ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXVI, № 6, 1973 Механика

Л. А. МОВСИСЯН, Д. В. ПЕШТМАЛДЖЯН

ОБ УРАВНЕНИЯХ УСТОЙЧИВОСТИ И КОЛЕБАНИЙ АНИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН

Уравнения устойчивости и колебаний обычно выводятся в предположении, что начальное напряженное состояние плоское. Насколько нам известно, только в [1] выведены указанные уравнения для изотропной пластинки с учетом начального изгибного состояния.

В настоящей работе из общих уравнений нелинейной теории упругости [2] получены уравнения устойчивости и колебаний с учетом начального как плоского, так и изгибного состояний пластинки из анизотропного материала. При выводе уравнений, как и в [1], учтено также и влияние поперечных сдвигов.

Помимо случаев, когда неучет начального изгибного состояния может привести к значительным погрешностям, существует множество задач колебаний и устойчивости, рассмотрение которых невозможно без учета этого состояния. К их числу относятся задачи, приведенные в настоящей статье. Первая из рассмотренных задач для случая изотропного материала приведена в работе [3], а две другие, по-видимому, рассматриваются впервые.

1. Рассмотрим пластинку толщиной h из анизотропного материала, отнесенную к декартовой системе координат. Координатная плоскость xy совпадает со срединной плоскостью пластинки, а координата z направлена по нормали к ней. Предполагается, что материал пластинки имеет лишь одну плоскость упругой симметрии, параллельную срединной плоскости пластинки.

При выводе основной системы уравнений будем исходить из общих уравнений нелинейной теории упругости [2] с учетом возможных упрощений, принятых в [2], без дополнительных ссылок на них.

Уравнения равновесия дифференциального элемента имеют вид [2]

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(1+e_{xx})\sigma_{xx}+\left(\frac{1}{2}e_{xy}-\omega_z\right)\sigma_{xy}+\left(\frac{1}{2}e_{xz}+\omega_y\right)\sigma_{xz}\right]+$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[(1+e_{xx})\sigma_{xy}+\left(\frac{1}{2}e_{xy}-\omega_z\right)\sigma_{yy}+\left(\frac{1}{2}e_{xz}+\omega_y\right)\sigma_{yz}\right]+$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left[(1+e_{xx})\sigma_{xz}+\left(\frac{1}{2}e_{xy}-\omega_z\right)\sigma_{yz}+\left(\frac{1}{2}e_{xz}+\omega_y\right)\sigma_{zz}\right]+F_x=0 \tag{1.1}$$

Два других уравнения могут быть получены циклической перестановкой индексов (xyz).

Рассматриваемую задачу сводим к двумерной с помощью предположения, что перемещения u_x и u_y — линейные функции z, а u_z — постоянны по толщине пластинки [4], то есть

$$\begin{aligned} u_x &= u(x, y) + z\varphi(x, y) \\ u_y &= v(x, y) + z\psi(x, y) \\ u_z &= w(x, y) \end{aligned} \qquad (1.2)$$

где $u(x, y)$, $v(x, y)$, $w(x, y)$ — перемещения точек срединной поверхности, а $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ характеризуют изменения наклона нормали к срединной поверхности.

В силу (1.2) для деформаций будем иметь

$$\begin{aligned} e_{ij} &= e^0_{ij} + ze^1_{ij} \\ \omega_{ij} &= \omega^0_{ij} + z\omega^1_{ij} \end{aligned} \qquad (i, j = x, y) \qquad (1.3)$$

где

$$e^0_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e^0_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad e^0_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$e^0_{xz} = \varphi + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad e^0_{yz} = \psi + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \omega^0_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \psi\right)$$

$$\omega^0_y = \frac{1}{2}\left(\varphi - \frac{\partial w}{\partial x}\right), \quad \omega^0_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$e^1_{xx} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad e^1_{yy} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad e^1_{xy} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$e^1_{xz} = e^1_{yz} = 0, \quad \omega^1_x = \omega^1_y = 0, \quad \omega^1_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) \qquad (1.4)$$

Умножаем уравнения (1.1) на dz и, кроме того, первые два уравнения (1.1) на zdz. Интегрируя полученные пять уравнений от $-\frac{h}{2}$ до $+\frac{h}{2}$, в силу (1.3) и следующих обозначений:

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx}\, dz = T_{xx}, \ldots \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xz} dz = N_x, \ldots \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\sigma_{xx} dz = M_{xx}, \ldots \qquad (1.5)$$

где [5]

$$\begin{aligned} &\sigma_{xx} = B_{11}e_{xx} + B_{12}e_{yy} + B_{16}e_{xy}, \quad \sigma_{yy} = B_{12}e_{xx} + B_{22}e_{yy} + B_{26}e_{xy} \\ &\sigma_{xy} = B_{66}e_{xy} + B_{16}e_{xx} + B_{26}e_{yy}, \quad \sigma_{xz} = B_{55}e_{xz}, \quad \sigma_{yz} = B_{44}e_{yz} \end{aligned} \qquad (1.6)$$

получим систему уравнений в усилиях и моментах

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big|(1+e_{xx}^0)\,T_{xx}+e_{xx}^1M_{xx}+\Big(\frac{1}{2}\,e_{xy}^0-\omega_z^0\Big)\,T_{xy}+\Big(\frac{1}{2}\,e_{xy}^1-\omega_z^1\Big)\,M_{xy}+$$

$$+\Big(\frac{1}{2}\,e_{xz}^0+\omega_y^0\Big)N_x\Big|+\frac{\partial}{\partial y}\Big|(1+e_{xx}^0)\,T_{xy}+e_{xx}^1M_{xy}+$$

$$+\Big(\frac{1}{2}\,e_{xy}^0-\omega_z^0\Big)\,T_{yy}+\Big(\frac{1}{2}\,e_{xy}^1-\omega_z^1\Big)\,M_{yy}+$$

$$+\Big(\frac{1}{2}\,e_{xz}^0+\omega_y^0\Big)N_y\Big|+(X_1+X_2)+F_x=0 \tag{1.7}$$

Приводится лишь первое уравнение системы. Аналогично могут быть получены остальные 4 уравнения.

Если нагрузка, действующая на пластинку, равна критической, то для нее возможны два бесконечно близких положения равновесия. Величины, характеризующие положение, которое теряет устойчивость, обозначим индексом (1); тогда величины, соответствующие другому положению равновесия, будут

$$\begin{aligned} &u=u^{(1)}+\alpha u^{(2)},\ \ldots\ e_{ij}^0=e_{ij}^{0(1)}+\alpha e_{ij}^{0(2)},\ \ldots \\ &T_{ij}=T_{ij}^{(1)}+\alpha T_{ij}^{(2)},\ \ldots, \end{aligned} \tag{1.8}$$

где α — бесконечно малая величина, поэтому членами, содержащими ее в квадрате, пренебрегаем.

Подставив (1.8) в систему (1.7) и следуя последовательности преобразований, проведенных в [2], получим основную систему уравнений устойчивости

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big|\,T_{xx}^{(2)}+e_{xx}^{0(2)}T_{xx}^{(1)}+e_{xx}^{1(2)}M_{xx}^{(1)}+\Big(\frac{1}{2}\,e_{xy}^{0(2)}-\omega_z^{0(2)}\Big)\,T_{xy}^{(1)}+$$

$$+\Big(\frac{1}{2}\,e_{xy}^{1(2)}-\omega_z^{1(2)}\Big)M_{xy}^{(1)}+\Big(\frac{1}{2}\,e_{xz}^{0(2)}+\omega_y^{0(2)}\Big)N_x^{(1)}\Big|+\frac{\partial}{\partial y}\Big|\,T_{xy}^{(2)}+$$

$$+e_{xx}^{0(2)}\,T_{xy}^{(1)}+e_{xx}^{1(2)}\,M_{xy}^{(1)}+\Big(\frac{1}{2}\,e_{xy}^{0(2)}-\omega_z^{0(2)}\Big)\,T_{yy}^{(1)}+$$

$$+\Big(\frac{1}{2}\,e_{xy}^{1(2)}-\omega_z^{1(2)}\Big)M_{yy}^{(1)}+\Big(\frac{1}{2}\,e_{xz}^{0(2)}+\omega_y^{0(2)}\Big)N_y^{(1)}\Big|=0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big|\,T_{yy}^{(2)}+e_{yy}^{0(2)}T_{yy}^{(1)}+e_{yy}^{1(2)}M_{yy}^{(1)}+\Big(\frac{1}{2}\,e_{yx}^{0(2)}-\omega_z^{0(2)}\Big)\,T_{xy}^{(1)}+$$

$$+\Big(\frac{1}{2}\,e_{yx}^{1(2)}-\omega_z^{1(2)}\Big)M_{xy}^{(1)}+\Big(\frac{1}{2}\,e_{yz}^{0(2)}+\omega_x^{0(2)}\Big)N_y^{(1)}\Big|+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\Big|\,T_{xy}^{(2)}+e_{yy}^{0(2)}T_{xy}^{(1)}+e_{yy}^{1(2)}M_{xy}^{(1)}+\Big(\frac{1}{2}\,e_{yx}^{0(2)}-\omega_z^{0(2)}\Big)\,T_{xx}^{(1)}+$$

$$+\left(\frac{1}{2}e_{yz}^{1(2)}-\omega_x^{1(2)}\right)M_{xx}^{(1)}+\left(\frac{1}{2}e_{yz}^{0(2)}-\omega_x^{1(2)}\right)M_{zz}^{(1)}+$$

$$+\left(\frac{1}{2}e_{yz}^{0(2)}+\omega_z^{0(2)}\right)N_x^{(1)}=0 \qquad (1.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{1}{2}e_{xz}^{0(2)}-\omega_y^{0(2)}\right)T_{xx}^{(1)}+\left(\frac{1}{2}e_{yz}^{0(2)}+\omega_x^{0(2)}\right)T_{xy}^{(1)}+N_x^{(2)}\right]+$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{1}{2}e_{xz}^{0(2)}-\omega_y^{0(2)}\right)T_{xy}^{(1)}+\left(\frac{1}{2}e_{yz}^{0(2)}+\omega_x^{0(2)}\right)T_{yy}^{0(1)}+N_y^{(2)}\right]+$$

$$+\left(\frac{1}{2}e_{xz}^{0(2)}-\omega_y^{0(2)}\right)(X_1-X_2)+\left(\frac{1}{2}e_{yz}^{0(2)}+\omega_x^{0(2)}\right)(Y_1-Y_2)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[M_{xx}^{(2)}+e_{xx}^{0(2)}M_{xx}^{(1)}+\left(\frac{1}{2}e_{xy}^{0(2)}-\omega_z^{0(2)}\right)M_{xy}^{(1)}\right]+$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[M_{xy}^{(2)}+e_{xx}^{0(2)}M_{xy}^{(1)}+\left(\frac{1}{2}e_{xy}^{0(2)}-\omega_z^{0(2)}\right)M_{yy}^{(1)}\right]-$$

$$-e_{xx}^{0(2)}N_x^{(1)}-N_x^{(2)}-\left(\frac{1}{2}e_{xy}^{0(2)}-\omega_z^{0(2)}\right)N_y^{(1)}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[M_{yy}^{(2)}+e_{yy}^{0(2)}M_{yy}^{(1)}+\left(\frac{1}{2}e_{yz}^{0(2)}-\omega_z^{0(2)}\right)M_{xy}^{(1)}\right]+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\left[M_{xy}^{(2)}+e_{yy}^{0(2)}M_{xy}^{(1)}+\left(\frac{1}{2}e_{yx}^{0(2)}-\omega_z^{0(2)}\right)M_{xx}^{(1)}\right]-$$

$$-e_{yy}^{0(2)}N_y^{(1)}-N_y^{(2)}-\left(\frac{1}{2}e_{yz}^{0(2)}-\omega_z^{0(2)}\right)N_x^{(1)}=0$$

Система (1.9), с учетом (1.4)—(1.6), представляет пять уравнений относительно пяти неизвестных функций $u(x, y)$, $v(x, y)$, $w(x, y)$, $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$.

Заметим, что здесь, как и в теории оболочек, плоская задача и задача изгиба не разделяются.

Усилия и моменты начального состояния, являющиеся коэффициентами в уравнениях системы (1.9), должны быть определены из линейных уравнений

$$\frac{\partial T_{xx}^{(1)}}{\partial x}+\frac{\partial T_{xy}^{(1)}}{\partial y}+(X_1-X_2)+F_1=0 \qquad (x\ y)$$

$$\frac{\partial N_1^{(1)}}{\partial x}+\frac{\partial N_2^{(1)}}{\partial y}+(Z_1-Z_2)+F_3=0 \qquad (1.10)$$

$$\frac{\partial M_{xx}^{(1)}}{\partial x}+\frac{\partial M_{xy}^{(1)}}{\partial y}+\frac{h}{2}(X_1+X_2)-N_x^{(1)}+F_4=0 \qquad (x\ y)$$

Система (1.9) может быть рассмотрена так же, как уравнения движения пластинки с учетом начального напряженного состояния, если в правые части уравнений (1.9) подставить соответственно

$$mh\frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial t^2},\quad mh\frac{\partial^2 v^{(2)}}{\partial t^2},\quad mh\frac{\partial^2 w^{(2)}}{\partial t^2},\quad \frac{mh^3}{12}\frac{\partial^2 \varphi^{(2)}}{\partial t^2}\ \text{и}\ \frac{mh^3}{12}\frac{\partial^2 \psi^{(2)}}{\partial t^2}$$

Рассмотрим несколько частных задач.

2. Прямоугольная пластинка $(a\times b)$ из ортотропного материала $(B_{16}=B_{26}=0)$, свободно опертая по краям, находится под действием направленных по оси x сдвигающих усилий интенсивности S. Силы приложены на внешних плоскостях пластинки и имеют противоположные направления на верхней и нижней плоскостях.

Начальное напряженное состояние, на основании (1.10), характеризуется одним усилием $N^{(1)}=-Sh$, в силу чего из (1.9) с учетом (1.4—(1.6) получим следующую систему уравнений устойчивости в перемещениях*:

$$C_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+C_{66}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+(C_{12}+C_{66})\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+Sh\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0$$

$$(C_{66}+C_{12})\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C_{66}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+C_{22}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+Sh\frac{\partial\psi}{\partial x}=0$$

$$C_{55}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+C_{44}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+C_{55}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+C_{44}\frac{\partial\psi}{\partial y}=0 \tag{2.1}$$

$$Sh\frac{\partial u}{\partial x}+C_{55}\frac{\partial w}{\partial x}+C_{55}\varphi-D_{11}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-D_{66}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-(D_{12}+D_{66})\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}=0$$

$$Sh\frac{\partial v}{\partial x}+C_{44}\frac{\partial w}{\partial y}+C_{44}\psi-(D_{66}+D_{12})\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}-D_{66}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-D_{22}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0$$

Решение (2.1) ищем в виде

$$u=U\sin\frac{k\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y$$

$$v=V\cos\frac{k\pi}{a}x\cos\frac{n\pi}{b}y$$

$$w=W\sin\frac{k\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y \tag{2.2}$$

$$\varphi=\Phi\cos\frac{k\pi}{a}x\sin\frac{n\pi}{b}y$$

$$\psi=\Psi\sin\frac{k\pi}{a}x\cos\frac{n\pi}{b}y$$

---

* Здесь и в дальнейшем при рассмотрении второго напряженного состояния индексы (2) опускаются.

Из условия существования решения системы уравнений (2.1) получаем уравнение для определения величины критической силы

$$\det \| a_{ij} \| = 0 \tag{2.3}$$

где

$$a_{11} = -C_{11}\bar{k}^2 - C_{66}\bar{n}^2, \quad a_{12} = a_{21} = (C_{12} + C_{66})\,\bar{k}\,\bar{n}$$

$$a_{13} = a_{15} = a_{23} = a_{24} = a_{31} = a_{32} = a_{42} = a_{51} = 0$$

$$a_{14} = a_{41} = -Sh\bar{k}$$

$$a_{22} = -C_{66}\bar{k}^2 - C_{22}\bar{n}^2, \quad a_{25} = a_{52} = Sh\bar{k}$$

$$a_{33} = -C_{55}\bar{k}^2 - C_{44}\bar{n}^2, \quad a_{34} = a_{43} = -C_{55}\bar{k} \tag{2.4}$$

$$a_{35} = a_{53} = -C_{44}\bar{n}, \quad a_{44} = -(C_{55} + D_{11}\bar{k}^2 + D_{66}\bar{n}^2)$$

$$a_{45} = a_{54} = (D_{12} + D_{66})\,\bar{k}\bar{n}, \quad a_{55} = -(C_{44} + D_{66}\bar{k}^2 + D_{22}\bar{n}^2)$$

$$\bar{k} = \frac{k\pi}{a}, \quad \bar{n} = \frac{n\pi}{b}$$

В общем виде ввиду громоздкости уравнение (2.3) не приводим.

В частном случае, когда не учитывается влияние сдвига $\left(\varphi = -\frac{\partial w}{\partial x}, \psi = -\frac{\partial w}{\partial y}\right)$, для критического усилия получим

$$S^2h^2 = \frac{G}{C_{66}\bar{k}^6 + (C_{22} + C_{11} - 2C_{12} - 2C_{66})\bar{k}^4\bar{n}^2 + C_{66}\bar{k}^2\bar{n}^4} \tag{2.5}$$

где

$$G = [D_{11}\bar{k}^4 + 2(2D_{66} + D_{12})\bar{k}^2\bar{n}^2 + D_{22}\bar{n}^4][C_{11}C_{66}\bar{k}^4 + (C_{11}C_{22} - C_{12}^2 -$$
$$- 2C_{12}C_{66})\bar{k}^2\bar{n}^2 + C_{22}C_{66}\bar{n}^4]$$

Для изотропного материала из (2.5) получим выражение

$$S = \frac{2\sqrt{3}\,\pi D}{bh^2}\left| n\left(\frac{kb}{na} + \frac{an}{bk}\right)\right| \tag{2.6}$$

совпадающее с результатом работы [3].

3. Рассмотрим свободные колебания шарнирно-опертной балки, когда в сечении $x=a$ действует сосредоточенный момент M_0.

На основании (1.10) начальное напряженное состояние характеризуется следующими моментом и усилием:

$$M_x^{(1)} = \begin{cases} -\dfrac{M_0}{l}x & 0 \leqslant x \leqslant a \\ M_0\left(1 - \dfrac{x}{l}\right) & a \leqslant x \leqslant l \end{cases} \tag{3.1}$$

$$N_x^{(1)} = -\frac{M_0}{l} \quad (l - \text{длина балки})$$

Уравнения возмущенного движения в перемещениях, в силу (1.4)—(1.6), (1.10), будут

$$C_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(M_x^{(1)}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) - N_1^{(1)}\frac{\partial \varphi}{\partial x} - mh\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

$$C_{55}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + C_{55}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - mh\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \tag{3.2}$$

$$D_{11}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(M_x^{(1)}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + N_1^{(1)}\frac{\partial u}{\partial x} - C_{55}\left(\varphi + \frac{\partial w}{\partial x}\right) - \frac{h^2}{12}m\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

Ищем решение (3.2), с учетом (3.1), в виде

$$w = \sin\omega t\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\bar{k}x$$

$$u = \sin\omega t\sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin\bar{k}x \tag{3.3}$$

$$\varphi = \sin\omega t\sum_{k=0}^{\infty} b_k \cos\bar{k}x$$

Представляем $M_x^{(1)}$ в виде ряда

$$M_x^{(1)} = \sum_{q=1}^{\infty} f_q \sin\bar{q}x, \qquad \text{где} \quad f_q = \frac{2M_0}{l\bar{q}}\cos\bar{q}a \tag{3.4}$$

Подставляя (3.3) и (3.4) в (3.2), после некоторых преобразований для определения частот получим следующую бесконечную систему:

$$-C_{11}\bar{k}^2 c_k + \frac{\bar{k}}{2}\left[\sum_{q=1}^{\infty}\bar{q}b_q f_{q+k} + \sum_{q=k+1}^{\infty}\bar{q}b_q f_{q-k} - \sum_{q=1}^{k-1}\bar{q}b_q f_{k-q}\right] +$$

$$+\frac{M_0}{l}\bar{k}b_k + mh\omega^2 c_k = 0$$

$$-C_{55}b_k\bar{k} - C_{55}\bar{k}^2 a_k + mh\omega^2 a_k = 0 \tag{3.5}$$

$$-D_{11}\bar{k}^2 b_k + \frac{M_0}{l}\bar{k}c_k - C_{55}\bar{k}a_k + \frac{h^2}{12}mb_k\omega^2 +$$

$$+\frac{\bar{k}}{2}\left[\sum_{q=1}^{\infty}\bar{q}c_q f_{q+k} - \sum_{q=k+1}^{\infty}\bar{q}c_q f_{q-k} + \sum_{q=1}^{k-1}\bar{q}c_q f_{k-q}\right] = 0$$

Из условия равенства нулю детерминанта этой системы получим уравнение для определения частот.

В случае неучета поперечного сдвига $\left(\varphi = -\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)$ в первом приближении частоты определяются из следующего уравнения:

$$(h\omega)^4 - \left\{\frac{12}{mh}\bar{k}\,(1+\bar{k})\,D_{11} - h\frac{M_0}{lm}\bar{k}^3 - h\bar{k}^3\left(f_{2k} + \frac{1}{2}f_k\right)\right\}(h\omega)^2 -$$

$$-\frac{12D_{11}\bar{k}^4}{m^2}\left(\frac{1}{2}f_k + f_{2k}\right) - \frac{12D_{11}\bar{k}^3}{m^2}\left(\frac{M_0}{l} - C_{11}\right) = 0 \qquad (3.6)$$

4. Рассмотрим свободные колебания шарнирно опертой балки, подвергающейся чистому изгибу. Основную систему получим из (3.2), принимая $N_1^{(1)} = 0$ и $M_x^{(1)} = M_0$, то есть будем иметь

$$C_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + M_0\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = mh\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$C_{55}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + C_{55}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = mh\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \qquad (4.1)$$

$$D_{11}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + M_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - C_{55}\left(\varphi + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = \frac{mh^3}{12}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

Решение ищем в виде

$$u = A\sin\omega t\cos\bar{k}x$$

$$\varphi = B\sin\omega t\cos\bar{k}x \qquad (4.2)$$

$$w = F\sin\omega t\sin\bar{k}x$$

Для определения частот получим уравнение $\det\|a_{ij}\| = 0$, где

$$a_{11} = -C_{11}\bar{k}^2 + mh\omega^2, \qquad a_{12} = a_{21} = 0$$

$$a_{13} = a_{31} = -M_0\bar{k}^2, \qquad a_{22} = -C_{55}\bar{k}^2 + mh\omega^2 \qquad (4.3)$$

$$a_{23} = a_{32} = -C_{55}\bar{k}, \qquad a_{33} = -D_{11}\bar{k}^2 - C_{55} + \frac{mh^3}{12}\omega^2$$

В безразмерных величинах оно имеет вид

$$\frac{\lambda}{12}\Omega^3 - \left(1 + \frac{k^2}{12}\gamma^2 + \frac{k^2}{6}\gamma^2\lambda\right)\Omega^2 + \left(\frac{k^4}{6}\gamma^4 + \frac{k^4}{12}\gamma^4\lambda + k^2\gamma^2 -\right.$$

$$\left. - \delta k^4\gamma^4\lambda\right)\Omega - \left(\frac{1}{12} - \delta\right)k^6\gamma^6 = 0 \qquad (4.4)$$

где

$$\Omega = \frac{mh^2\omega^2}{B_{11}}, \qquad \gamma = \frac{\pi h}{a}, \qquad \lambda = \frac{B_{11}}{B_{55}}, \qquad \delta = \frac{M_0^2}{B_{11}^2 h^4}$$

При рассмотрении случая неучета поперечных сдвигов в (4.4) следует положить $\lambda = 0$, $\varepsilon = 0$. Во всех других случаях $\varepsilon = 1$.

В табл. 1 и 2 приведены значения Ω при $\gamma = 0.3$ для различных δ и λ. Первая строка в каждой клетке соответствует частоте продольных колебаний, вторая — частоте изгибных колебаний, а третья — частоте, связанной с поворотом поперечных сечений.

Таблица 1

$\gamma = 0.3$ $k = 1$

λ / δ	0	2	10	100
0	0.09000 0.00067 —	0.09000 0.00066 6.13434	0.09000 0.00062 1.29838	0.09000 0.00038 0.21051
0.01	0.09074 0.00059 —	0.08992 0.00058 6.13450	0.08927 0.00055 1.29917	0.08246 0.00036 0.21809
0.05	0.09103 0.00027 —	0.08960 0.00026 6.13514	0.08638 0.00026 1.30236	0.05835 0.00021 0.24235

Таблица 2

$\gamma = 0.3$ $k = 3$

λ / δ	0	2	10	100
0	0.81000 0.05100 —	0.81000 0.04576 7.16924	0.81000 0.03186 2.05914	0.81000 0.00705 0.93105
0.01	0.87480 0.04455 —	0.80350 0.04053 7.18098	0.75379 0.02929 2.11792	0.58373 0.00692 1.15745
0.05	0.89966 0.01969 —	0.77860 0.01889 7.22752	0.56982 0.01611 2.31506	0.24159 0.00586 1.50064

Как видно из приведенных таблиц, с увеличением λ (то есть уменьшением сдвиговой жесткости) все указанные частоты, независимо от δ, уменьшаются.

Что же касается влияния учета моментности начального состояния, то, в случае неучета сдвига продольные частоты увеличиваются с увеличением δ, а поперечные — уменьшаются. При учете сдвига с увеличением δ и продольные и поперечные частоты уменьшаются, в то время как частота, соответствующая повороту поперечных сечений, увеличивается.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 28 VI 1973

Լ. Ա. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ, Դ. Վ. ՓԵՇՏՄԱԼՋՅԱՆ

ԱՆԻԶՈՏՐՈՊ ՍԱԼԵՐԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Ոչ գծային առաձգականության տեսության ընդհանուր հավասարումներից ստացված են անիզոտրոպ նյութից պատրաստած սալի կայունության և տատանումների հավասարումները հաշվի առնելով սկզբնական վիճակի ինչպես հարթ, այնպես էլ ծռված վիճակները։ Հավասարումները դուրս բերելիս հաշվի է առնված նաև ընդլայնական սահքերի ազդեցությունը։ Բացի այն դեպքերից, երբ նախնական մոմենտային վիճակի հաշվի չառնելը կարող է բերել էական սխալների, գոյություն ունեն կայունության և տատանումների բազմաթիվ խնդիրներ, որոնց դիտարկումն անհնար է առանց այդ վիճակի հաշվառման։ Դրանց թվին են պատկանում, օրինակ, աշխատանքում բերված հետևյալ խնդիրները՝ սալի կայունությունը, երբ սալի արտաքին հարթությունների վրա ազդում են հակադիր ուղղված շոշափող ճիգեր և հեծանի ազատ տատանումները, երբ այն բեռնավորված է կենտրոնացված մոմենտով և ենթարկված է մաքուր ծռման։

ON THE EQUATIONS OF STABILITY AND VIBRATION OF ANISOTROPIC PLATES

L. A. MOVSISIAN, D. V. PESHTMALDJIAN

S u m m a r y

The equations of stability and vibration are derived from the general equations of non-linear elasticity, taking into account both plane and bending initial states of a plate made from anisotropic material. In deriving the equations, the effect of transversal displacements is taken into account as well.

Apart from the cases where the disregard of initial bending state may result in significant errors, there is a number of vibration and stability problems which cannot be considered, neglecting this state. Among these are the problems, dealt with in the present study, on stability of a plate under the action of oppositely directed shear forces applied to the external surfaces of the plate and on free vibration of a beam loaded by a pointed moment as well as on vibration of a beam under the action of pure bending.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Herrmann G., Armenakas A. E.* Vibrations and Stability of Plates Under Initial Stress. Proc. ASCE, J. of Engineering Mechanics Division, v. 86, 1966.
2. *Новожилов В. В.* Основы нелинейной теории упругости. Гостехиздат, Л.-М., 1948.
3. *Flemming J. F., Herrmann G., Mooney I.* Bucling of Structural Elements Subject to Surface Shear. J. of Applied Mechanics, v. 32, 1, 1965,
4. *Naghdi P.* On the Theory of Thin Shells. Quarterly of Mathematics, 14, No. 4, 1957.
5. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. Гостехиздат, М., 1957.