ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXVI, № 5, 1973 Механика

Л. И. УЭДАЛЕВ, С. М. ШЛЯХОВ

ТЕРМОУПРУГИЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ПЛАСТИНКЕ С ДВУМЯ НЕРАВНЫМИ КРУГОВЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ

В настоящей работе получено решение задачи термоупругости для плоскости с двумя неравными круговыми отверстиями. Использован метод дислокационной аналогии Н. И. Мусхелишвили [1]. Рассмотрены два случая температурных граничных условий. В первом случае температура на контурах отверстий изменяется по заданному закону; во втором—на контуре одного из отверстий поддерживается постоянная температура, на контуре другого заданы смешанные тепловые условия. Решение задачи теплопроводности в последнем случае получено с помощью метода наименьших квадратов.

Известен ряд статей ([2]—[5]), посвященных исследованию напряженного состояния в плоскости, ослабленной двумя круговыми отверстиями. Температура на контурах в рассмотренных задачах принимается постоянной. В работе Удогучи [2], влияние температуры на пластинку заменяется действием на область фиктивных объемных и поверхностных сил. Линден [3] и Рафальский [4] использовали для решения метод термоупругого потенциала перемещений. Метод функций комплексного переменного применен в работе В. Н. Шаповалова [5]. Напряженное состояние пластинки с двумя отверстиями, вдоль которых действуют заданные усилия, исследовал В. В. Еганян [8].

1. Бесконечная изотропная пластинка ослаблена двумя круговыми отверстиями радиусов R_1 и R_2, центры которых удалены на расстояние H один от другого (фиг. 1).

Используем биполярную систему координат (α, β), координатные линии $\alpha = \alpha_j$ $(j = 1,2)$ которой совмещены с контурами отверстий. Связь между декартовыми и биполярными координатами устанавливается по формуле

$$z = ai \operatorname{cth} \frac{\zeta}{2}$$

где a — параметр биполярной системы, $z = x + iy$, $\zeta = \alpha + i\beta$. Функция температур T удовлетворяет следующему уравнению и граничным условиям:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right) T = 0 \tag{1.1}$$

$$T = T_1(\beta) \quad \text{при} \quad 0 \leqslant \beta \leqslant \pm\beta_0, \quad \alpha = \alpha_1$$

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha} = 0 \text{ при } \pm \beta_0 < \beta \leqslant \pm \pi, \quad \alpha = \alpha_1 \tag{1.2}$$

$$T = T_2(\beta) \text{ при } \alpha = \alpha_2 \ (\alpha_2 < 0), \quad T_\infty < \infty$$

Напряженное состояние пластины с контурами отверстий, свободными от нагрузки, определяется путем интегрирования бигармонического уравнения для функции напряжений Ф

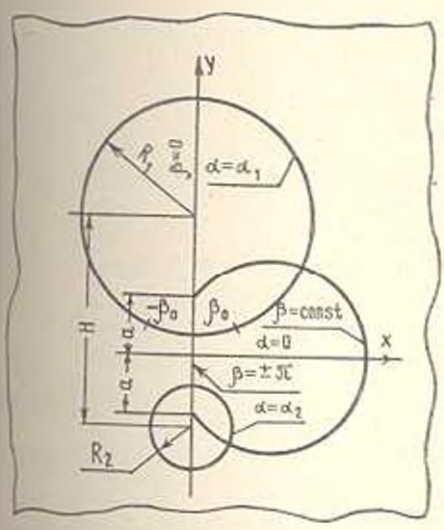
$$\left[\frac{\partial^4}{\partial\alpha^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial\alpha^2\partial\beta^2} + \frac{\partial^4}{\partial\beta^4} - 2\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} + 1\right](g\Phi) = 0 \tag{1.3}$$

удовлетворяющей граничным условиям

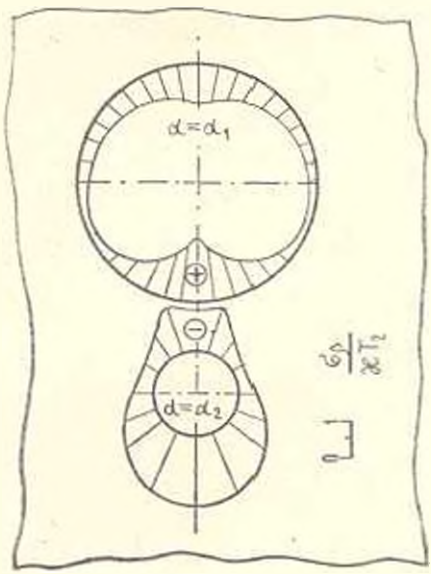
$$\sigma_\alpha = 0, \quad \tau_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{при} \quad \alpha = \alpha_j \ (j = 1, 2) \tag{1.4}$$

и условию на бесконечности

$$g\Phi|_\infty = 0 \tag{1.5}$$



Фиг. 1.



Фиг. 2.

В уравнении (1.3) $ag = \operatorname{ch}\alpha - \cos\beta$.

Компоненты напряжений выражаются через функцию Ф в биполярных координатах известным образом [6]

$$\sigma_\alpha = \frac{1}{a}\left[(\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta)\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} - \operatorname{sh}\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha} - \sin\beta\frac{\partial}{\partial\beta} + \operatorname{ch}\alpha\right](g\Phi)$$

$$\tau_{\alpha\beta} = -\frac{1}{a}(\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta)\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\beta}(g\Phi) \tag{1.6}$$

$$\sigma_\beta = \frac{1}{a}\left[(\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta)\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} - \operatorname{sh}\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha} - \sin\beta\frac{\partial}{\partial\beta} + \cos\beta\right](g\Phi)$$

2. Остановим внимание на случае однородных граничных условий — участок теплоизоляции на контуре $\alpha = \alpha_1$ отсутствует ($\beta_0 = \pi$), а температура на $\alpha = \alpha_j$ ($j = 1,2$) изменяется по закону

$$T_j(\beta) = a_{0j} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{nj} \cos n\beta + b_{nj} \sin n\beta) \tag{2.1}$$

где a_{0j}, a_{1n}, b_{nj} — известные коэффициенты.
Уравнение (1.1) имеет следующее решение:

$$T = c + d\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} [(c_n \operatorname{ch} n\alpha + d_n \operatorname{sh} n\alpha) \cos n\beta +$$

$$+ (l_n \operatorname{ch} n\alpha + h_n \operatorname{sh} n\alpha) \sin n\beta] \tag{2.2}$$

Постоянные интегрирования c, d, c_n, d_n, l_n, h_n могут быть определены на основании формул (2.1), (2.2) из условий (1.2). Решение уравнения (1.3) имеет вид

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$$

$$g\,\Phi_1 = [B_0\alpha + A_0 \ln(\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta)](\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} [f_n(\alpha) \cos n\beta + \varphi_n(\alpha) \sin n\beta]$$

$$g\,\Phi_2 = (B_0 + N_0)\,\alpha \cos\beta + (D_0 \operatorname{sh}\alpha + C_0 \sin\beta) \ln(\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta)$$

$$\varphi_1(\alpha) = K_1 \operatorname{ch} 2\alpha + M_1 \operatorname{sh} 2\alpha$$

$$\varphi_n(\alpha) = K_n \operatorname{ch}(n+1)\alpha + L_n \operatorname{ch}(n-1)\alpha + M_n \operatorname{sh}(n+1)\alpha +$$

$$+ N_n \operatorname{sh}(n-1)\alpha \qquad (n > 1)$$

$$f_n(\alpha) = A_n \operatorname{ch}(n+1)\alpha + B_n \operatorname{ch}(n-1)\alpha + C_n \operatorname{sh}(n+1)\alpha +$$

$$+ D_n \operatorname{sh}(n-1)\alpha \qquad (n \geqslant 1) \tag{2.3}$$

Здесь B_0, N_0, D_0, C_0, K_n, L_n, M_n, N_n, A_n, B_n, C_n, D_n, A_0 — произвольные постоянные интегрирования.

Для определения постоянных интегрирования из условий (1.4) и (1.5) предварительно преобразуем компоненты напряжения, соответствующие функции Φ_2. Они имеют вид

$$\sigma_\alpha^{(2)} = (B_0 + N_0)(\alpha - \operatorname{sh}\alpha \cos\beta) + D_0 \operatorname{sh}\alpha \left(\frac{\operatorname{ch}\alpha \cos\beta - 1}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta} - \right.$$

$$\left. - \operatorname{ch}\alpha - \cos\beta \right) + C_0 \left(\frac{3}{2} \sin 2\beta - \frac{2 \sin^3\beta}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta} - \frac{\operatorname{sh}^2\alpha \sin\beta}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta} \right)$$

$$\sigma_{\alpha\beta}^{(2)} = (B_0 + N_0) \left(\operatorname{ch}\alpha \sin\beta - \frac{1}{2} \sin 2\beta \right) + C_0 \left(\frac{\operatorname{sh}\alpha \sin^2\beta}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta} - \right.$$

$$\left. - \operatorname{sh}\alpha \cos\beta \right) + D_0 \sin\beta \, \frac{\operatorname{ch}\alpha \cos\beta - 1}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta} \tag{2.4}$$

Представим функции (2.4) в точках контуров $\alpha = \alpha_j$ в виде рядов Фурье

$$a\sigma_\alpha^{(2)}(\alpha_j,\beta) = c_0^{(j)} + \sum_{n=1}^{\infty}[c_n^{(j)}\cos n\beta + d_n^{(j)}\sin n\beta] \tag{2.5}$$

$$a\tau_{\alpha\beta}^{(2)}(\alpha_j,\beta) = a_0^{(j)} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n^{(j)}\cos n\beta + b_n^{(j)}\sin n\beta]$$

где

$$a_0^{(j)} = \pm C_0 e^{-|\alpha_j|}\,\mathrm{sh}\,|\alpha_j|, \qquad a_n^{(j)} = \mp C_0 2e^{-n|\alpha_j|}\,\mathrm{sh}^2\alpha_j \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

$$d_1^{(j)} = -C_0 2(\mathrm{ch}\alpha_j - e^{-|\alpha_j|}\,\mathrm{sh}^2\alpha_j)$$

$$d_2^{(j)} = C_0\left(\frac{1}{2} + 2e^{-2|\alpha_j|}\,\mathrm{sh}^2\alpha_j\right)$$

$$d_n^{(j)} = C_0 2e^{-n|\alpha_j|}\,\mathrm{sh}^2\alpha_j \qquad (n = 3, 4, \cdots)$$

$$c_0^{(j)} = \pm[(B_0 + N_0)|\alpha_j| - D_0\,\mathrm{sh}\,|\alpha_j|(\mathrm{ch}\alpha_j + e^{-|\alpha_j|})]$$

$$c_1^{(j)} = \pm[D_0\,\mathrm{sh}\,|\alpha_j|(2e^{-|\alpha_j|}\,\mathrm{sh}\,|\alpha_j| - 1) - (B_0 + N_0)\,\mathrm{sh}\,|\alpha_j|]$$

$$c_n^{(j)} = \pm D_0 2e^{-n|\alpha_j|}\,\mathrm{sh}^2\alpha_j \qquad (n = 2, 3, \cdots)$$

$$b_1^{(j)} = (B_0 + N_0)\,\mathrm{ch}\alpha_j + D_0(2e^{-|\alpha_j|}\,\mathrm{sh}^2\alpha_j - \mathrm{ch}\alpha_j)$$

$$b_2^{(j)} = D_0 2e^{-2|\alpha_j|}\,\mathrm{sh}^2\alpha_j - \frac{1}{2}(B_0 + N_0)$$

$$b_n^{(j)} = D_0 2e^{-n|\alpha_j|}\,\mathrm{sh}^2\alpha_j \qquad (n = 3, 4, \cdots) \tag{2.6}$$

В выражениях (2.6), где встречаются два знака, „+" относится к случаю $j = 1$, „—" — к $j = 2$.

Подставим функции $a_\alpha^{(2)}(\alpha_j,\beta)$, $a\tau_{\alpha\beta}^{(2)}(\alpha_j,\beta)$, определенные по формулам (2.5), а также компоненты напряжения, соответствующие Φ_1, в условия (1.4) и (1.5). Сравнение коэффициентов при $\cos n\beta$ и $\sin n\beta$ приводит к бесконечной системе уравнений.

После преобразований система принимает вид

$$2f_1(\alpha_j) = B_0\,\mathrm{sh}\,2\alpha_j + A_0\,\mathrm{ch}\,2\alpha_j - 2c_0^{(j)}$$

$$f_1(\alpha_j) = B_0 + 2A_0 e^{-|\alpha_j|}\,\mathrm{sh}\alpha_j + D_0 2e^{-2|\alpha_j|} - (B_0 + N_0)$$

$$n(n^2-1)f_n(\alpha_j) = -2A_0 e^{-n|\alpha_j|}(n\,\mathrm{sh}\,|\alpha_j| + \mathrm{ch}\alpha_j) + D_0 2(n^2-1)e^{-n|\alpha_j|}\,\mathrm{sh}\alpha_j$$

$$nf_n(\alpha_j) = 2A_0 e^{-n|\alpha_j|}\,\mathrm{sh}\alpha_j + D_0 2[\mathrm{ch}\alpha_j - n\,\mathrm{sh}\,|\alpha_j|]e^{-n|\alpha_j|} \quad (n = 2, 3, \cdots)$$

$$n(n^2-1)\varphi_n(\alpha_j) = -\frac{2}{\mathrm{sh}\alpha_j}\sum_{p=0}^{n-1}[(n-p)a_p^{(j)}\,\mathrm{ch}(n-p)\alpha_j +$$

$$+ (pa_p^{(j)} - a_p^{(j)} \operatorname{cth}\alpha_j) \operatorname{sh}(n-p)\alpha_j]$$

$$(n = 2, 3, \cdots)$$

$$n\varphi_n(\alpha_j) = -\frac{2}{\operatorname{sh}\alpha_j} \sum_{p=0}^{n-1} a_p^{(j)} \operatorname{sh}(n-p)\alpha_j$$

$$(n = 1, 2, \cdots)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (A_n + B_n) = 0 \tag{2.7}$$

Здесь штрих означает производную.

Число неизвестных в системе (2.7) больше числа уравнений. Выполняя условие однозначности перемещений с помощью метода дислокационной аналогии Н. И. Мусхелишвили [1], находим следующие неизвестные постоянные:

$$B_0 + N_0 = -\alpha d\varkappa, \quad D_0 = \varkappa a \left[d + \sum_{n=1}^{\infty} n(c_n + d_n) \right] \tag{2.8}$$

$$C_0 = \varkappa a \sum_{n=1}^{\infty} n(l_n + h_n)$$

где α^* — коэффициент линейного расширения материала $\varkappa = \frac{\alpha^* E}{2}$, E — модуль Юнга. Уравнения (2.7) и формула (2.8) составляют полную алгебраическую систему. Наибольший интерес представляют напряжения на контурах отверстий. Вид формулы следующий:

$$\sigma_\beta(\alpha_j, \beta) = \frac{\operatorname{ch}\alpha_j - \cos\beta}{a} \left[B_0 2\operatorname{sh}\alpha_j + A_0 \frac{\operatorname{ch} 2\alpha_j - 2\operatorname{ch}\alpha_j \cos\beta + \cos 2\beta}{\operatorname{ch}\alpha_j - \cos\beta} + \right.$$

$$+ D_0 \left[\frac{3\operatorname{sh}\alpha_j \operatorname{ch}\alpha_j}{\operatorname{ch}\alpha_j - \cos\beta} - \frac{\operatorname{sh}^3\alpha_j}{(\operatorname{ch}\alpha_j - \cos\beta)^2} - \operatorname{sh}\alpha_j \frac{\operatorname{ch}\alpha_j \cos\beta - 1}{(\operatorname{ch}\alpha_j - \cos\beta)^2} \right] -$$

$$- C_0 \left[4\sin\beta \frac{\operatorname{ch}\alpha_j \cos\beta - 1}{(\operatorname{ch}\alpha_j - \cos\beta)^2} + 2\frac{\sin^3\beta}{(\operatorname{ch}\alpha_j - \cos\beta)^2} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} [f_n(\alpha_j) +$$

$$\left. + (n^2 - 1) f_n(\alpha_j)] \cos n\beta + \sum_{n=1}^{\infty} [\varphi_n(\alpha_j) + (n^2 - 1)\varphi_n(\alpha_j)] \sin n\beta \right\}$$

3. Рассмотрим случай смешанных граничных условий. Пусть в условиях (1.2) функции $T_1 = 0$, $T_2 = \text{const}$. Для получения приближенного решения уравнения теплопроводности (1.1), представим функцию температур на контуре $\alpha = \alpha_1$ тригонометрическим полиномом

$$T(\alpha_1, \beta) = a_0 + \sum_{n=1}^{m} a_n \cos n\beta \tag{3.1}$$

где a_0, a_n — неизвестные коэффициенты.

Уравнение (1.1) имеет следующее решение:

$$T = c' + d'\alpha + \sum_{n=1}^{m} (c'_n \operatorname{ch} n\alpha + d_n \operatorname{sh} n\alpha) \cos n\beta \tag{3.2}$$

Постоянные интегрирования c', d', c'_n, d_n могут быть выражены через коэффициенты полинома (3.1) и постоянную T_2 из условий на контурах α_1 и α_2. Формула для потока тепла на границе $\alpha = \alpha_1$ на основании (3.2) принимает вид

$$\left.\frac{\partial T}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=\alpha_1} = \frac{a_0 - T_2}{\alpha_1 - \alpha_2} + \sum_{n=1}^{m} a'_n\, n \operatorname{cth} n(\alpha_1 - \alpha_2) \cos n\beta \tag{3.3}$$

Определим постоянные a_0, a'_n путем точечного удовлетворения граничным условиям на контуре α_1, используя метод наименьших квадратов. Участок контура α_1 от $\beta = 0$ до $\beta = \pi$ разбиваем на N равных по β частей ($N \gg m$). Пронумеруем границы отрезков разбиения таким образом: $\beta_1 = 0, \cdots \beta_k = \beta_0, \cdots \beta_{N+1} = \pi$. Точечное удовлетворение граничным условиям приводит к следующей системе:

$$a_0 + \sum_{n=1}^{m} a_n \cos n\beta_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots k) \tag{3.4}$$

$$a'_0 + \sum_{n=1}^{m} a_n\, n(\alpha_1 - \alpha_2) \operatorname{cth} n(\alpha_1 - \alpha_2) \cos n\beta_j = T_2$$

$$(i = K + 1,\ K + 2,\ \cdots N + 1)$$

Число неизвестных в системе (3.4) значительно меньше числа уравнений. Найдем наивероятнейшее значение искомых постоянных, считая, что полином (3.1) и формула (3.3) дают минимальное квадратичное отклонение от граничных условий на всем множестве точек разбиения. Следуя методу Гаусса [7], условную систему (3.4) преобразуем в нормальную систему уравнений вида

$$\frac{\partial V}{\partial a_0} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial a_2} = 0, \cdots, \quad \frac{\partial V}{\partial a_m} = 0 \tag{3.5}$$

где

$$V = \sum_{i=1}^{k} \left| a_0 + \sum_{n=1}^{m} a_n \cos n\beta_i \right|^2 + \sum_{j=k+1}^{N+1} \left| a'_0 + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{m} a_n\, n(\alpha_1 - \alpha_2) \operatorname{cth} n(\alpha_1 - \alpha_2) \cos n\beta_j - T_2 \right|^2$$

Решение системы (3.5) позволяет определить коэффициенты полинома (3.1), а следовательно, и функцию температур (3.2). Решением уравнения (1.3) является четная по параметру β часть функции (2.3). Уравнения (2.7) и формулы

$$B_0 + N_0 = -ad'\varkappa, \qquad D_0 = \varkappa a \left| d' + \sum_{n=1}^{m} n(c'_n - d_n) \right|$$

Таблица 1

n	a_n/T_2	n	a_n/T_2	n	a_n/T_2
0	0.0933305	6	−0.030368	12	−0.0096106
1	−0.173102	7	0.018395	13	0.01198
2	0.132221	8	0.0018782	14	−0.003031
3	−0.0746454	9	−0.01585	15	−0.0089032
4	0.0180788	10	0.014956	16	0.0095302
5	0.0194677	11	−0.0030231	17	0.0082015

которые получены из условия однозначности перемещений, составляют полную алгебраическую систему относительно постоянных интегрирования функции Ф.

Пример расчета. Параметры пластины следующие: $R_1 = 3$; $R_2 = 1$; $H = 5{,}3$. Размер теплоизолированного участка соответствует $\vartheta_0 = 135°$. Принято $N = 120$, $m = 17$. Проверка граничных условий показала, что погрешность для функции температур и для теплового потока не превышает 1%. За 100% взяты, соответственно, температура T_2 и наибольший тепловой поток. На фиг. 2 построены графики напряжения σ_β на контурах отверстий. В табл. 1 даны значения коэффициентов a_0, a_n функции температур на контуре $\alpha = \alpha_1$.

Саратовский политехнический
институт

Поступила 6 XII 1971

Ա. Ի. ՈՒԶԴԱԼԵՎ, Ս. Մ. ՇԼՅԱԽՈՎ

ՋԵՐՄԱԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԸ ԵՐԿՈՒ ԱՆՀԱՎԱՍԱՐ ՇՐՋԱՆԱՅԻՆ ԱՆՑՔԵՐՈՎ ԹԻԹԵՂԻ ՄԵՋ

Ամփոփում

Հոդվածում բերվում է ջերմային լարումների որոշման խնդրի լուծումը անսահմանափակ թիթեղում, որն ունի երկու անհավասար շրջանային անցքեր։

Օգտագործված են երկբևեռային կոորդինատները։

Վերլուծված են համասեռ և անհամասեռ սահմանային պայմանների մի քանի դեպքերը։

THERMO-ELASTIC STRESSES IN A PLATE WITH TWO UNEQUAL CIRCULAR HOLES

A. I. UZDALIOV, S. M. SHLIAKHOV

Summary

The paper presents a solution to the problem on thermal stresses in an infinite plate with two unequal circular holes. The bipolar coordinates are used. The cases of homogeneous and mixed boundary conditions are examined.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. Наука, М., 1966.
2. *Udoguchi T.* Thermal stress in an infinite elastic body containing circular holes. Proc. 4th Japan Nat. Congr. Appl. Mech., 1954, Tokio, 1955.
3. *Linden C. A.* Thermal stresses in a plate containing two circular holes of equal radius, the boundaries of which are kept at different temperatures. Appl. Scient. Res., A 6, № 2-3, 1956.
4. *Rafalski P.* Three steady state plane thermoelastic problems in regions with cylindrical holes. Arch. Mech. Stos., 2, 18, 1966.
5. *Шаповалов В. Н.* Термоупругая задача для плоскости с двумя круговыми отверстиями. Динамика и прочность машин. Респ. межвед. научн.-техн. сб., вып. 12, 1971.
6. *Уфлянд Я. С.* Биполярные координаты в теории упругости. ГТТИ, М., 1950.
7. *Крылов А. Н.* Лекции о приближенных вычислениях. ГИТТЛ, М., 1954.
8. *Еганян В. В.* Общее решение теории упругости для бесконечной плоскости с двумя круглыми отверстиями, вдоль которых действуют заданные усилия. Изв. АН Арм. ССР, серия физ.-мат. наук, т. 18, № 6, 1965.