

М. В. БЕЛУБЕКЯН

К УРАВНЕНИЯМ МАГНИТОУПРУГОСТИ ТОКОНЕСУЩИХ ПЛАСТИН

На основе гипотез магнитоупругости, предложенных в работах [1, 2], выводятся уравнения магнитоупругих колебаний тонких токонесящих пластин, помещенных в магнитное поле. Полученные уравнения рассматриваются для частного случая — задачи колебаний бесконечной пластинки, несущей равномерно распределенный электрический ток.

1. Пластинка постоянной толщины $2h$ служит проводником стационарного электрического тока в направлении, параллельном срединной плоскости. Кроме магнитного поля, обусловленного заданным электрическим током в пластинке, предполагается также наличие внешнего магнитного поля, которое до тех пор, пока пластинка находится в покое, не создает электрического тока.

Магнитная и диэлектрическая проницаемости среды, окружающей пластинку, равны единице. Упругие и электромагнитные свойства материала пластинки характеризуются модулем упругости E , коэффициентом Пуассона ν , плотностью ρ , электропроводностью σ , магнитной проницаемостью μ , диэлектрической проницаемостью ϵ .

Прямоугольная система координат (x, y, z) выбрана так, что координатная плоскость (x, y) совпадает со срединной плоскостью пластинки.

Вектор напряженности электрического поля $\mathbf{E}_0 = (E_{0x}, E_{0y}, 0)$ обусловленный током в пластинке, должен удовлетворять уравнениям

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}_0 = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{E}_0 = 0 \quad (1.1)$$

Отсюда следует, что \mathbf{E}_0 внутри пластинки не зависит от координаты z , а вне пластинки равняется нулю.

Предполагается, что задача магнитостатики для невозбужденного состояния пластинки решена. Задача магнитостатики требует решения уравнения

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}_0 = \frac{4\pi c}{c} \mathbf{E}_0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B}_0 = 0 \quad (1.2)$$

при условиях на поверхностях, ограничивающих пластинку

$$|\mathbf{B}_n^{(e)} - \mathbf{B}_n^{(i)}| \cdot \mathbf{n} = 0, \quad [\mathbf{H}_n^{(e)} - \mathbf{H}_n^{(i)}] \times \mathbf{n} = 0 \quad (1.3)$$

Здесь i в дальнейшем индексе (i) показывает принадлежность к внутренней области, ограниченной поверхностями пластинки, индексе (e) — к внешней области, \mathbf{n} — нормаль к соответствующей поверхности пластинки.

ки, $\mathbf{B}_0 = \{B_{0x}, B_{0y}, B_{0z}\}$ — вектор магнитной индукции, $\mathbf{H}_0^{(i)} = \mathbf{B}_0^{(i)}$, $\mu \mathbf{H}_0^{(i)} = \mathbf{B}_0^{(i)}$.

Уравнения электродинамики для движущейся среды принимаются в виде [3]:

во внутренней области ($|z| \leq h$)

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H}^{(i)} &= \frac{4\pi z}{c} \left[\mathbf{E}^{(i)} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \times \mathbf{B}^{(i)} \right] + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}^{(i)}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \mathbf{E}^{(i)} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}^{(i)}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B}^{(i)} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{D}^{(i)} = 4\pi \rho_e \end{aligned} \quad (1.4)$$

во внешней области ($|z| \geq h$)

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}^{(e)} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}^{(e)}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E}^{(e)} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}^{(e)}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B}^{(e)} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{D}^{(e)} = 0 \quad (1.5)$$

где \mathbf{E} и \mathbf{D} — соответственно векторы напряженности и индукции электрического поля, $\mathbf{u} = \{u_x, u_y, u_z\}$ — вектор перемещения частиц пластинки, c — скорость света в вакууме, ρ_e — плотность электрических зарядов в пластинке.

Связи между векторами \mathbf{B} и \mathbf{H} , \mathbf{E} и \mathbf{D} в системе координат, связанной с движущейся поверхностью раздела двух сред, принимаются в виде

$$\mathbf{B}_*^{(i)} = \mu \mathbf{H}_*^{(i)}, \quad \mathbf{B}_*^{(e)} = \mathbf{H}_*^{(e)}, \quad \mathbf{D}_*^{(i)} = \varepsilon \mathbf{E}_*^{(i)}, \quad \mathbf{D}_*^{(e)} = \mathbf{E}_*^{(e)} \quad (1.6)$$

Векторы, характеризующие рассматриваемое электромагнитное поле в подвижной системе координат, отмеченные индексом (*), выражаются через соответствующие векторы неподвижной системы координат (x, y, z) по формулам [1]

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_* &= \mathbf{B} - \frac{1}{c} \mathbf{v}_n \times \mathbf{E}, & \mathbf{H}_* &= \mathbf{H} - \frac{1}{c} \mathbf{v}_n \times \mathbf{D} \\ \mathbf{E}_* &= \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v}_n \times \mathbf{B}, & \mathbf{D}_* &= \mathbf{D} + \frac{1}{c} \mathbf{v}_n \times \mathbf{H} \end{aligned} \quad (1.7)$$

где \mathbf{v}_n — вектор скорости перемещения поверхности раздела в направлении нормали, \mathbf{n} — вектор нормали к поверхности раздела в неподвижной системе координат.

Рассматриваемая здесь задача колебаний токнесущей пластинки будет полностью поставлена, если к уравнениям (1.3) и (1.4) присоединить уравнения движения пластинки с учетом сил и моментов электромагнитного происхождения и соответствующих граничных условий на поверхности раздела двух сред (пластинки и вакуума). Силы и моменты электромагнитного происхождения определяются из формул

$$\mathbf{R} = \int_{-h}^h \left[\frac{\sigma}{c} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \times \mathbf{B} \right) \times \mathbf{B} + \nu_e \mathbf{E} \right] dz \quad (1.8)$$

$$\mathbf{m} = \int_{-h}^h \left[\frac{\sigma}{c} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{u}}{dt} \times \mathbf{B} \right) \times \mathbf{B} + \nu_e \mathbf{E} \right] z dz$$

В настоящей работе рассматриваются задачи магнитоупругих колебаний при малых возмущениях. Принимая для компонент возмущенного электромагнитного поля

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{h}, \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{e} \quad (1.9)$$

и учитывая, что компоненты векторов \mathbf{h} и \mathbf{e} индуцированного электромагнитного поля и компоненты вектора \mathbf{u} малы, уравнения (1.4) и (1.5) линеаризуются. Используя при этом связи (1.6) и линеаризованные соотношения (1.7), получим уравнения электродинамики в следующем виде:

для внутренней области (здесь и в дальнейшем индекс (i) опускается)

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_x}{\partial y} - \frac{\partial h_y}{\partial z} = \frac{4\pi\sigma}{c} \left[e_x + \frac{1}{c} \left(B_{0y} \frac{\partial u_x}{\partial t} - B_{0x} \frac{\partial u_y}{\partial t} \right) \right] + \\ + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial e_x}{\partial t} - \frac{\varepsilon\mu - 1}{c^2} H_{0y} \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_x}{\partial z} - \frac{\partial h_z}{\partial x} = \frac{4\pi\sigma}{c} \left[e_y + \frac{1}{c} \left(B_{0x} \frac{\partial u_x}{\partial t} - B_{0y} \frac{\partial u_x}{\partial t} \right) \right] + \\ + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial e_y}{\partial t} + \frac{\varepsilon\mu - 1}{c^2} H_{0x} \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y} = \frac{4\pi\sigma}{c} \left[e_z + \frac{1}{c} \left(B_{0y} \frac{\partial u_y}{\partial t} - B_{0x} \frac{\partial u_y}{\partial t} \right) \right] + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial e_z}{\partial t} \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial e_z}{\partial y} - \frac{\partial e_y}{\partial z} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial h_x}{\partial t} - \frac{\varepsilon\mu - 1}{c^2} E_{0y} \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial e_x}{\partial z} - \frac{\partial e_z}{\partial x} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial h_y}{\partial t} + \frac{\varepsilon\mu - 1}{c^2} E_{0x} \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \quad (1.14)$$

$$\frac{\partial e_y}{\partial x} - \frac{\partial e_x}{\partial y} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial h_z}{\partial t} \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial h_x}{\partial x} + \frac{\partial h_y}{\partial y} + \frac{\partial h_z}{\partial z} + \frac{\varepsilon\mu - 1}{\mu c} \left(E_{0y} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial t} - E_{0x} \frac{\partial^2 u_x}{\partial y \partial t} \right) = 0 \quad (1.16)$$

$$\frac{\partial e_x}{\partial x} + \frac{\partial e_y}{\partial y} + \frac{\partial e_z}{\partial z} + \frac{\epsilon_{\mu} - 1}{\mu c} \left(H_{0x} \frac{\partial^2 u_z}{\partial y \partial t} - H_{0y} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial t} \right) = \frac{4\pi}{c} \rho_e \quad (1.17)$$

для внешней области

$$\operatorname{rot} \mathbf{h}^{(e)} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{e}^{(e)}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{e}^{(e)} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{h}^{(e)}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \mathbf{h}^{(e)} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{e}^{(e)} = 0 \quad (1.18)$$

Члены с коэффициентами ϵ и $\epsilon_{\mu} - 1$ в уравнениях (1.10)–(1.12) обусловлены токами смещения. Для проводников, обладающих хорошей проводимостью, токами смещения можно пренебречь по сравнению с токами проводимости, что в дальнейшем и делается.

2. Гипотезы магнитоупругости, предложенные в работах [1, 2], аналитически записываются следующим образом:

$$u_x = -z \frac{\partial w}{\partial x}, \quad u_y = -z \frac{\partial w}{\partial y}, \quad u_z = w(x, y, t) \quad (2.1)$$

$$e_x = \varphi(x, y, t), \quad e_y = \psi(x, y, t), \quad h_z = f(x, y, t)$$

Интегрируя уравнения (1.10) и (1.11) по z и используя соотношения (2.1), компоненты индуцированного магнитного поля h_x и h_y определим посредством их граничных значений при $z = \pm h$ и функций φ , ψ , f , w

$$h_x = \frac{h_x^+ + h_x^-}{2} + z \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{4\pi\sigma}{c} \varphi \right) + \frac{4\pi\sigma}{c^2} \left(a_x \frac{\partial w}{\partial t} + a \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right) \quad (2.2)$$

$$h_y = \frac{h_y^+ + h_y^-}{2} + z \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{4\pi\sigma}{c} \varphi \right) + \frac{4\pi\sigma}{c^2} \left(a_y \frac{\partial w}{\partial t} + a \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} \right)$$

Здесь h_x^+ , h_x^- и h_y^+ , h_y^- — значения компонент h_x и h_y при $z = \pm h$ соответственно,

$$a = \int_{-h}^z B_{0z} z dz - \frac{1}{2} \int_{-h}^h B_{0z} z dz, \quad a_i = \int_{-h}^z B_{0i} dz - \frac{1}{2} \int_{-h}^h B_{0i} dz \quad (i = x, y, z)$$

В выражениях (2.2), как было оговорено выше, токи смещения не учтены. Однако, из уравнений (1.10) и (1.11) легко заметить, что при определении h_x и h_y учет токов смещения не представляет трудности.

Аналогичным образом из уравнения (1.12) определяется компонента электрического поля e_z . При этом пренебрежение токами смещения существенно облегчает нахождение e_z :

$$e_z = \frac{c}{4\pi\sigma} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h_y^+ + h_y^-}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{h_x^+ + h_x^-}{2} \right) \right] - z \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) +$$

$$+ \frac{1}{c} \left[\left(a_y - \frac{\partial a}{\partial y} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} - \left(a_x - \frac{\partial a}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} \right] + \frac{z}{c} \left(B_{0y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} - B_{0x} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} \right) \quad (2.3)$$

При необходимости учета токов смещения приведенный в настоящей работе способ получения уравнений магнитоупругости можно применить в следующих случаях:

а) при решении задач с периодическими колебаниями. Искомые величины в этих задачах представляются в виде $q(x, y, z) \exp(i\omega t)$ и компонента e_z определяется из уравнения (1.12);

б) при решении задач магнитоупругости, для которых выполняются условия отсутствия электрических зарядов [4]. Тогда компоненту e_z следует определять из уравнения (1.17) при $\varphi_e = 0$ после соответствующего интегрирования по z .

Используя соотношения (2.1) и интегрируя уравнения (1.15), (1.10) и (1.11) по z в пределах от $-h$ до h , получим следующие уравнения, определяющие неизвестные функции φ , ψ , f :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y} &= -\frac{\mu}{c} \frac{\partial f}{\partial t} \\ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{4\pi\sigma}{c} \varphi + \frac{4\pi c}{2hc^2} \left(\varepsilon_z \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} + b_y \frac{\partial w}{\partial t} \right) &= \frac{h_+ - h_-}{2h} \\ \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{4\pi\sigma}{c} \psi + \frac{4\pi c}{2hc^2} \left(c_z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + b_x \frac{\partial w}{\partial t} \right) &= \frac{h_+ - h_-}{2h} \end{aligned} \quad (2.4)$$

где

$$b_l = \int_{-h}^h B_{0l} dz, \quad c_l = \int_{-h}^h z B_{0l} dz \quad (l = x, y, z)$$

Соответствующее интегрирование остальных уравнений из (1.10) — (1.16) после некоторых преобразований приводит к дополнительным условиям, налагаемым на граничные значения искомых величин при $z = \pm h$

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h_+ + h_-}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{h_+ + h_-}{2} \right) \right] = \right. \\ &= -\frac{4\pi\sigma}{c} \left[\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{h_+ + h_-}{2} \right) - \frac{1}{2h} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial g_z}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} - \frac{\partial g_z}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} \right) - \right. \\ & \quad \left. - \frac{4\pi\sigma\mu}{2hc^2} \left(c_z \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + g_z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t^2} \right) - \frac{\varepsilon\mu - 1}{c} E_{0y} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] \\ & \left. \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h_+ + h_-}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{h_+ + h_-}{2} \right) \right] = \right. \\ &= \frac{4\pi\sigma}{c^2} \left[\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{h_+ + h_-}{2} \right) - \frac{1}{2h} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial g_z}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} - \frac{\partial g_z}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} \right) - \right. \\ & \quad \left. - \frac{4\pi\sigma\mu}{2hc^2} \left(c_y \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + g_y \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t^2} \right) - \frac{\varepsilon\mu - 1}{c} E_{0x} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h_x^+ + h_x^-}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{h_y^+ + h_y^-}{2} \right) = \frac{4\pi\sigma^2}{2hc^2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(c_x \frac{\partial w}{\partial t} + g_x \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left(c_y \frac{\partial w}{\partial t} + g_y \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} \right) \right] - \frac{\epsilon_1 - 1}{\mu c} \left(E_{0y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} - E_{0x} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} \right) \quad (2.5)$$

где

$$g_i = \int_{-h}^h z^2 B_{0i} dz \quad (i = x, y, z)$$

К уравнениям (2.4) необходимо присоединить линейное уравнение движения пластинки с учетом сил и моментов электромагнитного происхождения [1]

$$D\Delta^2 w + \frac{\partial}{\partial x} \left(T_{0x} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T_{0y} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + 2gh \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = R_z + \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} \quad (2.6)$$

Здесь T_{0x} и T_{0y} — усилия в направлениях x и y , определяемые из решения соответствующей задачи упругости при наличии статических объемных сил электромагнитного происхождения в направлениях x и y

$$R_{0x} = \frac{\sigma}{c} b_x E_{0y}, \quad R_{0y} = -\frac{\sigma}{c} b_y E_{0x}$$

Сила R_z и моменты m_x , m_y определяются согласно формулам (1.8) следующим образом (формулы (1.8) предварительно линейризуются и преобразуются с учетом (2.1) — (2.3)):

$$R_z = \frac{\sigma}{c} \left\{ b_y (E_{0x} + \varphi) - b_x (E_{0y} + \psi) + \right. \\ \left. + \frac{1}{c} \left[(b_{xx} + b_{yy}) \frac{\partial w}{\partial t} + c_{xz} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + c_{yz} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} \right] \right\} \\ m_x = \frac{\sigma}{c} \left\{ c_z (E_{0y} + \psi) - c_y \frac{c}{4\pi\sigma} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h_y^+ + h_y^-}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{h_x^+ + h_x^-}{2} \right) \right] + \right. \\ \left. + g_y \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{c_{xz}}{c} \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{1}{c} \left[l_{yy} - \frac{1}{2} b_y c_y - \frac{\partial}{\partial y} \left(l_y - \frac{1}{2} c_z c_y \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - g_{zz} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \frac{1}{c} \left[l_{xy} - \frac{1}{2} b_x c_y - \frac{\partial}{\partial x} \left(l_x - \frac{1}{2} c_z c_y \right) \right] \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} + \right. \\ \left. + \frac{2h\sigma E_{0x}}{4\pi} \left\{ \frac{e_z^+ + e_z^-}{2} - \frac{c}{4\pi\sigma} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h_y^+ + h_y^-}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{h_x^+ + h_x^-}{2} \right) \right] - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2hc} \left(\frac{\partial g_z}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} - \frac{\partial g_z}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} \right) + \frac{\epsilon_1 - 1}{2hc} \left(c_x \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} - c_y \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right) \right\} \right. \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned}
m_y = & \frac{\sigma}{c} \left\{ -c_z(E_{0x} + \varphi) + c_x \frac{c}{4\pi\sigma} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h_y^+ + h_y^-}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{h_x^+ + h_x^-}{2} \right) \right] - \right. \\
& - g_x \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{c_{yz}}{c} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{c} \left[l_{yx} - \frac{1}{2} b_y c_x - \frac{\partial}{\partial y} \left(l_x - \frac{1}{2} c_z c_x \right) \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} - \\
& - \frac{1}{c} \left[l_{yx} - \frac{1}{2} b_z c_x - \frac{\partial}{\partial x} \left(l_x - \frac{1}{2} c_z c_x \right) - g_{zz} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} + \\
& + \frac{2hc E_{xy}}{4\pi} \left| \frac{e_x^+ + e_x^-}{2} - \frac{c}{4\pi z} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h_y^+ + h_y^-}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{h_x^+ + h_x^-}{2} \right) \right] - \right. \\
& - \left. \frac{1}{2hc} \left(\frac{\partial g_x}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} - \frac{\partial g_x}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} \right) + \frac{\nu\mu - 1}{2hc} \left(c_x \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} - c_y \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right) \right\}
\end{aligned} \quad (2.7)$$

где

$$\begin{aligned}
b_{ij} &= \int_{-h}^h B_{0i} B_{0j} dz, & c_{ij} &= \int_{-h}^h z B_{0i} B_{0j} dz, & g_{zz} &= \int_{-h}^h z^2 B_{0z}^2 dz \\
l_{ij} &= \int_{-h}^h \left(\int_{-h}^z B_{0i} d\tilde{z} \right) B_{0j} z dz, & l_i &= \int_{-h}^h \left(\int_{-h}^z \tilde{z} B_{0z} d\tilde{z} \right) z B_{0i} dz \\
&& (i, j = x, y, z)
\end{aligned}$$

В четырех уравнениях (2.4) и (2.6) относительно искомых функций φ , ψ , j , w содержатся также неизвестные значения тангенциальных компонент индуцированного магнитного поля и нормальной компоненты индуцированного электрического поля (согласно (2.7)) при $z = \pm h$. Поэтому уравнения (2.4) и (2.6), вообще, следует решать совместно с уравнениями электродинамики (1.18) для внешней области при общих граничных условиях на поверхностях, ограничивающих пластинку. Схема вывода указанных граничных условий на основе гипотез (2.1) для линейных задач магнитоупругости имеется в работе [2]. В рассматриваемом случае граничные условия на поверхности $z = \pm h$ запишутся следующим образом.

$$\begin{aligned}
h_x &= h_x^{(e)} + \frac{\mu - 1}{\mu} B_{0z}^{(e)} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{z}{c} E_{0y} \frac{\partial w}{\partial t} \\
h_y &= h_y^{(e)} + \frac{\mu - 1}{\mu} B_{0z}^{(e)} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{z}{c} E_{0x} \frac{\partial w}{\partial t} \\
h_z &= \frac{1}{\mu} h_z^{(e)} + \frac{\mu - 1}{\mu} B_{0x}^{(e)} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\mu - 1}{\mu} B_{0y}^{(e)} \frac{\partial w}{\partial y} \\
e_x &= e_x^{(e)} + \frac{\mu - 1}{\nu} B_{0y}^{(e)} \frac{\partial w}{\partial t}, & e_y &= e_y^{(e)} - \frac{\mu - 1}{c} B_{0x}^{(e)} \frac{\partial w}{\partial t} \\
e_z &= \frac{1}{\nu} e_z^{(e)} + E_{0x} \frac{\partial w}{\partial x} + E_{0y} \frac{\partial w}{\partial y}
\end{aligned} \quad (2.8)$$

3. Пусть бесконечная пластинка служит проводником равномерно распределенного тока в направлении оси x . Электрическое поле в пластинке дается вектором $\mathbf{E}_0 [E_{0x}, 0, 0]$, $E_{0x} = \text{const}$.

Решая задачу магнитостатики — уравнения (1.2) при граничных условиях (1.3), — найдем

$$\mathbf{H}_0 = H_0 [0, H_{0y}, 0], \quad H_{0y} = \begin{cases} -\frac{4\pi\sigma}{c} E_{0x} h & \text{при } z > h \\ -\frac{4\pi\sigma}{c} E_{0x} z & \text{при } |z| \leq h \\ \frac{4\pi\sigma}{c} E_{0x} h & \text{при } z < -h \end{cases} \quad (3.1)$$

Используя (2.7) и (3.1), уравнения (2.4) и (2.6), определяющие искомые функции φ , ψ , f , w , приведем к следующему виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\mu}{c} \frac{df}{dt}, \quad \frac{df}{dy} - \frac{4\pi\sigma}{c} \varphi = \frac{h_x^+ - h_y^-}{2h}, \quad \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{4\pi\sigma}{c} \psi = \frac{h_x^- - h_x^+}{2h} \\ D\Delta^2 w + 2\eta h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{2h^2\sigma}{3c^2} \left(\frac{4\pi\sigma}{c} E_{0x} \right)^2 \frac{\partial w}{\partial t} + \\ + \frac{2h^2\sigma}{3c^2} E_{0x}^2 \left[\left(\frac{4\pi\sigma}{c} \right)^2 \frac{h^2}{5} + (\varepsilon\mu - 1) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\varepsilon h E_{0x}}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{e_z^+ + e_z^-}{2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{2h^2\sigma E_{0x}}{3c} \left[1 - \frac{3\pi c^2}{(4\pi\sigma)^2 h^2} \right] \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h_y^+ + h_y^-}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{h_x^+ + h_x^-}{2} \right) \right] \right] \end{aligned} \quad (3.2)$$

В частном случае, когда колебания не зависят от координаты x , получаем $\varphi = 0$, а вместо (3.2) — следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\mu}{c} \frac{df}{dt}, \quad \frac{df}{dy} - \frac{4\pi\sigma}{c} \varphi = \frac{h_x^+ - h_y^-}{2h} \\ D \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\eta h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{2h^2\sigma}{3c^2} \left(\frac{4\pi\sigma}{c} E_{0x} \right)^2 \frac{\partial w}{\partial t} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Из (3.3) видно, что в этом случае уравнение движения пластинки отделяется от уравнений для индуцированного электромагнитного поля. Представляя решение уравнения движения пластинки в виде

$$w = w_0 \exp i(\omega t - kx)$$

получим характеристическое уравнение, определяющее частоту колебаний

$$\Omega^2 + 2\beta\Omega + 1 = 0 \quad (3.4)$$

Здесь

$$\Omega = \frac{i\omega}{\Omega_0}, \quad \beta = \frac{\sigma h^2}{6\eta c^2 \Omega_0} \left(\frac{4\pi\sigma}{c} E_{0x} \right)^2, \quad \Omega_0 = \frac{Dk^2}{2\eta h}$$

Решение уравнения (3.4) показывает, что при $\beta < 1$ возмущения затухают по экспоненциальному закону с коэффициентом затухания и частотой $(1 - \beta^2)^{1/2}$, а при $\beta > 1$ возмущения затухают без колебаний с коэффициентом затухания $\beta + (\beta^2 - 1)^{1/2}$.

В рассмотренном частном случае условие отсутствия электрического заряда, приведенное в работе [4], выполняется. Следовательно, как было указано выше, легко можно учитывать токи смещения, определяя компоненту e_z из уравнения (1.17) интегрированием по z . Повторяя далее процедуру, приведенную в пункте 2, можно показать, что первое и третье уравнения из (3.2) остаются без изменений, а вместо второго уравнения получим

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{4\pi s}{c} z = - \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{h_+ - h_-}{2h}$$

Таким образом, в этом случае с точностью гипотез магнитоупругости токи смещения не влияют на характер упругих колебаний пластинки.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 6 VII 1973

Մ. Վ. ԲԵԼՈՒԲԵԿՅԱՆ

ՀԱՍԱՆՔԱՏԱՐ ԽԱՆԵՐԻ ԻՄԱԳՆԵՍԱԿԱՌԱՉԿԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ
ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո ս մ

[1, 2] աշխատանքներում առաջարկված մագնիսաառականության վարկածների հիման վրա ստացվում են մագնիսական դաշտում անդադրված հոսանքատար սալերի մագնիսաառականության հավասարումները, հնարավոր է, որ էլեկտրական հոսանքը դուրսհեն է սալի միջին հարթությանը: Մտացված հավասարումները ուսումնասիրված են մասնավոր դեպքի համար: Դիտարկված են անվերջ սալի տատանումները, որին հաղորդվում է հավասարաչափ բաշխված էլեկտրական հոսանք: Քանզում են տատանումների հաճախականությունը և մարման օրենքը՝ կախված հոսանքի խտությունից:

ON MAGNETOELASTIC EQUATIONS FOR
CURRENT-CARRYING PLATES

M. V. BELUBEKIAN

S u m m a r y

On the basis of magnetoelasticity hypothesis the equations for magnetoelastic oscillations of plates are deduced. The plates carry electrical current and are placed in a magnetic field.

The frequency of oscillations and the law of damping dependent on electrical current density are defined for a special case.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В. К трехмерной задаче магнитоупругих колебаний пластинки. ПММ, т. 35, вып. 2, 1971.
2. Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В. К магнитоупругости тонких оболочек и пластин. ПММ, т. 37, вып. 1, 1973.
3. Сейдов Л. И. Механика сплошных сред, т. 1. Наука, М., 1970.
4. Белубекян М. В. Условия отсутствия электрического заряда в задачах электромагнитоупругости. Докл. АН Арм. ССР, т. LVI, № 2, 1973.