

Н. Г. ИСАБЕКЯН

ДВЕ ЗАДАЧИ ОСЕСИММЕТРИЧНО НАГРУЖЕННЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ, ИЗГОТОВЛЕННЫХ ИЗ ОРТО- ТРОПНОГО РАЗНОМОДУЛЬНОГО МАТЕРИАЛА

1. Уравнения равновесия общей теории осесимметрично нагруженных оболочек вращения, изготовленных из ортотропного разномодульного материала, главные направления упругости которого 1-1, 2-2 совпадают с координатными осями оболочки s, φ , построенной на основании гипотезы недеформируемых нормалей, имеют вид [5]

$$\begin{aligned} & \left(L_s + \frac{C_{12}}{C_{11}} \frac{1}{R_1 R_2} \right) V - \frac{h}{a_{22}} \frac{W}{R_2} - \nu \frac{h}{a_{22}} \frac{\sin \varphi}{r} Q = \\ & = - \frac{1}{r} \left(\frac{C_{11}}{C_{11}} \frac{dF_1}{ds} - \frac{C_{22}}{C_{11}} \frac{\sin^2 \varphi}{r} F_1 \right) \\ & \left(L_s - \frac{C_{12}}{C_{11}} \frac{1}{R_1 R_2} \right) W + \frac{1}{D_{11}} \frac{V}{R_2} + \nu \frac{K_{11}}{C_{11} D_{11}} \nabla_s \left(\frac{\sin \varphi}{r} V \right) + \\ & + \nu^2 \frac{K_{11}}{D_{11}} \nabla_s Q + \nu \frac{a_{22} P_{11} K_{11}^2}{3 C_{11}^3 D_{11}} \nabla_s \left| \frac{(T_s - \nu C_{11} Q)^4}{(K_{11} x_1 + K_{12} x_2)^2} \right| = \\ & = - \frac{1}{D_{11}} \left[\frac{F_2}{r} - \nu \frac{K_{11}}{C_{11}} \nabla_s \left(\frac{F_1}{r} \right) \right] \end{aligned} \quad (1.1)$$

В (1.1) операторы ∇_s и L_s таковы:

$$\begin{aligned} \nabla_s &= \frac{d}{ds} - \frac{a_{22} + a_{22}}{a_{22}} \frac{\sin \varphi}{r} \\ L_s &= \frac{d^2}{ds^2} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{d}{ds} - \frac{C_{12}}{C_{11}} \frac{\sin^2 \varphi}{r^2} \end{aligned} \quad (1.2)$$

F_1 и F_2 — известные функции от внешней нагрузки [1, 2].

Кроме того,

$$\begin{aligned} Q &= \frac{2(K_{11} x_1 + K_{12} x_2)}{C_{11} (1 + \nu)} \left| 1 + \frac{2a_{22} P_{11} K_{11} T^* (T^* - \nu)}{C_{11}^2 (1 + \nu)} \right| \\ \nu &= \left| 1 + \frac{4\nu a_{22} P_{11} K_{11}}{C_{11}^2} (T^* - \nu) \right|^{1/2}, \quad T^* = \frac{T_s}{K_{11} x_1 + K_{12} x_2} \end{aligned} \quad (1.3)$$

и C_{ik} , K_{ik} , P_{ik} , D_{ik} — коэффициенты, представляющие комбинации коэффициентов деформации материала оболочки a_{ik} в главных направлениях упругости 1-1, 2-2 типа [5]

$$C_{11} = \frac{a_{22} |a_{22} (a_{11} - a_{11}^-) - 2a_{12}^2}{(a_{11}^+ a_{22} - a_{12}^2) (a_{11} a_{22} - a_{12}^2)} \frac{h}{2} \quad C_{12} = -\frac{a_{12}}{a_{22}} C_{11} \quad (1.4)$$

$$D_{ik} = \frac{h^3}{12} C_{ik}, \dots \quad \mu = \frac{a_{11} - a_{11}^-}{a_{11} + a_{11}^-} \operatorname{sign} M.$$

Изложенная теория построена в предположении, что напряжения σ_z и τ_{rz} по толщине оболочки изменяются по кусочно-линейному закону, при этом σ_z имеет один и тот же знак по всей толщине оболочки (то есть выполняется условие слабомоментности в направлении z [2, 5], а τ_{rz} меняет свой знак при значении r , равном

$$r_0 = -\frac{a_{22} x_{11} - a_{12} x_{12}}{a_{11} x_{11} - a_{12} x_{12}} \quad (1.5)$$

Для тангенциальных сил и изгибающих моментов имеем также [2, 5]

$$T_r = -V \frac{\sin \varphi}{r} + \frac{1}{r} F_1(s), \quad T_z = \frac{dV}{ds} \quad (1.6)$$

$$M_r = -D_{11} \frac{dW}{ds} - D_{12} W \frac{\sin \varphi}{r} - \mu \frac{K_{11}}{C_{11}} \left(V \frac{\sin \varphi}{r} - \frac{F_1}{r} \right) -$$

$$- \mu^2 K_{11} Q - \mu \frac{a_{22} B_{11} K_{11}^2}{3 C_{11}^3} \frac{(T_r - \mu C_{11} Q)^2}{(K_{11} x_{11} + K_{12} x_{12})^2} \quad (1.7)$$

$$M_z = -\frac{a_{12}}{a_{22}} M_r + \frac{h^3}{12 a_{22}} W \frac{\sin \varphi}{r}.$$

В (1.1)–(1.7) следует брать

$$\begin{aligned} \text{при } \sigma_z > 0 \quad a_{22} &= a_{22}^+ \\ \text{при } \sigma_z < 0 \quad a_{22} &= a_{22}^- \end{aligned} \quad (1.8)$$

В частном случае, когда σ_z аналогично $\sigma_{\theta\theta}$ не меняет по толщине оболочки своего знака, имеем так называемую слабомоментную оболочку, основные уравнения и соотношения для которой можно получить из (1.1)–(1.7) [5].

Для иллюстрации изложенной теории рассмотрим некоторые частные примеры.

2. Рассмотрим осесимметричную задачу полубесконечной круговой цилиндрической оболочки (толщина — h , радиус — R).

Пусть оболочка по окружности торцевого сечения ($s=0$) загружена равномерно распределенными изгибающими моментами с интенсивностью M_0 и перерезывающими силами с интенсивностью N_0 . Кроме того, оболочка подвергается внешнему давлению с интенсивностью q_0 . Таким образом,

$$X = Y = 0, \quad Z = -q_0 \quad (2.1)$$

и граничные условия таковы:

$$\text{при } s = 0: M_s = M_0, N = N_0 \quad (2.2)$$

Ясно, что в рассматриваемой оболочке не возникает внутреннее тангенциальное усилие T_s .

Для данной нагрузки имеем

$$F_1 = 0, \quad F_2 = -R \int_0^s Z ds = q_0 R s \quad (2.3)$$

Пусть интенсивность равномерно распределенного давления q_0 такова, что напряжение σ_s не меняет своего знака ни по толщине оболочки, ни по длине ее. Тогда из (1.1), ввиду отсутствия усилия T_s и неизменности знака усилия T_s во всей оболочке, с учетом (2.1) и (2.3) получим для рассматриваемой задачи следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 V}{ds^2} - \frac{h}{a_{22} R} W &= 0 \\ \frac{2\gamma^2}{1+\gamma} \frac{d^2 W}{ds^2} + \frac{V}{D_{11} R} &= -\frac{q_0 s}{D_{11}} \end{aligned} \quad (2.4)$$

где

$$\gamma = \frac{2}{C_{11}} \left(\frac{2K_{11}}{a_{11}^2 + a_{11}} \right)^{1/2} \quad (2.5)$$

Решение системы (2.4) с учетом полубесконечности рассматриваемой оболочки и граничных усилий (2.2) примет вид

$$\begin{aligned} V &= R e^{-ps} [N_0 \cos ps - (2pM_0 + N_0) \sin ps] - q_0 R s \\ W &= \frac{1+\gamma}{4p^2 \gamma^2 D_{11}} e^{-ps} [(2pM_0 + N_0) \cos ps + N_0 \sin ps] \end{aligned} \quad (2.6)$$

где

$$p^4 = \frac{3(1 - a_{11}^2 a_{22} - a_{12}^2 + 1 - a_{11} a_{22} - a_{22}^2)^2}{4a_{22}^2 R^2 h^2} \quad (2.7)$$

Используя (1.6), (1.7), (1.4), (2.4) и (2.5), получим

$$M_s = \frac{e^{-ps}}{p} \{ (pM_0 + N_0) \sin ps + pM_0 \cos ps \} \quad (2.8)$$

$$M_c = -\frac{a_{12}}{a_{22}} \frac{e^{-ps}}{p} \{ (pM_0 + N_0) \sin ps + pM_0 \cos ps \} \quad (2.9)$$

$$T_s = 2p R e^{-ps} [pM_0 \sin ps - (pM_0 + N_0) \cos ps] - q_0 R \quad (2.10)$$

$$w = a_{22} \frac{R}{h} 2p R e^{-ps} [pM_0 \sin ps - (pM_0 + N_0) \cos ps] - q_0 R \quad (2.11)$$

Как видно из (2.8), оболочка по длине разбивается на отдельные зоны, в которых изгибающий момент M_z меняет попеременно свой знак. А так как в зависимости от знака M_z напряжения определяются по разным формулам [5], то важно знать длины указанных зон и знак изгибающего момента в каждой из них. Приравнявая нулю выражение для M_z (2.8), получим значения s , указывающие сечения, в которых M_z меняет знак

$$p s = k\pi - \arctg \frac{pM_0}{pM_0 + N_0}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.12)$$

Напряжение σ_z по толщине оболочки меняет свой знак и в каждой зоне превращается в нуль при

$$\eta = \pm \frac{h}{2} \frac{1}{1 - \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{a_{11}^2} - 1} \frac{1}{1 - \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{a_{11}^2} + 1} \frac{1}{1 - \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{a_{11}^2}}, \text{ если } \begin{cases} M_z < 0 \\ M_z > 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

В полученных формулах следует брать $a_{11} = a_{22}$, так как из (2.10) очевидно, что σ_z всюду отрицательно.

Числовой пример

Для расчетов использован ортотропный разномодульный материал с упругими постоянными, характерными для материалов типа СВМ [4]:

$$\begin{aligned} E_1^* &= 2640 \text{ кг/мм}^2, & E_1 &= 5450 \text{ кг/мм}^2, & \nu_{12}^* &= 0.0621 \\ E_2^* &= 1990 \text{ кг/мм}^2, & E_2 &= 3250 \text{ кг/мм}^2, \end{aligned} \quad (2.14)$$

Примем $R = 20h$, $M_0 = 1.25 q_0 h^2$, $N_0 = 1.25 q_0 h$.

Подставляя в (2.7) значения геометрических и физико-механических характеристик оболочки, для параметра p получим

$$p = 0.285 \frac{1}{h} \quad (2.15)$$

Из (2.12) можно определить, что длина первой зоны, где $M_z > 0$, равна $l_1 = 10.3h$, а длины остальных зон, в которых M_z попеременно меняет знак, постоянны и равны $l_i = 11.0h$ ($i = 2, 3, \dots$).

Из (2.8) с учетом (2.15) имеем

$$M_z = \frac{q_0 h^2}{0.285 \frac{1}{h}} \left(1.61 \sin 0.285 \frac{s}{h} + 0.356 \cos 0.285 \frac{s}{h} \right) \quad (2.16)$$

В первой зоне M_z достигает своего максимума $M_{z, \max}^I = 1.49 q_0 h^2$ в сечении $s = 4.75h$; во второй зоне $M_{z, \max}^{II} = -0.065 q_0 h^2$ при $s = 15.75h$. Сравнивая эти результаты, замечаем, что $M_{z, \max}^{II}$ в 23 раза меньше, чем $M_{z, \max}^I$, то есть имеем весьма существенное затухание краевого эффекта.

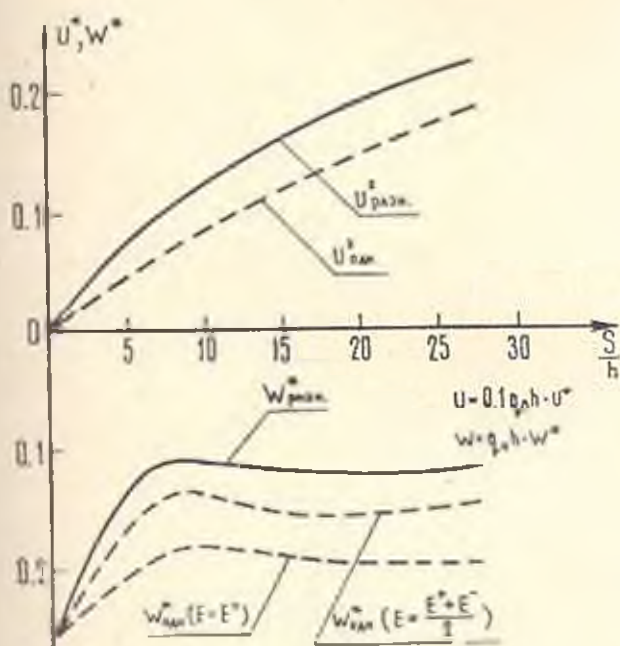
Из (2.10) и (2.15) имеем

$$T_s = q_0 h \left| -20 + \frac{11.4}{e^{-0.285 \frac{s}{h}}} \left(0.3427 \sin 0.285 \frac{s}{h} - 1.9275 \cos 0.285 \frac{s}{h} \right) \right| \quad (2.17)$$

Максимальное значение T_s получается в торцевом сечении ($s=0$), где $T_s = -38.31 q_0 h$.

На основании [5] для I зоны, где $M_s > 0$, можно получить выражение для напряжения σ_s и убедиться, что слабомоментность в направлении φ выполняется.

С учетом (2.6) и (2.15) определены перемещения оболочки u, w и построены графики их изменения вдоль оси оболочки вместе с соответствующими графиками для одномодульной оболочки (пунктирные линии) (фиг. 1).



Фиг. 1.

Максимальные значения растягивающих и сжимающих напряжений в сечении $s=0$ равны

$$\sigma_{s \max} = 6.98 q_0 \left(\gamma = \frac{h}{2} \right), \quad \sigma_{s \min} = -8.98 q_0 \left(\gamma = -\frac{h}{2} \right)$$

$$\sigma_{\varphi \max} = -39.58 q_0 \left(\gamma = -\frac{h}{2} \right)$$

Классическая теория, если вести расчет по модулям упругости при растяжении ($E_t = E_s$), для тех же величин в сечении $s = 0$ дает

$$\tau_{\max} = +9.36 q_0 \left(\tau = \pm \frac{h}{2} \right), \quad \tau_{\max} = -35.44 q_0$$

Как видно, в рассмотренных сечениях расхождения в напряжениях составляют 10—25%, в перемещениях 1 зоны (фиг. 1) — до 40%.

3. Рассмотрим усеченную коническую оболочку, изготовленную из ортотропного разномодульного материала, главные направления упругости которого 1-1, 2-2 совпадают с координатными осями s, τ .

Пусть оболочка одним из торцов ($s=0$) с радиусом торцевой окружности $r = r_0$ закреплена полностью, а на другом торцевом сечении ее ($s=s_1, r=r_1$) действует равномерно распределенное по окружности поперечного сечения тангенциальное сжимающее усилие T_0 , кроме того, оболочка подвергается внутреннему давлению с интенсивностью q_0 (фиг. 2).

Будем считать, что геометрии оболочки, упругие характеристики ее материала и нагрузки таковы, что во всех точках расчетной области обо-

лочки мы имеем слабомоментное напряженное состояние.

В рассматриваемой задаче имеем

$$X = Y = 0, \quad Z = q_0 \quad (3.1)$$

и граничные условия таковы:

$$\text{при } r=r_0: \xi=0, \quad \zeta=0, \quad W=0 \quad (3.2)$$

$$\text{при } r=r_1: M_r=0, \quad N=0, \quad T_s=-T_0 \quad (3.3)$$

где ξ и ζ — радиальная и осевая проекции перемещения

$$\xi = \frac{a_2 r}{h} \left(\frac{a_1}{a_{10}} T_s + T_r \right) \quad (3.4)$$

$$\zeta = \zeta_0 + \int_0^s \left| \frac{\cos \psi}{h} (a_{11} T_s + a_{12} T_r) - W \sin \psi \right| ds \quad (3.5)$$

Для рассматриваемой слабомоментной конической оболочки уравнения (1.1) можно привести к одному уравнению относительно некоторой комплексной функции [1]. Принимая за независимую переменную r и не останавливаясь на выкладках, получим

$$L(U) = \sqrt{\frac{12(c_{11}c_{22} - c_{12}^2)}{c_{22}}} \frac{i \cos \psi}{hr \sin^2 \psi} U = \Phi(r) \quad (3.6)$$

где

$$L_r = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{c_{11}}{c_{11}} \frac{1}{r^2} \quad (3.7)$$

$$U = W + iV, \quad i = -\frac{i}{h^2} \sqrt{\frac{12}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}} \quad (3.8)$$

$$\Phi(r) = -\frac{12}{c_{11}h^2} \left| \frac{F_0}{r \sin^2 \psi} - i \frac{h}{r \sin \psi} \sqrt{12(c_{11}c_{22} - c_{12}^2)} \left(c_{12} \frac{dF_1}{dr} + c_{22} \frac{F_1}{r} \right) \right| \quad (3.9)$$

$$c_{11} = \frac{a_{22}}{\Omega}, \quad c_{22} = \frac{a_{11}}{\Omega}, \quad c_{12} = -\frac{a_{12}}{\Omega}, \quad \Omega = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \quad (3.10)$$

По структуре это уравнение аналогично соответствующему уравнению одномодульной конической оболочки [1, 2]. Отличие заключается лишь в коэффициенте при втором члене и в выражении для правой части, где фигурируют упругие постоянные, характеризующие разномодульность материала оболочки. Упомянутое сходство дает возможность использовать для интегрирования этого уравнения тот же метод, что и в классической теории [1].

В качестве частного решения уравнения (3.6), аналогично классической теории, можно использовать решение, соответствующее безмоментной оболочке [1, 2].

$$W^0 = 0, \quad V^0 = -\frac{F_1}{\cos \psi} \quad (3.11)$$

Не вдаваясь в известные подробности [1], решение однородного уравнения, соответствующего (3.6), берем в виде

$$U = (A_1 - iB_1)[\operatorname{Re} J_2(x) \sqrt{2i} + i \operatorname{Im} J_2(x) \sqrt{2i}] + \\ + (A_2 - iB_2)[\operatorname{Re} H_2^1(x) \sqrt{2i} + i \operatorname{Im} H_2^1(x) \sqrt{2i}] \quad (3.12)$$

где x — независимая переменная

$$x = \sqrt{\frac{3(c_{11}c_{22} - c_{12}^2)}{c_{11}^2}} \frac{2 + (s_0 - s) \operatorname{ctg} \psi}{\sqrt{h}} \quad (3.13)$$

Первое из решений (3.12) описывает напряженное состояние в области края $x=x_0$ ($r=r_0$); второе служит для описания напряженного состояния у края $x=x_1$ ($r=r_1 < r_0$). Если численное значение разности x_0-x_1 достаточно велико (а именно, если основания усеченного конуса удалены друг от друга на расстояние порядка

$$s^* \geq \pi \sqrt{\frac{hr}{\cos \psi}} \sqrt[4]{3 \left(\frac{E_2}{E_1} - \nu_{12}^2 \right)}$$

то взаимным влиянием краев можно пренебрегать; тогда константы A_1, B_1 определяются по условиям на краю x_0 независимо от констант A_2, B_2 , которые определяются по условиям на краю x_1 . Индексы при коэффициентах деформации и модулях упругости в приведенных формулах определяются после установления знаков главных напряжений согласно следующему правилу [5]:

при	$\varepsilon_x > 0, \quad \varepsilon_z < 0:$	$a_{11}, \quad a_{22}$	
при	$\varepsilon_x < 0, \quad \varepsilon_z > 0:$	$a_{11}, \quad a_{22}$	
при	$\varepsilon_x > 0, \quad \varepsilon_z > 0:$	$a_{11}^*, \quad a_{22}^*$	(3.14)
при	$\varepsilon_x < 0, \quad \varepsilon_z < 0:$	$a_{11}, \quad a_{22}$	

После отделения вещественной и мнимой частей из (3.12) и (3.8) получим

$$W = - \left[A_1 \left(\psi_1 + \frac{\sqrt{2}}{x} \psi_2' \right) + B_1 \left(\psi_2 - \frac{\sqrt{2}}{x} \psi_1' \right) \right] - \\ - \left[A_2 \left(\psi_3 + \frac{\sqrt{2}}{x} \psi_4' \right) + B_2 \left(\psi_4 - \frac{\sqrt{2}}{x} \psi_3' \right) \right] \quad (3.15)$$

$$V = \frac{K^2}{\sqrt{12(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)}} \left[A_1 \left(\psi_2 - \frac{\sqrt{2}}{x} \psi_1' \right) - B_1 \left(\psi_1 + \frac{\sqrt{2}}{x} \psi_2' \right) + \right. \\ \left. + A_2 \left(\psi_4 - \frac{\sqrt{2}}{x} \psi_3' \right) - B_2 \left(\psi_3 + \frac{\sqrt{2}}{x} \psi_4' \right) \right] \quad (3.16)$$

где $\psi_i = \psi_i(x/\sqrt{2})$ — табулированные функции [1], а $\psi_i' = \psi_i'(x/\sqrt{2})$ — их производные по аргументу в скобках.

Подставляя (3.15), (3.16) в (1.6), (1.7) и прибавляя соответствующие частные решения, для внутренних сил и моментов получим

$$T_r = - \frac{2h \operatorname{ctg} \frac{\psi}{2}}{a_{22}x^2} \left[A_1 \left(\psi_2 - \frac{\sqrt{2}}{x} \psi_1' \right) - B_1 \left(\psi_1 + \frac{\sqrt{2}}{x} \psi_2' \right) + \right. \\ \left. + A_2 \left(\psi_4 - \frac{\sqrt{2}}{x} \psi_3' \right) - B_2 \left(\psi_3 + \frac{\sqrt{2}}{x} \psi_4' \right) \right] + T_r^0 \quad (3.17)$$

$$T_\varphi = - \frac{h \sqrt{2} \operatorname{ctg} \frac{\psi}{2}}{x a_{22}} \left[A_1 \left(\psi_2' + \frac{2}{x^2} \psi_1' - \frac{\sqrt{2}}{x} \psi_2 \right) - \right. \\ - B_1 \left(\psi_1' - \frac{2}{x^2} \psi_2' - \frac{\sqrt{2}}{x} \psi_1 \right) + \\ \left. + A_2 \left(\psi_4' + \frac{2}{x^2} \psi_3' - \frac{\sqrt{2}}{x} \psi_4 \right) - B_2 \left(\psi_3' - \frac{2}{x^2} \psi_4' - \frac{\sqrt{2}}{x} \psi_3 \right) \right] + T_\varphi^0 \quad (3.18)$$

$$N = \frac{2h \operatorname{ctg}^2 \psi}{a_{22} x^2} \left[A_1 \left(\psi_2 - \frac{\sqrt{2}}{x} \psi_1' \right) - B_1 \left(\psi_1 + \frac{\sqrt{2}}{x} \psi_2' \right) + \right. \\ \left. + A_2 \left(\psi_4 - \frac{\sqrt{2}}{x} \psi_3' \right) - B_2 \left(\psi_3 + \frac{\sqrt{2}}{x} \psi_4' \right) \right] \quad (3.19)$$

$$M_x = - \frac{2\sqrt{2} \operatorname{ctg}^2 \psi D_{11}}{xh} \sqrt{\frac{3(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)}{a_{22}^2}} \left\{ A_1 \left[\psi_1 - \right. \right. \\ \left. - \left(1 + \frac{a_{12}}{a_{22}} \right) \frac{\sqrt{2}}{x} \left(\psi_1 + \frac{\sqrt{2}}{x} \psi_2' \right) \right] + \\ + B_1 \left[\psi_2' - \left(1 + \frac{a_{12}}{a_{22}} \right) \frac{\sqrt{2}}{x} \left(\psi_2 - \frac{\sqrt{2}}{x} \psi_1' \right) \right] + \\ + A_2 \left[\psi_3 - \left(1 + \frac{a_{12}}{a_{22}} \right) \frac{\sqrt{2}}{x} \left(\psi_3 + \frac{\sqrt{2}}{x} \psi_4' \right) \right] + \\ \left. + B_2 \left[\psi_4' - \left(1 + \frac{a_{12}}{a_{22}} \right) \frac{\sqrt{2}}{x} \left(\psi_4 - \frac{\sqrt{2}}{x} \psi_3' \right) \right] \right\} \quad (3.20)$$

Определим порознь A_1, B_1 — из (3.2) и A_2, B_2 — из (3.3)

$$A_1 = \frac{aa_1}{a_1a_4 + a_2a_3}, \quad B_1 = - \frac{aa_1}{a_1a_4 + a_2a_3}, \quad A_2 = B_2 = 0 \quad (3.21)$$

где

$$a = \frac{1}{\sqrt{2} h x_0 \operatorname{ctg} \psi} \left\{ \frac{q_0 h}{4 \operatorname{ctg}^2 \psi} \sqrt{\frac{3(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)}{a_{22}^2}} \left[\left(a_{22} + \frac{a_{12}}{2} \right) x_0^4 - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{a_{12}}{2} x_1^4 \right] + T_0 a_{12} x_1^2 \right\}$$

$$a_1 = \psi_1(x_0 \sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{x_0} \psi_2'(x_0 \sqrt{2}), \quad a_2 = \psi_2(x_0 \sqrt{2}) - \frac{\sqrt{2}}{x_0} \psi_1'(x_0 \sqrt{2}) \\ a_3 = \psi_2(x_0 \sqrt{2}) - \left(1 - \frac{a_{12}}{a_{22}} \right) \frac{\sqrt{2}}{x_0} \left[\psi_3(x_0 \sqrt{2}) - \frac{\sqrt{2}}{x_0} \psi_1'(x_0 \sqrt{2}) \right] \quad (3.22) \\ a_4 = \psi_1'(x_0 \sqrt{2}) - \left(1 - \frac{a_{12}}{a_{22}} \right) \frac{\sqrt{2}}{x_0} \left[\psi_1(x_0 \sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{x_0} \psi_2'(x_0 \sqrt{2}) \right]$$

Тогда окончательно для искомых величин из (3.15)–(3.20) с учетом (3.11), (3.21) и (3.22) получим

$$W = \frac{a}{a_1a_4 + a_2a_3} \left[a_1 \left(\psi_2 - \frac{\sqrt{2}}{x} \psi_1' \right) - a_4 \left(\psi_1 + \frac{\sqrt{2}}{x} \psi_2' \right) \right] \quad (3.23)$$

$$V = \frac{h^2}{V 12 (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)} \frac{a}{a_1a_4 + a_2a_3} \left[a_1 \left(\psi_1 + \frac{V2}{x} \psi_2' \right) + a_2 \left(\psi_2 - \frac{V2}{x} \psi_1' \right) \right] + \frac{h \sin^2 \psi}{4 \operatorname{ctg} \psi \sqrt{\frac{3(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)}{a_{22}^2}}} \left\{ T_0 x_1^2 - \frac{q_0 h}{8 \cos^2 \psi \sqrt{\frac{3(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)}{a_{22}^2}}} [(x^4 - x_1^4) \sin^2 \psi + (x^4 - x_0^4) \cos^2 \psi] \right\} \quad (3.24)$$

$$T_s = \frac{1}{x^2} \left\{ -\frac{2h \operatorname{ctg} \psi}{a_{22}} \frac{a}{a_1a_4 + a_2a_3} \left[a_1 \left(\psi_1 + \frac{V2}{x} \psi_2' \right) + a_2 \left(\psi_2 - \frac{V2}{x} \psi_1' \right) \right] + \frac{q_0 h (x^4 - x_1^4)}{8 \operatorname{ctg}^2 \psi \sqrt{\frac{3(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)}{a_{22}^2}}} - T_0 x_1^2 \right\} \quad (3.25)$$

$$T_\varphi = -\frac{h V 2 \operatorname{ctg} \psi}{x a_{22}} \frac{a}{a_1a_4 + a_2a_3} \left[a_1 \left(\psi_1' - \frac{2}{x^2} \psi_2' - \frac{V2}{x} \psi_1 \right) + a_2 \left(\psi_2' + \frac{2}{x^2} \psi_1' - \frac{V2}{x} \psi_2 \right) \right] + \frac{q_0 h x^2}{4 \operatorname{ctg}^2 \psi \sqrt{\frac{3(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)}{a_{22}^2}}} \quad (3.26)$$

$$N = \frac{2h \operatorname{ctg}^2 \psi}{a_{22} x^2} \frac{a}{a_1a_4 + a_2a_3} \left[a_1 \left(\psi_1 + \frac{V2}{x} \psi_2' \right) + a_2 \left(\psi_2 - \frac{V2}{x} \psi_1' \right) \right] \quad (3.27)$$

$$M_s = \frac{2 V 2 \operatorname{ctg} \psi}{x} \frac{D_{11}}{h} \sqrt{\frac{3(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)}{a_{22}^2}} \frac{a}{a_1a_4 + a_2a_3} \left\{ a_1 \left[\psi_2' - \left(1 + \frac{a_{12}}{a_{22}} \right) \frac{V2}{x} \left(\psi_2 - \frac{V2}{x} \psi_1' \right) \right] - a_2 \left[\psi_1' - \left(1 + \frac{a_{12}}{a_{22}} \right) \frac{V2}{x} \left(\psi_1 + \frac{V2}{x} \psi_2' \right) \right] \right\} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} \xi = & -h \sin \psi \frac{x}{V2} \sqrt{\frac{a_{22}^2}{12(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)}} \frac{a}{a_1a_4 + a_2a_3} \left\{ a_1 \left[\psi_1' - \left(1 - \frac{a_{12}}{a_{22}} \right) \frac{V2}{x} \left(\psi_1 + \frac{V2}{x} \psi_2' \right) \right] + a_2 \left[\psi_2' - \left(1 - \frac{a_{12}}{a_{22}} \right) \frac{V2}{x} \left(\psi_2 - \frac{V2}{x} \psi_1' \right) \right] \right\} + \\ & \frac{\sin \psi}{2 \operatorname{ctg} \psi \sqrt{\frac{12(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)}{a_{22}^2}}} \left\{ -a_{12} T_0 x_1^2 + \frac{q_0 h}{8 \operatorname{ctg}^2 \psi \sqrt{\frac{12(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)}{a_{22}^2}}} [(a_{12} + 2a_{22}) x^4 - a_{12} x_1^4] \right\} \quad (3.29) \end{aligned}$$

Числовой пример

Для расчетов использован ортотропный разномодульный материал с упругими постоянными

$$a_{11} = \frac{2}{E}, \quad a_{11} = \frac{1}{E}, \quad a_{22}^+ = \frac{6}{E}, \quad a_{22}^- = \frac{5}{E}, \quad a_{12} = -\frac{0.1}{E} \quad (3.30)$$

Примем

$$\psi = 30^\circ, \quad r_0 = 2r_1 = 50h, \quad T_0 = 600q_0h \quad (3.31)$$

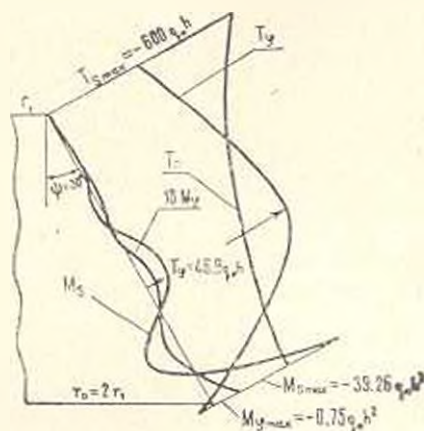
На фиг. 3 приведены эпюры T_z , T_y , M_z и M_y .

Из эпюр T_z , M_z и T_y , M_y видно, что в направлении s слабомоментность выполняется во всей области оболочки, а в направлении φ — во всей области, за исключением узкой кольцевой полосы у края оболочки $s = 0$.

Однако, как известно [2, 3], классическая теория, построенная на основании гипотезы недеформируемых нормалей, не может дать достоверных сведений о напряженно-деформированном состоянии оболочки вблизи от линий искажения. Корректно определить напряженное состояние в указанных зонах можно лишь с помощью трехмерных уравнений теории упругости. В остальной же — основной — части оболочки имеет место так называемая внутренняя задача, решение которой с достаточно высокой степенью точности можно реализовать с помощью какой-нибудь уточненной теории, а в случае достаточно тонких оболочек — и с помощью классической теории.

Очевидно, в рассматриваемом случае линиями искажения являются края оболочки, охватывающие некоторые кольцевые зоны ее. На основании известных исследований [3] ширину краевой зоны можно принять порядка $0.5h$. Учитывая сказанное выше, в данной задаче расчетной будем считать всю область оболочки за исключением краевых полос толщиной порядка $0.5h$. В этой расчетной зоне, во-первых, реализуется упомянутая выше внутренняя задача и поэтому рассматриваемая задача тонкой оболочки может быть решена в классической постановке; во-вторых, во всей указанной зоне оболочка действительно является слабомоментной.

Укажем также, что чем меньше коэффициенты Пуассона, тем меньше величина краевой зоны. В частном случае, когда коэффициенты Пуассона



Фиг. 3.

равны нулю, краевая зона исчезает и условие слабомоментности обеспечивается по всей оболочке.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 16 VI 1972

Ն. Հ. ԻՍԱԲԵԿՅԱՆ

ՕՐԹՈՏՐՈՊ ՏԱՐԱՄՈՒԹՈՒՆՆԵՐԻՆԻ ՎԱՏԻՍԻՍԱՆ ԱՌԱՆՑՔԱՍԻՄԵՏՐԻԿ ԲՆՈՂԱՎՈՐՈՒՄ ՊՏՏՈՒՆ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ԵՐԿՈՒ ԽՆԴԻՐ

Ա. մ. փ. ո. փ. ո. մ.

Հանձնված են օրթոտրոպ տարամոդուլ նյութից պատրաստած առանցքասիմետրիկ բեռնավորված թաղանթների համար հետևյալ երկու խնդիրները՝ 1) արտաքին ճնշման ազդեցության տակ դեմոլոգ և եզրում հավասարաչափ բաշխված ծոռոգ մոմենտներով և կտրող ուժերով բեռնավորված կիսաանվերջ շրջանային դրանի խնդիրը, 2) տանգենցիալ սեղմող ճիգերի և ներքին ճնշման ազդեցության տակ դեմոլոգ հատած կոնական թաղանթի խնդիրը:

Խնդիրները հասցրած են մինչև թվային արդյունքների:

TWO PROBLEMS FOR AXISYMMETRICALLY LOADED SHELL OF REVOLUTION MADE FROM ORTHOTROPIC HETEROMODULUS MATERIAL

N. H. ISABEKIAN

S u m m a r y

The two following problems for axisymmetrically loaded shells of revolution, made from orthotropic heteromodulus material, are solved:

1) the problem for a semi-infinite circular cylinder under external pressure and loaded on the shell butt end by uniformly distributed bending moments and shearing forces;

2) the problem for a truncated conical shell under tangential compressive force and internal pressure.

Numerical examples are presented.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Лурье А. И. Статика тонкостенных упругих оболочек. Гостехиздат, 1947.
2. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных оболочек. Физматгиз, М., 1961.
3. Антропова Н. Н., Гольденвейзер А. Л. Погрешности построения основного напряженного состояния и простого краевого эффекта в теории оболочек. Изв. АН СССР, МТТ, 1971, 5.
4. Саркисян Н. Е. Анизотропия статической и циклической деформативности стеклопластиков типа СВАН. Изв. АН Арм.ССР, Механика, т. XXIV, № 3, 1971.
5. Исабекян Н. Г. К теории осесимметричных ортотропных разномодульных оболочек. Изв. АН Арм.ССР, Механика, т. XXVI, № 4, 1973.