

Գ. Գ. ՕԳԱՆՅԱՆ

РАСПРОСТРАНЕНИЕ СЛАБЫХ ВОЛН В ХИМИЧЕСКИ  
 АКТИВНОЙ СРЕДЕ В НЕЛИНЕЙНОЙ ПОСТАНОВКЕ

Рассматривается нелинейная задача определения параметров движения реагирующей бинарной вязкой смеси при наличии в ней процессов диффузии и теплопроводности. При отсутствии вязкости, теплопроводности и диффузии нелинейные уравнения в окрестности волны и их решения для всех видов процессов получены в [1].

В настоящей работе показано, что учет указанных эффектов видоизменяет нелинейное уравнение в окрестности волны для квазизамороженного процесса, а также вносит существенные изменения в уравнение для случая специальных сред с близкими значениями замороженной и равновесной скоростей звука, суть которых — появление слагаемого с третьей производной, приводящего, как известно [2], к дисперсии волны. Для квазиравновесного процесса находится решение полученного уравнения для задачи о движении поршня с кусочно-постоянной во времени скоростью для всего диапазона независимых переменных.

1. Предположим, что в потоке химически реагирующей бинарной газовой смеси происходит только одна реакция. Уравнения движения смеси возьмем в виде [3, 4]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \tag{1.1}$$

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ 2\lambda_1 \frac{\partial v}{\partial x} + \left( \lambda_2 - \frac{2}{3} \lambda_1 \right) \frac{\partial v}{\partial x} \right] \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned} \rho T \left( \frac{\partial s}{\partial t} + v \frac{\partial s}{\partial x} \right) + Q \left( \frac{\partial q}{\partial t} + v \frac{\partial q}{\partial x} \right) = & 2\lambda_1 \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \\ & + \left( \lambda_2 - \frac{2}{3} \lambda_1 \right) \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \\ & + \left[ k_T \left( \frac{\partial \mu}{\partial c} \right)_{p, T} - T \left( \frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_{p, c} \right] \frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho D \left( \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{k_T}{T} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{k_p}{p} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \right] + \\ & + \rho D \left( \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{k_T}{T} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{k_p}{p} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left[ k_T \left( \frac{\partial \mu}{\partial c} \right)_{p, T} - T \left( \frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_{p, c} + \mu \right] \tag{1.3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho \mu \left( \frac{\partial c}{\partial t} + v \frac{\partial c}{\partial x} \right) - Q \left( \frac{\partial q}{\partial t} + v \frac{\partial q}{\partial x} \right) = \\ = - \mu \frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho D \left( \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{k_T}{T} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{k_p}{p} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \right] \tag{1.4} \end{aligned}$$

$$q = \frac{\partial q}{\partial t} + v \frac{\partial q}{\partial x}, \quad Q = \nu \mu \quad (1.5)$$

Здесь  $t$  — время,  $x$  — расстояние от плоскости симметрии,  $\rho$  — плотность,  $v$  — скорость,  $p$  — давление,  $T$  — температура,  $S$  — энтропия,  $Q$  и  $q$  — сродство и скорость химической реакции,  $c$  — концентрация,  $\mu$  — химический потенциал,  $\nu_1$  и  $\nu_2$  — первый и второй коэффициенты вязкости,  $D$ ,  $k_T D$ ,  $k_p D$  — коэффициенты диффузии, термодиффузии и бародиффузии, величина  $\nu M$  пропорциональна стехиометрическому коэффициенту, с которым входит первый компонент в уравнение химической реакции,  $M$  — молекулярная масса первого компонента,  $q$  — полнота химической реакции.

Для замыкания системы уравнений обратимся к соотношению Гиббса

$$T ds = de + p dV - \nu dc$$

где  $e$  — удельная внутренняя энергия,  $V = 1/\rho$  — удельный объем.

Первые частные производные

$$\mu = \frac{Q}{\nu} = e_1 = \left( \frac{\partial e}{\partial c} \right)_{s, V}, \quad -p = e_2 = \left( \frac{\partial e}{\partial V} \right)_{s, c}, \quad T = e_3 = \left( \frac{\partial e}{\partial s} \right)_{V, c}$$

представляющие собой уравнения состояния среды, служат недостающими соотношениями для замыкания системы. В состоянии термодинамического равновесия [3]  $Q - q = 0$ . Допустим [1], что вблизи этого состояния существует аналитическая зависимость  $q$  от  $Q$

$$q = -H_1(\rho, c) Q + H_2(\rho, c) Q^2 + \dots \quad (1.6)$$

Здесь коэффициент  $H_1(\rho, c) > 0$ .

Предположим, что разность значений всех параметров возмущенной и невозмущенной газовой смеси мала. Невозмущенные величины обозначим нулевым индексом.

$$\rho = \rho_0(1 + \varepsilon\rho'), \quad p = p_0(1 + \varepsilon p'), \quad q = q_0(1 + \varepsilon q'), \quad c = c_0(1 + \varepsilon c')$$

$$T = T_0(1 + \varepsilon T'), \quad s = s_0(1 + \varepsilon s'), \quad Q = \varepsilon \frac{p_0}{\rho_0 q_0} Q' \quad (1.7)$$

Для скоростей химической реакции примем [1]

$$\dot{q} = \varepsilon \frac{q_0}{\tau} \dot{q}' \quad (1.8)$$

где  $\tau$  — время протекания химической реакции.

Введем систему координат, движущуюся со скоростью звука (смотри далее), и пусть  $L$  — характерная длина в этой системе. Считаем, что рассматриваемое течение релаксирующей смеси есть короткая волна, то есть ширина области, где сосредоточены возмущения, мала по сравнению с расстояниями, на которые распространяется волна. Тогда

$$t = \frac{L}{\Delta \cdot a_0} t', \quad x = a_0 t + Lr \quad (1.9)$$

В выражениях (1.7)–(1.9) величины  $\epsilon$  и  $\Delta$  — малые параметры.

При выводе последующих уравнений во всех случаях будем удерживать лишь главные члены.

2. *Квазиравновесный процесс.* Аналогично [1], принимая за независимые переменные плотность  $\rho$ , давление  $p$ , сродство  $Q$ , запишем приращение удельной энтропии  $s$  в виде

$$ds = \left( \frac{\partial s}{\partial p} \right)_{\rho, Q} \left[ dp - a_e^2 d\rho - \left( \frac{\partial p}{\partial Q} \right)_{\rho, s} dQ \right], \quad a_e = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\rho, Q}^{1/2} \quad (2.1)$$

Здесь  $a_e$  — равновесная скорость звука.

Приращение температуры представим в виде

$$dT = \left( \frac{\partial T}{\partial p} \right)_{\rho, Q} \left[ dp - \frac{1}{\lambda_e} a_e^2 d\rho - \left( \frac{\partial p}{\partial Q} \right)_{\rho, T} dQ \right], \quad \lambda_e = \frac{c_{p, Q}}{c_{v, Q}} \quad (2.2)$$

где  $c_{p, Q}$  — удельная теплоемкость при постоянном давлении и сродстве,  $c_{v, Q}$  — удельная теплоемкость при постоянном объеме и сродстве.

Из (2.1) следует

$$\frac{\partial p}{\partial t} - a_e^2 \frac{d\rho}{dt} = \frac{ds}{dt} \left( \frac{\partial s}{\partial p} \right)_{\rho, Q}^{-1} + \left( \frac{\partial p}{\partial Q} \right)_{\rho, s} \frac{dQ}{dt}$$

Комбинируя последнее соотношение с уравнениями (1.1)–(1.4), можно получить

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (v + a_e) \frac{\partial p}{\partial x} + \rho a_e \left[ \frac{\partial v}{\partial t} + (v + a_e) \frac{\partial v}{\partial x} \right] = L_{1e} + L_{2e} + L_{3e} + L_{4e} \quad (2.3)$$

где

$$L_{1e} = a_e \frac{\partial}{\partial x} \left[ 2\lambda_1 \frac{\partial v}{\partial x} + \left( \lambda_2 - \frac{2}{3} \lambda_1 \right) \frac{\partial v}{\partial x} \right]$$

$$L_{2e} = \left( \frac{\partial p}{\partial s} \right)_{\rho, Q} \frac{1}{\rho T} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + 2\lambda_1 \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \lambda_2 - \frac{2}{3} \lambda_1 \right) \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\}$$

$$L_{3e} = \left( \frac{\partial p}{\partial Q} \right)_{\rho, s} \left( \frac{\partial Q}{\partial t} + v \frac{\partial Q}{\partial x} \right) - \frac{Q}{\rho T} \left( \frac{\partial p}{\partial s} \right)_{\rho, Q} \left( \frac{\partial q}{\partial t} + v \frac{\partial q}{\partial x} \right)$$

$$L_{4e} = \left[ k_T \left( \frac{\partial \mu}{\partial c} \right)_{\rho, T} - T \left( \frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_{\rho, c} \right] \frac{1}{\rho T} \left( \frac{\partial p}{\partial s} \right)_{\rho, Q} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho D \left( \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{k_T}{T} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{k_p}{p} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \right] + \frac{D}{T} \left( \frac{\partial p}{\partial s} \right)_{\rho, Q} \left( \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{k_T}{T} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{k_p}{p} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \times \\ \times \frac{\partial}{\partial x} \left[ k_T \left( \frac{\partial \mu}{\partial c} \right)_{\rho, T} - T \left( \frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_{\rho, c} + \rho \right]$$

Пусть  $a_0 = a_{c0}$ , то есть рассматриваемая короткая волна с узкой возмущенной зоной движется с равновесной скоростью звука в покоящейся среде. Примем

$$a_r = a_{c0} (1 - \varepsilon a_r') \quad (2.4)$$

В дальнейшем штрихи над безразмерными переменными опускаем.

Линеаризация посредством (1.7) уравнений (1.1) и (1.2) и интегрирование дают

$$p = v = -\frac{p_0}{\gamma_0 a_{c0}^2} p \quad (2.5)$$

Разлагая  $p = p(r, Q, s)$  и ряд Тейлора вблизи положения равновесия и пользуясь соотношениями (1.7), для отклонения давления от равновесного значения получим

$$p_0 p = \left( \frac{\partial p}{\partial Q} \right)_{r,s} \frac{p_0}{\gamma_0 a_{c0}^2} Q + \gamma_0 a_{c0}^2 + \left( \frac{\partial p}{\partial s_0} \right)_{r,Q} s_0 s \quad (2.6)$$

Чтобы приведенное соотношение совпало с (2.5), необходимо потребовать

$$Q = 0, \quad s = 0 \quad (2.7)$$

Соотношения (2.5) и (2.7) показывают, что в рассматриваемом приближении сжатие газа происходит обратимо при постоянном значении средства химической реакции.

Подставляя в (1.5) соотношения (1.7) и приравнявая (1.8), находим

$$\frac{\partial q}{\partial r} = -N_r q, \quad N_r = \frac{L}{a_{c0}^2} \quad (2.8)$$

Сравнение определений (1.6) и (1.8) после линеаризации приводит к

$$q = -H_{10} Q, \quad H_{10} = H_1 \frac{p_0^2}{\gamma_0 q_0^2} \quad (2.9)$$

Здесь  $H_{10}$  — безразмерная функция порядка единицы.

Подстановка (2.9) в (2.8) дает

$$\frac{\partial q}{\partial r} = N_r H_{10} Q$$

Учитывая последнее соотношение, из уравнения (1.4), удержав главные члены, находим

$$\frac{\partial c}{\partial r} = \frac{\gamma_0}{\gamma_0 c_0} N_r H_{10} Q \quad (2.10)$$

Из (2.9) и (2.8) видно, что требование (2.7) приводит к условию

$$N_r \gg 1 \quad \text{или} \quad \frac{L}{a_{c0}} \gg 1$$

то есть в квазиравновесном процессе распространения возмущений время протекания химической реакции меньше макроскопического времени  $L/a_0$ .

Учитывая требование (2.7), для отклонения концентрации  $c = c(p, Q, s)$  от равновесного значения получим

$$c = \left( \frac{\partial c}{\partial p_0} \right)_{p, Q, s} \frac{p_0}{c_0} p \quad (2.11)$$

С учетом (2.7) выражение (2.2) после линеаризации запишется в виде

$$T_0 dT = \left( \frac{\partial T}{\partial p_0} \right)_{p, Q} \left[ p_0 dp - \frac{1}{\alpha_s} p_0 a_{e0}^2 dv \right] \quad (2.12)$$

Приращение равновесной скорости звука [1]

$$a_s = \left( \frac{\partial a_s}{\partial p_0} \right)_{p, Q, s} \frac{p_0}{a_{e0}} p = (m_{e0} - 1) p, \quad m_{e0} = \frac{1}{2\alpha_s a_{e0}^2} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial v'^2} \right)_{p, Q, s} \quad (2.13)$$

Выражая формулы (2.10)–(2.13) с помощью (2.5) через скорость частиц газа и подставляя в линеаризованное посредством (1.7) уравнение (2.3), получим

$$\begin{aligned} 2\epsilon m_{e0} v \frac{\partial v}{\partial r} + 2\Delta \frac{\partial v}{\partial t} = & \left\{ \frac{1}{\text{Re}} + \frac{1}{\text{Pe}} \left( \frac{\partial p}{\partial s_0} \right)_{p, Q} \frac{c_{e0} Q}{T_0} \left( 1 - \frac{1}{\alpha_s} \right) \left( \frac{\partial T}{\partial p_0} \right)_{p, Q} - \right. \\ & - \frac{1}{N_r H_{10}} \left( \frac{\partial c}{\partial p_0} \right)_{p, Q} \left( \frac{\partial p}{\partial Q_0} \right)_{p, s} \frac{p_0}{\alpha_s a_{e0}^2 q_0^2} + \frac{D}{L} \frac{B_{e0}}{a_{e0}^2} \left( \frac{\partial c}{\partial p_0} \right)_{p, Q} + \\ & \left. + \frac{k_T D}{L a_{e0}} \frac{B_{e0}}{T_0} \left( 1 - \frac{1}{\alpha_s} \right) \left( \frac{\partial T}{\partial p_0} \right)_{p, Q} + \frac{k_p D}{L} \frac{B_{e0}}{p_0 a_{e0}} \right\} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \quad (2.14) \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} B_{e0} = & \left( \frac{\partial p}{\partial s_0} \right)_{p, Q} \left[ \frac{k_T}{T_0} \left( \frac{\partial u}{\partial c_0} \right)_{p, r} - \left( \frac{\partial u}{\partial T_0} \right)_{p, c} \right], \quad \text{Pe} = \frac{p_0 a_{e0} L c_{p, Q}}{k}, \\ \frac{1}{\text{Re}} = & \frac{4}{3} \frac{1}{\text{Re}_1} + \frac{1}{\text{Re}_2}, \quad \text{Re}_1 = \frac{p_0 a_{e0} L}{\lambda_1}, \quad \text{Re}_2 = \frac{p_0 a_{e0} L}{\lambda_2} \end{aligned}$$

При  $\lambda_1 = \lambda_2 = k = D = 0$  уравнение (2.14) совпадает с уравнением, полученным в [1].

Напомним, что в (2.14) фигурируют безразмерные переменные  $r$  и  $t'$  и безразмерная скорость  $v'$ . Уравнение (2.14) удобно при решении задачи о начальных условиях. При формулировке граничной задачи удобнее перейти от  $r$  и  $t'$  к размерным переменным  $x$ ,  $\tau = t' - x/a_0$  и вернуться к размерной скорости  $u$ .

Можно показать по (1.9), что

$$\frac{\partial v'}{\partial t'} = \frac{L}{\Delta} \frac{\partial v'}{\partial x}, \quad \left( \frac{\partial v'}{\partial r} \right)_{t'} = \left( \frac{\partial v'}{\partial r} \right)_x$$

С помощью этих формул перехода и последующих преобразований уравнение (2.14) приводится к окончательному виду

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \alpha v \frac{\partial v}{\partial \tau} = \delta \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} \quad (2.15)$$

Здесь  $\alpha = m_0/a_{c0}^2$ ,  $\delta$  равняется выражению в фигурной скобке из (2.14), умноженной на  $L/a_{c0}^2$ .

В качестве примера рассмотрим задачу о движении поршня с кусочно-постоянной во времени скоростью.

Уравнение (2.15) можно записать в форме

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} - \delta \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2}, \quad \left( v = \frac{2\theta}{\alpha} - \frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial \tau}, \quad \tau = t - \frac{x}{\alpha v} \right) \quad (2.16)$$

Условие на поршне  $x=0$ , служащее граничным для (2.15), является начальным для (2.16). Оно задается соответственно в виде

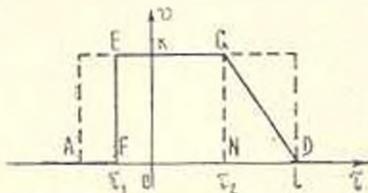
$$\text{при } x=0 \quad v = f'(t), \quad \theta = \exp \left[ \frac{\alpha}{2\delta} f(t) \right] \quad (2.17)$$

Вид функции  $f'(t)$  берем в виде

$$f'(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ k & 0 < t < l \\ 0 & t > l \end{cases}, \quad \text{то есть } f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ kt & 0 < t < l \\ kl & t > l \end{cases} \quad (2.18)$$

При исследовании решения следуем методу, примененному для задачи установившегося обтекания в [5].

Рассмотрим случай, когда диссипативные процессы бесконечно малы ( $\delta \approx 0$ ).



Решение уравнения (2.15) при  $\delta \approx 0$  можно записать в виде

$$v = v(y_1), \quad y_1 = \tau + \alpha x v \quad (2.19)$$

задающем при  $y_1 = l$  полную разрежения  $GD$ , а при  $0 < y_1 < l$  постоянный профиль  $v = k$  (фиг. 1).

На фиг. 1 для устранения неоднозначности профиля введена ударная волна  $EF$ , координата которой  $\tau = \tau_1$  определяется как среднее арифметическое координат  $A$  и  $O$  характеристик впереди и по-

зади ударной волны [4, 6], откуда получится

$$\tau_1 = -\frac{\alpha x k}{2}$$

Точке  $N$  соответствует значение  $\tau_0 = l - akx$ ,  $\tau_2 = l + 2\tau_1$ . Отсюда видно, что при  $x^* = 2l/ak$   $\tau_1 = \tau_2$ , то есть волна разрежения догоняет ударную волну и профиль  $v(\tau)$  становится треугольным (фиг. 1). Для этого профиля величина  $v$  на ударной волне падает по закону  $v = k(x^*/x)^{1/2}$ . Новое положение ударной волны теперь определится как

$$\tau_2 = l - ak\sqrt{x^*x} = l - \sqrt{2aklx} \quad (2.20)$$

то есть ширина волны растет пропорционально  $\sqrt{x}$ . Взаимодействие ударной волны с волной разрежения приводит к ослаблению интенсивности скачка уплотнения.

Для оценки ширины скачка уплотнения необходимо обратиться к уравнению (2.16).

Решение (2.16) при условии (2.17) имеет вид

$$\theta = \frac{1}{2\sqrt{\pi\delta x}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(\tau - \xi)^2}{4\delta x} + \frac{a}{2\delta} f(\xi)\right] d\xi$$

В соответствии с (2.16) и (2.18)

$$v = k \frac{1}{A+1} \quad (2.21)$$

Здесь

$$A = \frac{1}{V\pi} \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-\lambda^2} d\lambda, \quad \psi_1 = \frac{\tau - \tau_2 + l}{b}, \quad \psi_2 = \frac{\tau - \tau_1}{b}, \quad b^2 = 4\delta x$$

$$A = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{2}{V\pi} \int_0^{\psi_1} e^{-\lambda^2} d\lambda \right] \exp\left[-\frac{a^2 k^2 x}{4\delta} - \frac{ak\tau}{2\delta}\right] +$$

$$+ \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{2}{V\pi} \int_0^{\psi_2} e^{-\lambda^2} d\lambda \right] \exp\left[-\frac{a^2 k^2 x}{4\delta} - \frac{ak(\tau - l)}{2\delta}\right]$$

$$\psi_3 = \frac{\tau}{b}, \quad \psi_4 = \frac{\tau - l}{b} \quad (2.22)$$

Предполагается, что  $|\psi_i| \gg 1$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Используя асимптотику интеграла ошибок, найдем приближенные значения для скорости  $v$ .

Следует различать две области значений параметра  $\tau_2$ .

А.  $|\tau_2| < l$ , а профиль  $v(\tau)$  имеет трапециевидную форму (фиг. 1).

1.  $\tau_2 < \tau < l$ . Из (2.21)  $v$  получается как

$$v = \frac{l - \tau}{ax} \quad (2.23)$$

что соответствует волне разрежения  $GD$ . Эффект диссипативных членов не сказывается.

2.  $-l < \tau < \tau_2$ . В окрестности ударной волны  $\tau_1 = -\frac{1}{2}akx$  для  $v$  получим

$$v = k \left| 1 + \exp\left(-\frac{a^2 k^2 x}{4b} - \frac{ak\tau}{2b}\right) \right|^{-1}$$

Здесь экспонента определяет положение крутого ударного фронта (фиг. 2).

Ширина фронта остается постоянной и равна  $\Delta\tau = \frac{2b}{ak}$ , что согласуется со значением Тейлора для ширины ударной волны.

Б.  $\tau_2 < -l$ , а профиль  $v(\tau)$  имеет треугольную форму (фиг. 1).

1.  $\tau > -l$ . В этом случае справедливы предыдущие рассуждения, то есть снова применима формула (2.23).

2.  $\tau_2 < \tau < -l$ , то есть вблизи ударной волны (2.20) получим по (2.21)

$$v = \frac{l - \tau}{ax} \left| 1 - \frac{2}{b} \sqrt{\tau} \frac{(\tau - l)(\tau - l + akx)}{akx} \exp\left|\frac{(\tau - l)^2 - 2aklx}{4bx}\right| \right|^{-1}$$

Здесь экспоненциальный член существенен для образования ударной волны, а первый член задает волну разрежения. Ширина фронта, определяемая диссипацией среды и интенсивностью волны, растет пропорционально  $\sqrt{x}$ :  $\Delta\tau = b \left(\frac{2x}{akl}\right)^{1/2}$ .

Итак, взаимодействие волны разрежения с ударной волной вызывает не только уменьшение интенсивности скачка, но и рассасывание, сглаживание фронта (фиг. 2).

Этот процесс определяется соотношением параметров  $b$  и  $\tau_2$ , зависящих от расстояния  $x$ . Поэтому следует различать два случая.

1.  $b \gg l - \tau_2 = akx$ . Тогда экспоненциальные члены в (2.22) меняются медленно. Поэтому

$$1 + A \approx 1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[ \int_{\psi_2}^{\psi_1} e^{-\lambda^2} d\lambda + \int_{\psi_2}^{\psi_1} e^{-\lambda^2} d\lambda \right] = 1 + z$$

где  $z$ —малая величина. С учетом этого

$$\frac{1}{A+1} = \frac{1}{1+z} \approx 1 - z = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\psi_2}^{\psi_1} e^{-\lambda^2} d\lambda$$

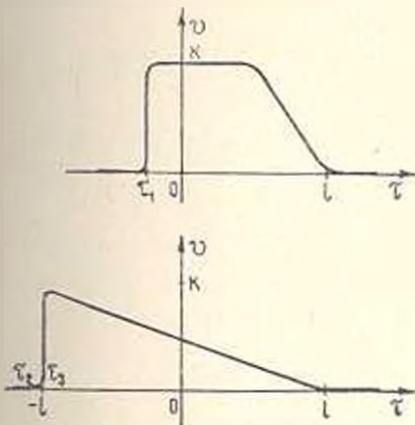
Процесс описывается уравнением

$$\frac{\partial v}{\partial x} = b \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} \quad (2.24)$$

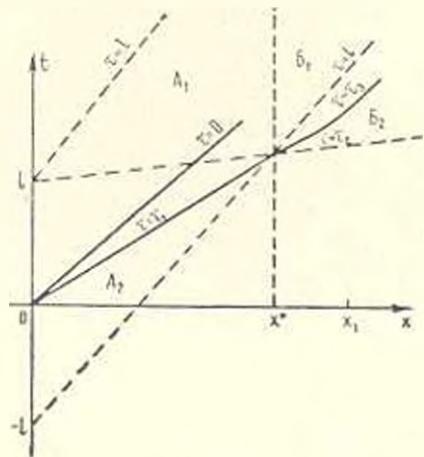
При малых  $x$  условие  $b \gg \lambda k x$  выполняется всегда. Но при  $x = x_1$  неравенство меняет знак. Все зависит от того  $x_1 > x^*$  или  $x_1 < x^*$ .

При  $x_1 \ll x^*$  [5] задача описывается полным уравнением (2.15), а при  $x_1 \gg x^*$  — линейным уравнением (2.24).

На фиг. 3 показаны области применения решений в плоскости  $x, t$ .



Фиг. 2



Фиг. 3

3. *Квазизамороженный процесс.* Примем за независимые переменные плотность  $\rho$ , давление  $p$ , концентрацию  $c$ . Напишем приращение удельной энтропии в виде

$$ds = \left( \frac{\partial s}{\partial p} \right)_{\rho, c} \left[ dp - a_f^2 d\rho - \left( \frac{\partial p}{\partial c} \right)_{\rho, s} dc \right], \quad a_f = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\rho, c}^{1/2} \quad (3.1)$$

Здесь  $a_f$  — замороженная скорость звука. Из (3.1) получим

$$\frac{dp}{dt} - a_f^2 \frac{d\rho}{dt} = \frac{ds}{dt} \left( \frac{\partial s}{\partial p} \right)_{\rho, c}^{-1} + \left( \frac{\partial p}{\partial c} \right)_{\rho, s} \frac{dc}{dt}$$

Аналогично выводу (2.3) можно найти

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (v + a_f) \frac{\partial p}{\partial x} + \gamma a_f \left[ \frac{\partial v}{\partial t} + (v + a_f) \frac{\partial v}{\partial x} \right] = L_{1f} + L_{2f} + L_{3f} + L_{4f} \quad (3.2)$$

Здесь

$$L_{1f} = \frac{a_f}{a} L_{1e}, \quad L_{2f} = \left( \frac{\partial p}{\partial s} \right)_{\rho, c} \left( \frac{\partial p}{\partial s} \right)_{\rho, \rho}^{-1} L_{2e}$$

$$L_{3f} = \left[ -\frac{Q}{T} \left( \frac{\partial p}{\partial s} \right)_{\rho, c} + \frac{v}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial c} \right)_{\rho, s} \right] \left( \frac{\partial q}{\partial t} + v \frac{\partial q}{\partial x} \right)$$

$$L_{4f} = \left\{ \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial c} \right)_{\rho, s} + \left[ k_T \left( \frac{\partial \mu}{\partial c} \right)_{\rho, T} - T \left( \frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_{\rho, c} \right] \frac{1}{\rho T} \left( \frac{\partial p}{\partial s} \right)_{\rho, c} \right\} \times$$

$$\times \frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho D \left( \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{k_T}{T} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{k_p}{p} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \right] + \frac{D}{T} \left( \frac{\partial p}{\partial s} \right)_{p,c} \left( \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{k_T}{T} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{k_p}{p} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left[ k_T \left( \frac{\partial p}{\partial c} \right)_{p,T} - T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_{p,c} + p \right]$$

Приращение температуры запишем в виде

$$dT = \left( \frac{\partial T}{\partial p} \right)_{p,c} \left[ dp - \frac{1}{\alpha_f} \alpha_f^2 dp - \left( \frac{\partial p}{\partial c} \right)_{p,T} dc \right], \quad \alpha_f = \frac{c_{p,c}}{c_{v,c}} \quad (3.3)$$

где  $c_{p,c}$  — удельная теплоемкость при постоянном давлении и концентрации,  $c_{v,c}$  — удельная теплоемкость при постоянном объеме и концентрации.

Пусть теперь  $a_0 = a_{f0}$ , то есть скорость движения рассматриваемой короткой волны по покоящейся смеси равна замороженной скорости звука. Примем

$$\alpha_f = \alpha_{f0} (1 + \epsilon \alpha_f) \quad (3.4)$$

Как и в п. 2, штрихи над безразмерными переменными в дальнейшем опускаем.

Отклонение давления  $p = p(p, s, c)$  от равновесного значения в покоящейся среде

$$p_0 p = \left( \frac{\partial p}{\partial s_0} \right)_{p,c} s_0 s + \alpha_{f0}^2 p_0 p + \left( \frac{\partial p}{\partial c_0} \right)_{p,c} c_0 c \quad (3.5)$$

Линеаризация посредством (1.7) уравнений (1.1) и (1.2) и интегрирование приводят к выражениям (2.5) с заменой  $\alpha_0$  на  $\alpha_{f0}$ . Сравнение только что сказанного с соотношением (3.5) приводит к требованию

$$c = 0, \quad s = 0 \quad (3.6)$$

ными словами, в рассматриваемом процессе сжатие газа происходит обратимо и при постоянной концентрации реагирующей смеси.

Аналогично выводам п. 2 можно легко получить

$$\frac{\partial q}{\partial r} = -N_r q, \quad N_r = \frac{L}{a_{f0}^2} \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial q}{\partial r} = N_r H_{10} Q \quad (3.8)$$

Требование (3.6) приводит к условию  $N_r \ll 1$ . Действительно, из (3.7) следует, что при  $N_r \ll 1$   $q = 0$ . Линеаризуя уравнения (1.4) и удерживая главные члены, с учетом  $q = 0$ , получим  $c = 0$ . Таким образом, при квази-замороженном процессе распространения возмущений время  $\tau$  протекания химической реакции много больше макроскопического времени  $L/a_{f0}$ .

После линеаризации посредством (1.7) и (1.9) уравнение (1.4), в котором удержаны лишь главные члены, приведет к виду

$$\frac{\partial c}{\partial r} = \frac{\gamma q_0}{\gamma_0 c_0} \frac{\partial q}{\partial r} - \frac{k_T D}{L} \frac{1}{a_{eff}^2} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} - \frac{k_p D}{L} \frac{1}{a_{eff}^2} \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} \quad (3.9)$$

Имея в виду требование (3.6), выражение (3.3) после линеаризации запишется в виде

$$T_0 \frac{\partial T}{\partial r} = \left( \frac{\partial T}{\partial p_0} \right)_{r,c} \left[ p_0 \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{1}{\gamma_f} \gamma_0 a_{eff}^2 \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} \right] \quad (3.10)$$

В принятом приближении [1]

$$Q = \left( \frac{\partial Q}{\partial c_0} \right)_{r,c} \frac{\gamma_0 c_0^2}{p_0} p, \quad a_1 = (m_{f0} - 1) \gamma \quad (3.11)$$

Здесь

$$m_{f0} = \frac{1}{2\gamma_0^2 a_{eff}^2} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial V_0^2} \right)_{r,c}$$

Подставляя соотношения (3.9)–(3.11), выраженные посредством (2.5) через скорость частиц газа, в линеаризованное с помощью (1.7) уравнение (3.2), получим

$$\begin{aligned} 2\epsilon m_{f0} v \frac{\partial v}{\partial r} + 2\Delta \frac{\partial v}{\partial t} = & -N_r H_{10} \left( \frac{\partial Q}{\partial c_0} \right)_{r,c} \left( \frac{\partial p}{\partial c_0} \right)_{r,c} \frac{\gamma_0 c_0^2}{p_0 a_{eff}^2} v + \\ & + \left\{ \frac{1}{\text{Re}} + \frac{1}{\text{Pe}} \left( \frac{\partial p}{\partial s_0} \right)_{r,c} \frac{c_{p,c}}{T_0} \left( \frac{\partial T}{\partial p_0} \right)_{r,c} \left( 1 - \frac{1}{\gamma_f} \right) + \right. \\ & + \frac{k_T D}{L a_{eff} T_0} \left( \frac{\partial T}{\partial p_0} \right)_{r,c} \left( 1 - \frac{1}{\gamma_f} \right) \left[ \left( \frac{\partial p}{\partial c_0} \right)_{r,c} + B_{f0} \right] + \\ & \left. + \frac{k_p D}{L a_{eff} p_0} \left[ \left( \frac{\partial p}{\partial c_0} \right)_{r,c} + B_{f0} \right] \right] \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \quad (3.12) \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} B_{f0} = & \left[ \frac{k_T}{T_0} \left( \frac{\partial v}{\partial c_0} \right)_{r,T} - \left( \frac{\partial v}{\partial T_0} \right)_{r,c} \right] \left( \frac{\partial p}{\partial s_0} \right)_{r,c}, \quad \text{Pe} = \frac{\gamma_0 a_{f0} c_{p,c} L}{k} \\ \frac{1}{\text{Re}} = & \frac{4}{3} \frac{1}{\text{Re}_1} + \frac{1}{\text{Re}_2}, \quad \text{Re}_1 = \frac{\gamma_0 a_{f0} L}{\lambda_1}, \quad \text{Re}_2 = \frac{\gamma_0 a_{f0} L}{\lambda_2} \end{aligned}$$

Если выбрать неопределенные пока малые параметры таким образом, чтобы [1]

$2\epsilon m_{f0} = 2\Delta = N_r H_{10} \frac{\gamma_0 c_0^2}{p_0 a_{eff}^2} \left( \frac{\partial Q}{\partial c_0} \right)_{r,c} \left( \frac{\partial p}{\partial c_0} \right)_{r,c}$  — выражению в фигурной скобке, уравнение (3.12) запишется в виде

$$\frac{dv}{dt} + v \frac{dv}{dr} + v = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}$$

Если в (3.12) положить  $i_1 = i_2 = k = D = 0$ , то оно совпадает с уравнением, полученным в [1].

4. *Среды с близкими скоростями звука.* Аналогично [1], дифференцируя по  $r$  тождество  $p(r, s, Q) \equiv p[r, s, c(r, s, Q)]$ , найдем связь между замороженной  $a_f$  и равновесной  $a_e$  скоростями звука

$$a_f^2 - a_e^2 = \frac{1}{\gamma^2} \frac{e_{12}^2}{\epsilon_{11}} > 0, \quad e_{12} = \left( \frac{\partial^2 e}{\partial V \partial c} \right)_{V, s}, \quad e_{11} = \left( \frac{\partial^2 e}{\partial c^2} \right)_{V, s} \quad (4.1)$$

Равновесная скорость звука может достичь значения замороженной скорости лишь при  $e_{12} = 0$ .

В рассматриваемом случае значения скоростей  $a_f$  и  $a_e$  в покоящейся среде близки, поэтому величина  $e_{120}$  мала. Положим

$$e_{120} = \epsilon_n \frac{p_0}{q_0} e_{120}' \quad (4.2)$$

где  $\epsilon_n$  — новый малый параметр,  $e_{120}'$  — безразмерная величина порядка единицы.

При переходе к безразмерным переменным и последующем упрощении уравнений движения смеси необходимо в (1.7) и (1.8) сделать замену

$$q' \rightarrow \epsilon_n q', \quad Q' \rightarrow \epsilon_n Q', \quad c' \rightarrow \epsilon_n c', \quad q'' \rightarrow \epsilon_n q'' \quad (4.3)$$

Как и прежде, штрихи над безразмерными переменными опускаем.

Так как скорость  $a_0$  движения волны не совпадает с  $a_f$  и  $a_e$ , то, согласно (4.1) и (4.2), положим

$$a_0 - a_{f0} = \epsilon_n^2 a_0 \sigma_{j0}, \quad a_0 - a_{e0} = \epsilon_n^2 a_0 \sigma_{e1} \quad (4.4)$$

где  $\sigma_{e1}$  и  $\sigma_{j0}$  — постоянные порядка единицы.

После линеаризации уравнение (1.3) в порядке до  $\epsilon_n^2$  даст  $s = 0$ . Более точная оценка показывает, что [1]  $s \sim \epsilon_n^2$ .

Для отклонений давлений (2.6) и (3.5) с точностью до  $\epsilon_n^2$  получим соответственно

$$\begin{aligned} p_0 p &= a_{f0}^2 \epsilon_n^2 Q - \epsilon_n^2 \frac{p_0^2}{\gamma_0 q_0} \frac{e_{120}}{\epsilon_{110}} Q \\ p_0 p &= a_{e0}^2 \epsilon_n^2 Q - \epsilon_n^2 \frac{p_0 c^2 \sigma_{e1}}{q_0} c \end{aligned} \quad (4.5)$$

Из (4.4) и (4.5) видно, что в порядке до  $\epsilon_n^2$  оба отклонения совпадают друг с другом и равны (2.5) с заменой  $a_{f0}$  на  $a_0$ .

Можно получить

$$Q = \frac{\gamma_0 q_0 c^2}{p_0} \epsilon_{110} c - \gamma_0 e_{120}' \quad (4.6)$$

Из уравнения (1.4) в порядке до  $\varepsilon^2$  получим

$$\frac{\partial c}{\partial r} = \frac{\nu q_0}{\nu_0 c_0} \frac{\partial q}{\partial r} \quad (4.7)$$

Комбинируя (4.7) с (3.8), (4.6) и (2.5), находим

$$\frac{\partial q}{\partial r} = N_r H_{10} \left( \frac{\nu q_0^2 e_{110}}{p_0} q - \nu e_{120} v \right) \quad (4.8)$$

С учетом второй формулы (4.4), линейризация посредством (1.7) и (4.3) уравнения (2.3) дает

$$\begin{aligned} 2\Delta \frac{\partial v}{\partial t} + 2\varepsilon m_{0v} v \frac{\partial v}{\partial r} - 2\varepsilon^2 \varepsilon_{0v} v \frac{\partial v}{\partial r} &= \left( \frac{4}{3} \frac{i_1}{\nu_0 a_0 L} + \frac{i_2}{\nu_0 a_0 L} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \\ &+ \frac{k}{L} \left( \frac{\partial p}{\partial s_0} \right)_{p, Q} \frac{1}{\nu_0^2 a_0^2} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \varepsilon^2 \frac{p_0^2 e_{120}}{\nu_0^2 a_0^2} \frac{\partial Q}{\partial r} + \\ &+ \frac{k_T D}{L} \frac{B_{r0}}{\nu_0 a_0^2} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{k_p D}{L} \frac{B_{r0}}{\nu_0 a_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Аналогично из уравнения (3.2) выводим

$$\begin{aligned} 2\Delta \frac{\partial v}{\partial t} + 2\varepsilon m_{0v} v \frac{\partial v}{\partial r} - 2\varepsilon^2 \varepsilon_{0v} v \frac{\partial v}{\partial r} &= \left( \frac{4}{3} \frac{i_1}{\nu_0 a_0 L} + \frac{i_2}{\nu_0 a_0 L} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \\ &+ \frac{k}{L} \left( \frac{\partial p}{\partial s_0} \right)_{p, Q} \frac{1}{\nu_0^2 a_0^2} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \varepsilon^2 \frac{\nu p_0 e_{120}}{\nu_0^2 a_0^2} \frac{\partial q}{\partial r} + \\ &+ \frac{k_T D}{L} \frac{B_{j0}}{\nu_0 a_0^2} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{k_p D}{L} \frac{B_{j0}}{\nu_0 a_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Уравнения (4.9) и (4.10) должны совпадать друг с другом.

Действительно, с точностью до  $\varepsilon^2$   $m_{0v} = m_{10} = m_{20}$ ,  $(\partial p / \partial s_0)_{p, Q} = (\partial p / \partial s_0)_{p, Q}$ ,  $(\partial T / \partial p_0)_{p, Q} = (\partial T / \partial p_0)_{p, Q}$ ,  $\nu_r = \nu_j = \nu$ . Учитывая (4.4), из (4.5) получим

$$2(\varepsilon_{j0} - \varepsilon_{0v}) = - \frac{p_0^2 e_{120}}{\nu_0^2 a_0^2 e_{110}} \quad (4.11)$$

Подставляя (4.11), (4.6), (4.7) в (4.9), приведем его к виду (4.10).

Выражая (4.10) посредством (3.10) и (2.5) через возмущенную скорость частиц смеси и исключая из полученного уравнения и (4.8) полноту реакции  $q$ , получим

$$2\Delta \frac{\partial v}{\partial t} + 2(\varepsilon m_{0v} - \varepsilon^2 \varepsilon_{0v}) \frac{\partial v}{\partial r} = \varepsilon^2 \frac{1}{N_r} \frac{p_0^2 e_{120}}{H_{10} \nu^2 q_0^2 a_0^2 e_{110}} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}$$

$$\begin{aligned}
& - \left\{ \frac{4}{3} \frac{\lambda_1}{\gamma_0 a_0 L} + \frac{\lambda_2}{\gamma_0 a_0 L} + \frac{k}{a_0 \alpha_0 T_0 L} \left( 1 - \frac{1}{x} \right) \left( \frac{\partial p}{\partial s_0} \right)_{r,c} \left( \frac{\partial T}{\partial p_0} \right)_{r,c} \right. \\
& + \frac{k_1 D}{L} \frac{B_{j0}}{a_0 T_0} \left( 1 - \frac{1}{x} \right) \left( \frac{\partial T}{\partial p_0} \right)_{r,c} + \frac{k_p D}{L} \frac{B_{j0}}{a_0 p_0} \left. \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \right. \\
& + \frac{1}{N_r} \frac{p_0}{v q_0^2 e_{110} H_{10}} \left\{ \frac{4}{3} \frac{\lambda_1}{\gamma_0 a_0 L} + \frac{\lambda_2}{\gamma_0 a_0 L} + \right. \\
& + \frac{k}{a_0 \alpha_0 T_0 L} \left( 1 - \frac{1}{x} \right) \left( \frac{\partial p}{\partial s_0} \right)_{r,c} \left( \frac{\partial T}{\partial p_0} \right)_{r,c} + \\
& + \frac{k_1 D}{L} \frac{B_{j0}}{a_0 T_0} \left( 1 - \frac{1}{x} \right) \left( \frac{\partial T}{\partial p_0} \right)_{r,c} + \frac{k_p D}{L} \frac{B_{j0}}{a_0 p_0} \left. \frac{\partial^3 v}{\partial r^3} \right. \\
& = \frac{1}{N_r} \frac{p_0}{H_{10} v^2 q_0^2 e_{110}} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ 2\lambda \frac{\partial v}{\partial t} + 2(\gamma m_0 v - \gamma_0^2 v_{00}) \frac{\partial v}{\partial r} \right\} \quad (4.12)
\end{aligned}$$

В предельных случаях уравнение (4.12) переходит в (3.12) и (2.14). При  $\lambda_1 = \lambda_2 = k = D = 0$  уравнение (4.12) совпадает с уравнением, полученным в [1].

Подчиним малые параметры связям

$$\gamma m_0 = \Delta = \gamma_0^2 \frac{p_0^2 e_{110}}{q_0^2 \gamma_0^2 a_0^2 e_{110}}$$

и обозначим

$$a = \frac{\gamma_0^2}{\varepsilon} \frac{\gamma_0}{m_0}, \quad l = \frac{1}{N_r} \frac{p_0}{H_{10} v^2 q_0^2 e_{110}}$$

$\delta$  — выражению в фигурной скобке слева, деленному на  $\gamma m_0$ . Переходя к новой функции  $u = \gamma v = u$ , приведем уравнение (4.12) к виду

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{l + \delta}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\delta l}{2} \frac{\partial^3 u}{\partial r^3} = l \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} \right)$$

В заключение автор выражает глубокую благодарность А. Г. Багдоеву за постановку задачи и ценные указания.

Գ. Գ. ՕՆԱՆԻԱՆ

ՔԻՄԻԱԳԵՍ ԱԿՏԻՎ ՄԵԶՅԱՎԱՅՐՈՒՄ ԹՈՒՅԷ ԱՆԻՔՆԵՐԻ ՏԱՐԱՍՄԱՆ ԿՆՊԻՐԸ  
ՈՉ ԳԵԱՅԻՆ ԳՐՎԱՅՔՈՎ

Ո. մ. փ. ո. փ. ո. մ.

Ստացված է բիմիապես ակտիվ բինար մածուծիկ խառնուրդում թույլ ալիքների տարածման ոչ զծային խնդրի լուծումը դիֆուզիայի և ֆերմադինամիկայի հաշվառումով:

Ցույց է տրված, որ նշված էֆեկտների հաշվի առնելը ձևափոխում է խնդրի ոչ զծային հավասարումը ալիքի շրջակայքում կվադրատոնցիված պրոցեսի համար, ինչպես նաև մտցնում է էսկան փոփոխություններ հավասարման մեջ այն ղեկարում, երբ հատուկ միջավայրի համար սահեցված և հավասարակշռային ձայնի արագութունները ունեն մոտիկ արժեքներ: Կվադր հավասարակշռված պրոցեսի համար ստացված հավասարման լուծումը գտնված է մի մասնավոր ղեկարի համար, որը վերաբերվում է բաց ժամանակի կտոր առ կտոր հաստատուն արագությամբ շարժվող միացի խնդրին:

PROPAGATION OF WEAK WAVES IN A CHEMICALLY  
ACTIVE MEDIUM UNDER NON-LINEAR STATEMENT

G. G. OHANIAN

## S u m m a r y

The problem of obtaining a non-linear solution for a viscous reacting binary mixture is considered under diffusive and heat-conductive effects. The above effects are shown to change the non-linear equation in the vicinity of the wave in the quasi-frozen process as well as to change essentially the equation of special media where the velocity of sound in the quasi-frozen case and that in the quasi-equilibrium case are approximately equal.

The solution for the quasi-equilibrium equation is found.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Рыжов О. С. О нелинейной акустике химических активных сред. ПИММ, т. 35, вып. 6, 1971.
2. Нелинейная теория распространения волн. "Мир", М., 1970.
3. Де Гроот С., Мазур П. Неравновесия термодинамика. "Мир", М., 1964.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. Гостехиздат, М., 1954.
5. Анисимов В. В., Хохлов Р. В. Об ударных волнах, образующихся при обтекании гонких профилей вязким газом. ПИММ, т. 28, вып. 3, 1964.
6. Багдоян А. Г. Некоторые нелинейные задачи о движении сжимаемой жидкости. Изд. АН Арм.ССР, Ереван, 1967.