

1. Рассматривается задача определения вектора смещения (u, v) в плоской задаче для однородного изотропного упругого тела, удовлетворяющего нулевым начальным условиям и уравнениям

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= (\mu + \lambda) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + X \\ \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= (\mu + \lambda) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + Y \end{aligned} \quad (1.1)$$

где объемные силы берутся в виде $X = X_0 \delta(x) \delta(y) \delta(t)$, $Y = Y_0 \delta(x) \delta(y) \delta(t)$, $\delta(x)$ есть дельта-функция.

Вводя преобразование по Лапласу \bar{u}, \bar{v} от u, v по t и записывая

$$\bar{u} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\bar{u}} e^{i(\bar{\alpha}x + \bar{\beta}y)} d\bar{\alpha} d\bar{\beta}, \quad \bar{v} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\bar{v}} e^{i(\bar{\alpha}x + \bar{\beta}y)} d\bar{\alpha} d\bar{\beta} \quad (1.2)$$

из (1.1) после применения обратного к (1.2) преобразования Фурье можно получить уравнения, решение которых имеет вид

$$\begin{aligned} D\bar{\bar{u}} &= \frac{X_0}{4\pi^2\rho} (s^2 + a^2\bar{\alpha}^2 + b^2\bar{\beta}^2) - \frac{Y_0}{4\pi^2\rho} \bar{\alpha}\bar{\beta} (a^2 - b^2) \\ D\bar{\bar{v}} &= \frac{Y_0}{4\pi^2\rho} (s^2 + a^2\bar{\alpha}^2 + b^2\bar{\beta}^2) - \frac{X_0}{4\pi^2\rho} \bar{\alpha}\bar{\beta} (a^2 - b^2) \end{aligned} \quad (1.3)$$

где

$$D = |\omega^2 - (\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2) a^2| |\omega^2 - (\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2) b^2|, \quad a^2 = \frac{\epsilon + 2\mu}{\rho}$$

$$b^2 = \frac{\mu}{\rho}, \quad s = -i\omega$$

Полагая для определенности $y > 0$, можно видеть, что волны, определяемые уравнением $t - \alpha_0 x - \beta(u_0) y = 0$ лишь при $\beta > 0$ будут приходящими в точку (x, y) из точки 0, поэтому согласно принципу излучения нужно выбрать корни уравнения $D = 0$ в виде $\bar{\beta}_1 = \omega \sqrt{\frac{1}{a^2} - \alpha^2}$, $\bar{\beta}_2 = \omega \sqrt{\frac{1}{b^2} - \alpha^2}$, $\alpha = \frac{\bar{\alpha}}{\omega}$, $\beta = \frac{\bar{\beta}}{\omega}$. Введением малой мнимой части для ω можно добиться, чтобы указанные корни находились вне действительной оси плоскости β , и тогда по теореме о вычетах

$$4\pi^2 \bar{\rho} \bar{u} = 2-i\omega \operatorname{sgn} \omega \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\bar{\alpha}x + \bar{\beta}_1 y)} \frac{1}{-2a^2 \bar{\beta}_1} \times$$

$$\times \frac{X_0(s^2 + a^2 \bar{\beta}_1^2 + b^2 \bar{\alpha}^2) - Y_0 \bar{\alpha} \bar{\beta}_1 (a^2 - b^2)}{\omega^2 - (\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}_1^2) b^2} dz + 2-i\omega \operatorname{sgn} \omega \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\bar{\alpha}x + \bar{\beta}_2 y)} \times$$

$$\times \frac{1}{-2b^2 \bar{\beta}_2} \frac{X_0(s^2 + a^2 \bar{\beta}_2^2 + b^2 \bar{\alpha}^2) - Y_0 \bar{\alpha} \bar{\beta}_2 (a^2 - b^2)}{\omega^2 - (\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}_2^2) a^2} dz \quad (1.4)$$

Аналогичное выражение получается для v . Для точек $y < 0$ знаки $\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2$ меняются, однако решение получится снова в прежнем виде. При применении обратного преобразования по t существенными оказываются окрестности точек $\alpha = \alpha_k$ ($k=1,2$), для которых

$$T(\alpha) = t - \alpha x - \beta_k(\alpha) y, \quad T(\alpha_k) = 0 \quad (1.5)$$

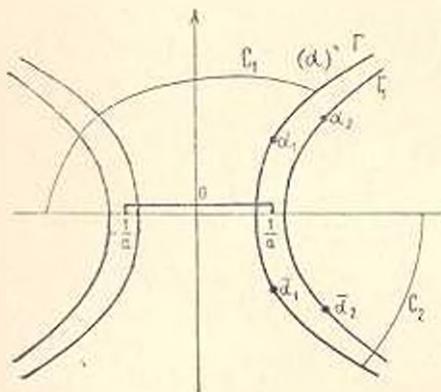
причем комплексно сопряженные значения $\alpha = \bar{\alpha}_k$ также удовлетворяют (1.5). Далее контур интегрирования $-\infty < \alpha < \infty$ заменяется на контуры Γ, Γ_1 (причем в § 2 полюсы подынтегральных функций не дадут дополнительных слагаемых в решении).

Пусть $\omega > 0$. Заменяем контур интегрирования $-\infty < \alpha < \infty$ на контуры Γ, Γ_1 , проходящие через указанные точки α_k в направлении $\operatorname{Im} T(\alpha) = 0$. Для этого нужно найти области постоянного знака $\operatorname{Im} T(\alpha)$. Обозначая $T(\alpha) = B$, где величина B вещественна, обозначая $\alpha = \xi + i\eta$, можно убедиться, что в плоскости ξ, η линии $T(\alpha) = B$ состоят из двух ветвей гиперболы

$$\frac{\xi^2}{x^2/a_n^2(x^2 + y^2)} - \frac{\eta^2}{y^2/a_n^2(x^2 + y^2)} = 1$$

где $a_n = a$ или $a_n = b$ соответственно, а также из отрезков действительной оси $|\xi| < \frac{1}{a_n}$.

Пусть $x > 0, y > 0$. Тогда, предполагая, что на положительной мнимой полуоси $\beta_n = \sqrt{\frac{1}{a_n^2} - a^2}$ положительны, можно показать, что $\text{Im } T(\alpha) < 0$ в областях (фиг. 1), где проходят дуги окружностей C_1 и C_2 . Интегрирование по α от $-\infty$ до $\frac{x}{a_n \sqrt{x^2 + y^2}}$ заменяется интегрированием по верхней половине контура Γ , а интегрирование по α от $\frac{x}{a_n \sqrt{x^2 + y^2}}$ до ∞ — интегрированием по нижней половине Γ .



Фиг. 1

Это возможно сделать, так как на C_1 и C_2 $e^{-i\omega\alpha}$ стремится к нулю в силу условия $\text{Im } T(\alpha) < 0$ при неограниченном увеличении радиуса окружностей $C_{1,2}$. Тогда при $\omega > 0$ можно заменить интегрирование по действительной оси α интегрированием по Γ (фиг. 1). Аналогичные рассуждения применимы к контуру Γ_1 . При $\omega < 0$ вместо $C_{1,2}$ берутся их дополнения до верхней и соответственно нижней полуокружностей, на которых $\text{Im } T(\alpha) > 0$. Тогда интегрирование по действительной оси α заменится интегрированием по Γ в обратном предыдущему направлении. Весь интеграл в (1.4) поменяет знак на обратный, а решение будет таким же, как при $\omega > 0$. При $x < 0$ точки α_1, α_2 лежат на левых ветвях гиперболы (фиг. 1), контуры C_1, C_2 заменяются на симметричные им относительно оси ξ контуры, и решение не изменяется.

Итак, при любом ω

$$4\pi^2 \bar{\mu} = 2\pi i \int_{\Gamma} e^{i\omega(\alpha x - \beta y)} \frac{1}{-2\beta_1 a^2} \frac{X_0(-1 + a^2 \beta_1^2 + b^2 a^2) - Y_0 a \beta_1 (a^2 - b^2)}{1 - (a^2 + \beta_1^2) b^2} d\alpha +$$

$$+ 2\pi i \int_{\Gamma_1} e^{i\omega(\alpha x + \beta_1 y)} \frac{1}{-2\beta_2 b^2} \frac{X_0(-1 + a^2 \beta_2^2 + b^2 a^2) - Y_0 a \beta_2 (a^2 - b^2)}{1 - (a^2 + \beta_2^2) a^2} d\alpha$$

Переходя к оригиналам в (1.4), получим

$$u = -\frac{i}{4\pi^2\rho} \int \frac{\delta(t - \alpha x - \beta_1 y)}{\beta_1 a^2} \frac{X_0(-1 + a^2\beta_1^2 + b^2\alpha^2) - Y_0\alpha\beta_1(a^2 - b^2)}{1 - (x^2 + \beta_1^2)b^2} dx -$$

$$-\frac{i}{4\pi^2\rho} \int \frac{\delta(t - \alpha x - \beta_2 y)}{\beta_2 b^2} \frac{X_0(-1 + a^2\beta_2^2 + b^2\alpha^2) - Y_0\alpha\beta_2(a^2 - b^2)}{1 - (x^2 + \beta_2^2)a^2} dx \quad (1.6)$$

где

$$\beta_1 = \sqrt{\frac{1}{a^2} - \alpha^2}, \quad \beta_2 = \sqrt{\frac{1}{b^2} - \alpha^2}$$

При вычислении интегралов по Γ , Γ_1 существенны лишь точки z , в которых аргументы δ -функции обращаются в нуль. Таких значений для Γ и Γ_1 будет по два: значение $z = z_1$ и сопряженное ему \bar{z}_1 для контура Γ и соответственные значения $z = z_2$ и \bar{z}_2 для контура Γ_1 , определяемые из уравнений (1.5) или

$$r^2 z_1 = tx + iy \sqrt{t^2 - r^2/a^2}, \quad r^2 z_2 = tx + iy \sqrt{t^2 - r^2/b^2}, \quad r^2 = x^2 + y^2 \quad (1.7)$$

Контур Γ проходит через точки z_1 , \bar{z}_1 в прямом и обратном направлениях соответственно фиг. 1. Вычисляя интегралы (1.6) от δ -функции вещественного аргумента, можно убедиться, что решение запишется в виде

$$2\pi\mu = \operatorname{Re} \frac{i(-X_0 z_1^2 - Y_0 z_1 \beta_1)}{\beta_1 x - z_1 y} + \operatorname{Re} \frac{i(-X_0 \beta_2^2 + Y_0 z_2 \beta_2)}{\beta_2 x - z_2 y} \quad (1.8)$$

$$2\pi\nu = \operatorname{Re} \frac{i(-Y_0 \beta_1^2 - X_0 z_1 \beta_1)}{\beta_1 x - z_1 y} + \operatorname{Re} \frac{i(-z_2^2 Y_0 + \alpha \beta_2 X_0)}{\beta_2 x - z_2 y}$$

Здесь объединены попарно интегралы по окрестностям z_1 , \bar{z}_1 и z_2 , \bar{z}_2 соответственно, причем выражение для ν получено аналогичным путем. Из (1.7), (1.8) получится

$$u = \frac{1}{2\pi\rho} \operatorname{Re} \frac{X_0 z_1^2 + Y_0 z_1 \beta_1}{\sqrt{t^2 - r^2/a^2}} + \frac{1}{2\pi\rho} \operatorname{Re} \frac{X_0 \beta_2^2 - Y_0 z_2 \beta_2}{\sqrt{t^2 - r^2/b^2}} \quad (1.9)$$

$$v = \frac{1}{2\pi\rho} \operatorname{Re} \frac{Y_0 \beta_1^2 + X_0 z_1 \beta_1}{\sqrt{t^2 - r^2/a^2}} + \frac{1}{2\pi\rho} \operatorname{Re} \frac{Y_0 z_2^2 - X_0 z_2 \beta_2}{\sqrt{t^2 - r^2/b^2}}$$

Решение (1.8) совпадает с фундаментальным решением уравнений теории упругости, данным в [1].

При проведении выкладок с интегралами по z должны были быть проведены разрезы в плоскости z от $\pm \frac{1}{a}$ до $\pm \infty$ для первых интегралов и от $\pm \frac{1}{b}$ до $\pm \infty$ для вторых интегралов (1.4).

В окончательном же решении (1.8) следует разрезать плоскости z_1, z_2 по отрезкам $-\frac{1}{a} < z_1 < \frac{1}{a}, -\frac{1}{b} < z_2 < \frac{1}{b}$ соответственно, причем верхние берега отрезков соответствуют верхним ($y > 0$) частям фронтов воли, нижние берега — нижним полуокружностям воли.

Приведенный здесь метод гораздо проще метода [1]. Отделяя действительную часть в (1.9), можно получить решение в виде [2].

2. Получим фундаментальные решения для задачи магнитоупругости.

Уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - b^2 \nabla^2 u + (a^2 - b^2) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \\ + \frac{H_x^2}{4\pi\rho} \nabla^2 u - \frac{H_x H_y}{4\pi\rho} \nabla^2 v + \frac{X_0}{\rho} \delta(x) \delta(y) \delta(t) \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = b^2 \nabla^2 v + (a^2 - b^2) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \\ - \frac{H_x H_y}{4\pi\rho} \nabla^2 u + \frac{H_y^2}{4\pi\rho} \nabla^2 v + \frac{Y_0}{\rho} \delta(x) \delta(y) \delta(t) \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, (H_x, H_y) есть однородное начальное магнитное поле. Начальные условия нулевые.

Решение для преобразования Лапласа по t от компонентов смещений (\bar{u}, \bar{v}) ищется в виде преобразования Фурье (1.2).

Без ограничения общности можно считать $H_x = 0$, и тогда после разрешения (2.1) относительно \bar{u}, \bar{v} получится

$$\begin{aligned} 4\pi^2 \bar{D} \bar{u} = X_0 \{s^2 + a^2 \bar{\xi}^2 + b^2 \bar{x}^2 + a_1^2 (\bar{z}^2 + \bar{\xi}^2)\} - Y_0 (a^2 - b^2) \bar{x} \bar{\xi} \\ 4\pi^2 \bar{D} \bar{v} = Y_0 (s^2 + a^2 \bar{x}^2 + b^2 \bar{\xi}^2) - X_0 (a^2 - b^2) \bar{x} \bar{\xi}, \quad a_1^2 = \frac{H_x^2}{4\pi\rho} \end{aligned} \quad (2.2)$$

где

$$\bar{D} = (s^2 + a^2 \bar{x}^2) (s^2 + b^2 \bar{\xi}^2 + a_1^2 \bar{z}^2) + \bar{\xi}^2 A(\bar{z}) \omega^2 + \bar{\xi}^2 (a^2 + a_1^2) b^2 \quad (2.3)$$

Здесь $s = -i\omega$, причем можно, как и прежде, обозначить $\bar{x} = \frac{\xi}{\omega}$,

$\bar{\xi} = \frac{\xi}{\omega}$ и значение $A(\bar{z})$ примет вид

$$A(\bar{z}) = (a^2 + b^2) a_1^2 \bar{z}^2 + 2a^2 b^2 \bar{z}^2 - a^2 - b^2 - a_1^2 \quad (2.4)$$

Уравнение поверхности (кривой) нормалей $\bar{\xi} = \bar{\xi}_1(\bar{z})$ к магнитоупругим волнам получится из дисперсионного соотношения $\bar{D} = 0$, причем из (2.3) можно получить

$$2(a^2 + a_1^2) b^2 \beta_{1,2}^2 y = -A(x) \mp \sqrt{A^2(x) - 4(a^2 + a_1^2) b^2 (-1 + a^2 x^2) (-1 + b^2 x^2 + a_1^2 x^2)} \quad (2.5)$$

где верхний знак соответствует быстрым, а нижний — медленным волнам. Как и в § 1, можно вычислить вычет в интегралах по β относительно полюсов $\beta_{1,2}$ соответственно и тогда получится, например, для \bar{u} значение

$$\bar{u} = \sum_{n=1}^2 \frac{i \operatorname{sgn} \omega}{2\pi y} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(x_1 - \beta_n y)} \times \frac{X_0[-1 + a^2 \beta_n^2 + b^2 x^2 + a_1^2(x^2 + \beta_n^2)] - Y_0(a^2 - b^2) x \beta_n}{G(x, \beta_n)} \quad (2.6)$$

где $D = \frac{\bar{D}}{\omega^4}$ находится из (2.3) после перехода к переменным x, β ,

$$G = \frac{\partial D}{\partial \beta} \Big|_{\beta = \beta_n}$$

Далее, как и в § 1, интегрирование по x в (2.6) заменяется интегрированием по контурам Γ, Γ_1 (в первом и во втором интеграле), проходящим в направлениях $\operatorname{Im} T_n(x) = 0$ через точки $x = x_1, \bar{x}_1$ и $x = x_2, \bar{x}_2$ соответственно, которые определяются из уравнений

$$T(x_n) = t - x_n x - \beta_n(x_n) y, \quad T(x_n) = 0, \quad n = 1, 2 \quad (2.7)$$

причем $\beta_{1,2}(x)$ находятся из (2.5). Соображения по замене интегрирования по действительной оси x интегрированием по контурам Γ, Γ_1 остаются прежними, только кривые Γ, Γ_1 уже не будут гиперболами и кроме того надо выяснить, не имеется ли вклада в решение от возможных полюсов или точек ветвления подинтегральных функций. Можно показать, что в (2.6) полюсы отсутствуют, а точками ветвления будут корни $x^{(1)} = \pm \frac{1}{a}, x^{(2)} = \pm \frac{1}{\sqrt{b^2 + a_1^2}}$ внешнего радикала для $\beta_{1,2}(x)$, а также корни $x = x_1$ внутреннего радикала в (2.5), определяемые в виде

$$x_1^2 = \frac{a^2 + b^2 + a_1^2 \pm \sqrt{(a^2 + b^2 + a_1^2)^2 - (a^2 - b^2 + a_1^2)^2}}{a_1^2 (a^2 - b^2)}$$

Отсюда видно, что все точки ветвления находятся на действительной оси x , причем можно провести разрез плоскости x по ее действительной оси от $\pm x_0$ до $\pm \infty$, где $x_0 = \min(a_1, x^{(1)}, x^{(2)})$ и выбрать соответствующие ветви функций $\beta_{1,2}(x)$. При этом, как и в § 1, как видно из (2.5), на бесконечности получится $\operatorname{Im} \omega \beta_{1,2}(x) > 0$ на верхнем берегу

левого разреза и нижнем берегу правого разреза, поскольку $\beta_{1,2}(z) \approx \pm iaK_{1,2}$ при больших $|z|$. Контур интегрирования по z , как и в § 1, выбирается так, что он обходит особые точки на отрицательной действительной полуоси в верхней полуплоскости, а на положительной полуоси — в нижней полуплоскости. Как и в § 1, можно показать, что согласно (2.5) $\beta_{1,2} \approx \pm iaK_{1,2}$ для больших z , причем при $\omega > 0$, $y > 0$ верхний знак выбирается на верхнем берегу левого разреза и нижнем берегу правого разреза, причем на контурах C_1 и C_2 (фиг. 1) получится $\text{Im } T(\alpha_{1,2}) < 0$. Контур интегрирования по α , как и в § 1, выбирается так, что он обходит особые точки на отрицательной действительной полуоси в верхней полуплоскости, а на положительной полуоси — в нижней полуплоскости. При $\omega < 0$ или $y < 0$, как и в § 1, можно показать, что получится снова решение (2.8). Согласно условию $\text{Im } T(\alpha_{1,2}) < 0$ на контурах C_1 , C_2 , можно заменить интегралы в (2.6) по действительной оси α интегралами по контурам Γ , Γ_1 . Тогда после обратного преобразования по Лапласу получится

$$\begin{aligned}
 u = & \frac{i}{4\pi y} \int_{\Gamma} \delta(t - \alpha x - \beta_1 y) \times \\
 & \times \frac{X_0(-1 + a^2 \beta_1^2 + b^2 x^2 + a_1^2 x^2 + a_1^2 \beta_1^2) - Y_0(a^2 - b^2) \alpha \beta_1}{G(\alpha, \beta_1)} d\alpha + \\
 & + \frac{i}{4\pi y} \int_{\Gamma_1} \delta(t - \alpha x - \beta_2 y) \times \\
 & \times \frac{X_0(-1 + a^2 \beta_2^2 + b^2 x^2 + a_1^2 x^2 + a_1^2 \beta_2^2) - Y_0(a^2 - b^2) \alpha \beta_2}{G(\alpha, \beta_2)} d\alpha \quad (2.8)
 \end{aligned}$$

После вычисления интегралов по Γ , Γ_1 , на которых аргументы дельта-функции вещественны, получится окончательное решение в виде

$$\begin{aligned}
 u = & -\text{Re} \frac{i}{2\pi y} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_0(-1 + a^2 \beta_n^2 + b^2 x_n^2 + a_1^2(x_n^2 + \beta_n^2)) - Y_0(a^2 - b^2) \alpha_n \beta_n}{G(\alpha_n, \beta_n)} \\
 v = & -\text{Re} \frac{i}{2\pi y} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_0(-1 + a^2 \beta_n^2 + b^2 x_n^2) - X_0(a^2 - b^2) \alpha_n \beta_n}{G(\alpha_n, \beta_n)}
 \end{aligned}$$

причем $\beta_{1,2}(\alpha_{1,2})$ дается (2.5) и $\alpha_{1,2}$ находятся из соотношений (2.7). Слагаемые в u , v , соответствующие α_1 и α_2 , равны нулю вне соответствующих фронтов волн. Следует отметить, что некоторым частям физической плоскости может соответствовать по паре значений α_2 и ни одного значения α_1 [3], или наоборот, поэтому в решении (2.9) подразумевается сумма слагаемых по всем тем корням уравнений (2.7), которые существуют в рассматриваемой области. Указанным методом также получается решение задачи Ламба в магнитоупругости. Таким образом, получено точное решение (2.9) уравнений (2.1).

3. Определяются решения уравнений термоупругости при наличии точечных импульсов. Линейные уравнения термоупругости можно привести к виду [4]

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= b^2 \nabla^2 u + (a^2 - b^2) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\gamma}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{X_0}{\rho} \delta(x) \delta(y) \delta(t) \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= b^2 \nabla^2 v + (a^2 - b^2) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\gamma}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{Y_0}{\rho} \delta(x) \delta(y) \delta(t) \quad (3.1) \\ \nabla^2 \theta &= \left(\frac{1}{x} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \eta \frac{\partial \operatorname{div} \bar{u}}{\partial t} \right) + \tau_0 \left(\frac{1}{x} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \eta \frac{\partial^2 \operatorname{div} \bar{u}}{\partial t^2} \right)\end{aligned}$$

где $\theta = T - T_0$, T — температура, γ , x , η , τ_0 — постоянные.

Решение для преобразования Лапласа по t от u , v ищется в виде (1.2).

Из (3.1) после обратного преобразования по $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ получится

$$\begin{aligned}D \bar{u} &= \frac{X_0}{4\pi^2 \rho} \left(s^2 + b^2 \bar{\alpha}^2 + a^2 \bar{\beta}^2 - \frac{1}{\rho} \frac{\gamma \gamma_0 \bar{\beta}^2 s}{\rho} \right) - \\ &- \frac{Y_0}{4\pi^2 \rho} \left\{ \frac{\bar{\alpha} \bar{\beta} (a^2 - b^2)}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\gamma \gamma_0 \bar{\beta} s}{\rho} \right\} \\ D \bar{v} &= \frac{Y_0}{4\pi^2 \rho} \left(s^2 + b^2 \bar{\beta}^2 + a^2 \bar{\alpha}^2 + \frac{1}{\rho} \frac{\gamma \gamma_0 \bar{\alpha} s}{\rho} \right) - \\ &- \frac{X_0}{4\pi^2 \rho} \left\{ \frac{\bar{\alpha} \bar{\beta} (a^2 - b^2)}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\gamma \gamma_0 \bar{\alpha} s}{\rho} \right\}\end{aligned} \quad (3.2)$$

где

$$\rho = \frac{\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2}{1 + \tau_0 s} + \frac{s}{x}, \quad s = -i\omega$$

$$D = \{ s^2 (\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2) b^2 \} \left\{ s^2 + a^2 (\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2) + \frac{\gamma}{\rho} \tau_0 s (\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2) \frac{1}{\rho} \right\} \quad (3.3)$$

Простые формулы получаются лишь для однородной по ω задачи, то есть для больших или малых значений $\omega \tau_0$. При $\tau_0 \omega \gg 1$ получится

$$\frac{D}{-\omega^2 + (\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2) b^2} = -\omega^2 + (\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2) a^2 + \frac{\tau_0 \gamma}{\rho} \tau_0 \frac{\omega^2 (\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2)}{\tau_0 \omega^2 - (\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2)} \quad (3.4)$$

В переменных $\alpha = \frac{\bar{\alpha}}{\omega}$, $\beta = \frac{\bar{\beta}}{\omega}$ дисперсионное уравнение $D = 0$ имеет решения $\beta_{1,2,3}$.

$$2a^2(\alpha^2 + \beta_{1,2}^2) = \frac{\tau_0}{x} a^2 + 1 + \frac{\tau_0 \gamma \eta}{\rho} + \sqrt{\left(\frac{\tau_0}{x} a^2 + 1 + \frac{\tau_0 \gamma \eta}{\rho}\right)^2 - 4a^2 \frac{\tau_0}{x}}$$

$$\alpha^2 + \beta_3^2 = \frac{1}{b^2} \tag{3.5}$$

Вычисляя, как и в § 1, вычет и интегралах (1.2) относительно полюсов $\beta_{1,2,3}$, переходя к контуру Γ (фиг. 1), после обратного преобразования Лапласа по t можно получить, как и выше, значения перемещений

$$u = -\operatorname{Re} \frac{i}{2\pi\rho} \sum_{n=1}^3 \frac{X_0(-1 + b^2\alpha_n^2 + a^2\beta_n^2 + \beta_n^2\Lambda_n) - Y_0\alpha_n\beta_n(a^2 - b^2 + \Lambda_n)}{(\beta_n x - \alpha_n y) \left(a^2 + \frac{\rho}{\gamma\eta x} \Lambda_n^2\right) \left|-1 + (\alpha_n^2 + \beta_n^2) b^2\right|}$$

$$- \operatorname{Re} \frac{i}{2\pi\rho} \frac{X_0(-1 + b^2\alpha_3^2 + a^2\beta_3^2 + \beta_3^2\Lambda_3) - Y_0\alpha_3\beta_3(a^2 - b^2 + \Lambda_3)}{(\beta_3 x - \alpha_3 y) b^2 \left(-1 + \frac{a^2}{b^2} + \frac{1}{b^2} \Lambda_3\right)}$$

$$v = -\operatorname{Re} \frac{i}{2\pi\rho} \sum_{n=1}^2 \frac{Y_0(-1 + b^2\beta_n^2 + a^2\alpha_n^2 + \alpha_n^2\Lambda_n) - X_0\alpha_n\beta_n(a^2 - b^2 + \Lambda_n)}{(\beta_n x - \alpha_n y) \left(a^2 + \frac{\rho}{\gamma\eta x} \Lambda_n^2\right) \left|-1 + (\alpha_n^2 + \beta_n^2) b^2\right|}$$

$$- \operatorname{Re} \frac{i}{2\pi\rho} \frac{Y_0(-1 + b^2\beta_3^2 + a^2\alpha_3^2 + \alpha_3^2\Lambda_3) - X_0\alpha_3\beta_3(a^2 - b^2 + \Lambda_3)}{(\beta_3 x - \alpha_3 y) (-b^2 + a^2 + \Lambda_3)}$$

$$\tag{3.6}$$

где $\Lambda_n = \gamma\eta \frac{\tau_0}{\rho} \left\{ \frac{\tau_0}{x} - (\alpha_n^2 + \beta_n^2) \right\}^{-1}$. Решение (3.6) можно было бы упростить и далее, используя (3.5).

Для $\omega\tau_0 \ll 1$ из (3.4) получится

$$\frac{D}{-\omega^2 + (\alpha^2 + \beta^2) b^2} = -\omega^2 + a^2(\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2) + \frac{\gamma\eta x}{\rho} (\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2) \tag{3.7}$$

В (3.2) можно произвести упрощение, причем

$$\frac{\gamma}{\rho} \eta s \left(\frac{\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2}{1 + \tau_0 s} + \frac{s}{x} \right)^{-1} \approx \frac{\gamma}{\rho} \eta x \tag{3.8}$$

Тогда из (3.2), (3.3) следует, что решение для термоупругой среды в диапазоне низких частот приводится к решению для упругой среды § 1.

в котором следует заменить a^2 на $a^2 + \frac{\gamma\eta x}{\rho}$.

Таким образом, найдены фундаментальные решения для однородной термоупругой среды в форме В. И. Смирнова—С. Л. Соболева для $\omega\tau_0 \gg 1$ и $\omega\tau_0 \ll 1$, то есть вблизи быстрой и медленной тепловых волн и вблизи быстрой и медленной термоупругих волн.

4. Рассмотрим задачу определения решения уравнений анизотропной упругой среды в плоской задаче

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + d \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{X_0}{\rho} \delta(x) \delta(y) \delta(t) \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + d \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + a \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{Y_0}{\rho} \delta(x) \delta(y) \delta(t)$$

где u, v удовлетворяют нулевым начальным условиям. Решение находится тем же путем, что и в предыдущих параграфах работы.

Дисперсионное уравнение для (4.1) имеет решение

$$\beta_{\pm, \tau}(z) = \sqrt{\frac{(a+d) - Lz^2}{2da}} = \sqrt{\Delta} \quad (4.2)$$

где

$$L = a^2 + d^2 - c^2, \quad \Delta = \left| \frac{(a+d) - Lz^2}{2da} \right|^2 - \left(\frac{1}{a} - z^2 \right) \left(\frac{1}{d} - az^2 \right)$$

Здесь на коэффициенты a, d, c накладывается условие $c < a - d$, в силу которого точки разветвления $z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2$ для $\beta(z)$, определяемые из уравнения $\Delta = 0$, — комплексные попарно сопряженные величины. Соединяя z_1, z_2 и \bar{z}_1, \bar{z}_2 попарно разрезами, можно выбрать ветви функций (4.2) на берегах разрезов определенным образом, причем при переходе с одного берега разреза на другой β_1 меняется на β_2 , и наоборот. Учитывая это обстоятельство, можно показать, что интегралы, дающие значения \bar{u}, \bar{v} , взятые по обоим берегам разрезов, сокращаются и, как и прежде, можно заменять интегрирование по z от $-\infty$ до ∞ интегрированием по контурам Γ, Γ_1 (фиг. 1).

Окончательное решение примет вид

$$u = \frac{1}{2\pi i} \operatorname{Re} i \sum_1^2 (-1)^{k-1} \frac{X_0 (a\beta_k^2 + dz_k^2 - 1) - Y_0 c \alpha_k \beta_k}{\beta_k \sqrt{\Delta(z_k)} (x + \beta_k y) 2da} \quad (4.3)$$

$$v = \frac{1}{2\pi i} \operatorname{Re} i \sum_1^2 (-1)^{k-1} \frac{Y_0 (d\beta_k^2 + az_k^2 - 1) - X_0 c \alpha_k \beta_k}{\beta_k \sqrt{\Delta(z_k)} (x + \beta_k y) 2d\tau}$$

где $\beta_k = \beta(z_k)$, причем z_k определяются соотношениями (2.7), (4.2). Другим, менее прямым путем, фундаментальные решения для анизотропной упругой плоскости получены в [5], причем сравнение с (4.3) показало лишь на совпадение членов с наибольшими степенями переменных β_k, β_k . Указанные методы можно, очевидно, применить к пространственной задаче, а также к более общим задачам о приложенных импульсах.

Автор благодарит участников семинара по магнитоупругости Института механики АН Арм. ССР за ценные обсуждения работы.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 30 III 1973

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈՎ

ՉԵՐՄԱՄԱՐԿԵՍԱԱՌԱԶԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ
ՅՈՒՆԳԱՄԵՆՏԱԼ ԼՈՒՆՈՒՄՆԵՐԻ ՈՐՈՇՈՒՄԸ

Ա մ փ ո թ ս լ մ

Աշխատանքում դիտարկվում է կենտրոնացված ազդեցութիւնների առկայութեան դեպքում շերմամաղնիսառաձգական համասեռ միջավայրի հալաւարումների լուծման էֆեկտիվ կառուցման բավական ընդհանուր եղանակ: Լուծումը որոշվում է Ֆուրյէի մեթոդով և այնուհետև բերվում է Սմիրնով-Սորոլէի անալիտիկ ֆունկցիաներով արտահայտված տեսքի:

DETERMINATION OF FUNDAMENTAL SOLUTIONS
FOR EQUATIONS OF MAGNETOTHERMOELASTICITY

A. G. BAGDOEV

S u m m a r y

A rather general method to determine solutions for equations of a homogeneous medium motion in the presence of point impulses is considered. The solutions are found by the method of integral transforms and then reduced to the Smirnov-Sobolev solution.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Франк Ф. и Милес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. ОНТИ. Л—М., 1937, 468—617.
2. Бабич В. М. и др. Линейные уравнения математической физики. «Наука», М., 1964.
3. Осипов Н. О. О волновых полях и остроугольных краях на волновых фронтах. ПММ, т. 36, № 5, 1972.
4. Нугул У. К. и Энгельбрехт Ю. К. Нелинейные и линейные переходные волновые процессы. Изд. АН Эстонской ССР, Таллин, 1972.
5. Свекло В. А. Смешанная задача для упругой анизотропной полуплоскости. ПММ, т. 26, № 6, 1962.