

Ս. Գ. ՏԱԱԿՅԱՆ

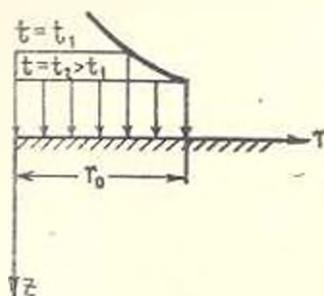
ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ГРАНИЦЫ УПРУГОГО
 ОДНОРОДНОГО ИЗОТРОПНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА
 ПРИ СИЛЬНОМ ВЗРЫВЕ НА ПОВЕРХНОСТИ

§ 1. Постановка задачи. Решение задачи в преобразовании
 Лапласа

Рассматривается задача о волнах в упругой однородной изотропной среде с постоянными Ламе λ , μ и плотностью ρ_0 , занимающей полупространство, (в системе координат (r, θ, z) среда занимает область $r \geq 0, z \geq 0$) (фиг. 1), к границе которой в момент времени $t=0$ приложено давление, вызванное сильным взрывом с цилиндрической симметрией вдоль оси z . Известно [1], что закон движения ударной волны и распределение давления за фронтом ударной волны при точечном сильном взрыве в газе с постоянной начальной плотностью в случае цилиндрической симметрии выражается в виде

$$r_0 = c\sqrt{t}, \quad P = (P_0 t) f\left(\frac{r}{c\sqrt{t}}\right) \quad (1.1)$$

где c и P_0 — постоянные, учитывающие свойства среды и величину энергии заряда. Функция $f(\xi)$ почти постоянна на значительной части интервала $0 < \xi < 1$ и лишь вблизи значения $\xi = 1$ резко возрастает до максимального значения $f(1)$.



Фиг. 1.

Ниже будем решать задачу, сделав упрощение в (1.1), полагая $f(\xi) = \text{const}$. Получающееся при этом решение будет, как можно надеяться, близким к точному и полезным для выявления качественных особенностей движения.

Уравнения распространения упругих волн в среде при отсутствии объемных сил будут

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{c_d^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \frac{\Psi}{r^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \quad (1.2)$$

где $c_d^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho_0$, $c_s^2 = \mu/\rho_0$ — скорости распространения продольной и поперечной волн, φ и Ψ — скалярный и векторный потенциалы, через которые вектор смещений $\bar{u} = u_r \bar{r} + u_z \bar{k}$ определяется уравнением $\bar{u} = \text{grad} \varphi + \text{rot} \Psi$ ($\text{div} \Psi = 0$), то есть

$$u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad u_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{\Psi}{r} \quad (1.3)$$

Требуется найти решение уравнений (1.2) при начальных

$$\varphi(r, z, 0) = \Psi(r, z, 0) = \frac{\partial \varphi(r, z, 0)}{\partial t} = \frac{\partial \Psi(r, z, 0)}{\partial t} = 0 \quad (1.4)$$

и граничных

$$\sigma_{zz}(r, 0, t) = -P_0 H(c|t-r|/t), \quad \sigma_{rz}(r, 0, t) = 0 \quad (1.5)$$

условиях. Фронт распространяющейся нагрузки на поверхности полупространства определяется H -функцией Хевисайда. Напряжения σ_{zz} и σ_{rz} связаны с перемещениями соотношениями

$$\sigma_{zz} = \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\sigma_{rz} = \mu \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \quad (1.6)$$

Граничные условия (1.5) после некоторых упрощений записываются в виде

$$\left| \left(\frac{1}{c_s^2} - \frac{2}{c_d^2} \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial z} + \frac{2}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right|_{z=0} = - \frac{P_0 H(c|t-r|}{t}$$

$$\left| \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - 2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad (1.7)$$

Решение волновых уравнений (1.2), удовлетворяющее начальным (1.4) и граничным (1.7) условиям и условию ограниченности на бесконечности, получим, применяя последовательно преобразование Лапласа по t , а затем преобразование Ганкеля по r [2]. Используя соотношение (1.3) между потенциалами и смещениями и обращая преобразование Ганкеля, получим смещения в изображениях Лапласа

$$\frac{\bar{u}_r}{2P_0} = \int_0^{\infty} n_0 \frac{(1 - e^{-\frac{c^2 k^2}{4p}}) e^{-n_d z} J_1(kr) dk}{L}$$

$$-\int_0^{\infty} \frac{2n_1 n_2 (1 - e^{-\frac{c^2 k^2}{4p}}) e^{-n_1 r^2} J_1(kr) dk}{L} \quad (1.8)$$

$$\frac{\bar{u}_2}{2P_0} = \int_0^{\infty} \frac{n_0 n_1 (1 - e^{-\frac{c^2 k^2}{4p}}) e^{-n_1 r^2} J_0(kr) dk}{kL}$$

$$-\int_0^{\infty} \frac{2kn_1 (1 - e^{-\frac{c^2 k^2}{4p}}) e^{-n_1 r^2} J_0(kr) dk}{L} \quad (1.9)$$

где $n_1^2 = k^2 - p^2/c^2$, $n_2^2 = k^2 - p^2/c_1^2$, $n_0 = 2k^2 + p^2/c_1^2$ (1.10)

$$L = n_1^2 - 4k^2 n_1 n_2$$

u_1 и u_2 — изображения в преобразовании Лапласа u_1 , u_2 , p и k — параметры преобразований Лапласа и Ганкеля соответственно, J_0 и J_1 — функции Бесселя первого рода.

Преобразование Лапласа и Ганкеля приложенной нормальной нагрузки определяется формулой

$$\int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} \frac{P_0 H(c|1-r) e^{-pr} dt}{t} \right) J_0(kr) r dr = \frac{2P_0 (1 - e^{-\frac{c^2 k^2}{4p}})}{k^2} \quad (1.11)$$

которую легко получить, меняя порядок интегрирования и используя известные формулы [2]

$$\int_0^{\infty} J_0(kr) r dr = \frac{a J_1(ka)}{k}, \quad \int_0^{\infty} e^{-pr} J_1(kr) dr = \frac{1 - e^{-\frac{k^2}{4p}}}{k} \quad (1.12)$$

Практически интересно решение задачи на границе полупространства, которым мы и ограничимся.

Положим в формулах (1.8) и (1.9) $z = 0$ и вместо бesselевых функций J_0 и J_1 — их интегральные представления Пуассона [3]

$$J_0(kr) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikr \cos \varphi} d\varphi, \quad J_1(kr) = -\frac{1}{k} \frac{\partial}{\partial r} J_0(kr) \quad (1.13)$$

Внедя замену переменных

$$k \cos \varphi = mp, \quad k \sin \varphi = qp \quad (1.14)$$

то есть перейдя от полярной системы координат к декартовой, будем иметь

$$\frac{\pi |u_2|}{2P_0} = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |M_1(m, q) + M_2(m, q)| \left| 1 - \exp \left[-\frac{pc^2}{4} (m^2 + q^2) \right] \right| e^{-m^2 r^2} dm dq \quad (1.15)$$

$$\frac{\pi p \bar{v}_j}{2P_0} = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [M_2(\omega, q) + M_3(\omega, q)] \left| i - \exp \left[-\frac{pc^2}{4} (\omega^2 + q^2) \right] \right| e^{-i\omega r} d\omega dq \quad (1.16)$$

где

$$M_1(\omega, q) = \frac{i\omega m_0}{(\omega^2 + q^2)R}, \quad M_2(\omega, q) = \frac{-2i\omega m_d m_s}{(\omega^2 + q^2)R} \quad (1.17)$$

$$M_3(\omega, q) = \frac{m_0 m_d}{(\omega^2 + q^2)R}, \quad M_4(\omega, q) = -\frac{2m_d}{R}$$

$$m_d^2 = \omega^2 + q^2 + 1/c_d^2, \quad m_s^2 = \omega^2 + q^2 + 1/c_s^2, \quad m_0 = 2\omega^2 + 2q^2 + 1/c_s^2$$

$$R = m_0^2 - 4(\omega^2 + q^2)m_d m_s \quad (1.18)$$

§ 2. Переход к оригиналам

Процедура обращения преобразований Лапласа \bar{v}_j и \bar{v}_j будет заключаться в приведении каждого из интегралов

$$\bar{v}_j = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M_j(\omega, q) e^{-i\omega r} d\omega dq$$

$$\bar{v}_j = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M_j(\omega, q) \exp \left[-p \left(\frac{c^2 \omega^2 + c^2 q^2}{4} + i\omega r \right) \right] d\omega dq \quad (2.1)$$

к преобразованию Лапласа для известной функции, откуда и найдется его оригинал. В расчетах параметр преобразования Лапласа предполагается положительным числом. Для таких значений p известно, что если оригинал существует, то он единственный.

На комплексной плоскости ω интегралы \bar{v}_j и \bar{v}_j ($j = 1, 2, 3$) имеют особенности: точки ветвления при $\omega = \Omega_2^{\pm}$ и $\omega = \Omega_1^{\pm}$ и простые полюсы при $\omega = \Omega_0^{\pm}$ и $\omega = \Omega_R^{\pm}$, где

$$\Omega_2^{\pm} = \pm i \sqrt{q^2 + \frac{1}{c_d^2}}, \quad \Omega_1^{\pm} = \pm i \sqrt{q^2 + \frac{1}{c_s^2}}$$

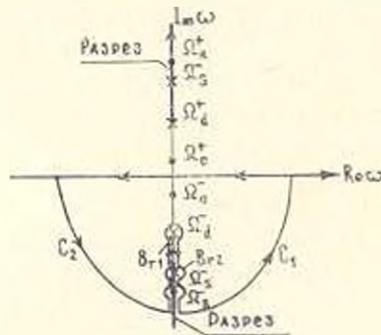
$$\Omega_0^{\pm} = \pm i \sqrt{q^2 + \frac{1}{c_R^2}}, \quad \Omega_R^{\pm} = \pm iq \quad (2.2)$$

а \bar{v}_1 и \bar{v}_{c1} — те же особенности, кроме $\omega = \Omega_0^{\pm}$.

Полюсы при $\omega = \Omega_R^{\pm}$ соответствуют нулям функции Рэлея R , которая имеет простые нули при $\omega^2 + q^2 = -\frac{1}{c_R^2}$, где $c_R < c_s$ — скорость поверхностных волн Рэлея [3].

Подинтегральные функции в формулах (2.1) являются многозначными. Для однозначности подинтегральных функций, проведем разрез, как показано на фиг. 2, фиксируя ветви радикалов m_1 и m_2 условиями $\arg m_1 = 0$, $\arg m_2 = 0$ при $m > 0$.

Обращаем прежде всего v_1 . Рассмотрим подинтегральную функцию \bar{v}_1 по контуру $C = (\text{Im } \omega = 0) + C_1 + Br_1 + Br_2 + C_2$ и применим теорему вычетов Коши. Дуги окружности C_1 и C_2 введены (фиг. 2)



Фиг. 2.

для получения замкнутого контура C . По мере стремления радиуса дуги окружности к бесконечности вклады интегралов по этим дугам стремятся к нулю согласно лемме Жордана. Интегралы по контурам Br_1 и Br_2 путем замены $t = i\omega r$ преобразуются в интегралы по переменной t . Имеем

$$\bar{v}_1 = \int_0^{t_{q_2}} \int_{t_{q_1}}^{\infty} E_1(t, q) e^{-pt} dt dq + \pi c_s^2 \int_0^{\infty} e^{-pq} dq + \Gamma_1 \int_0^{\infty} e^{-pr} \sqrt{q^2 + \frac{1}{c_R^2}} dq \quad (2.3)$$

где

$$E_1(t, q) =$$

$$= \frac{8t \left(\frac{1}{c_s^2} - \frac{2t^2}{r^2} + 2q^2 \right) \sqrt{\frac{t^2}{r^2} - \frac{1}{c_d^2} - q^2} \sqrt{\frac{1}{c_s^2} - \frac{t^2}{r^2} + q^2}}{r^2 \left[\left(\frac{1}{c_s^2} - \frac{2t^2}{r^2} + 2q^2 \right)^4 + 16 \left(\frac{t^2}{r^2} - q^2 \right) \left(\frac{t^2}{r^2} - \frac{1}{c_d^2} - q^2 \right) \left(\frac{1}{c_s^2} - \frac{t^2}{r^2} + q^2 \right) \right]} \quad (2.4)$$

$$\Gamma_1 = \frac{2\pi c_R^2 \left(\frac{c_R}{c_s} - 2 \right) \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_d^2}} \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_s^2}}}{4 - 3 \frac{c_R^2}{c_d^2} - 3 \frac{c_R^2}{c_s^2} + 2 \frac{c_R^4}{c_d^2 c_s^2} - 2 \left(2 - \frac{c_R^2}{c_s^2} \right) \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_d^2}} \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_s^2}}} \quad (2.5)$$

$$t_{q_1} = r \sqrt{q^2 + \frac{1}{c_d^2}}, \quad t_{q_2} = r \sqrt{q^2 + \frac{1}{c_s^2}} \quad (2.6)$$

Первый член в формуле (2.3) представляет собой вклад контуров Γ_1 и Γ_2 , второй — полюса $\omega = \Omega_0^-$ и, наконец, третий — полюса $\omega = \Omega_R^-$.

Меняя порядок интегрирования в первом члене (2.3), а в двух последних слагаемых сделав замену $l = qr$, $t = r \sqrt{q^2 + \frac{1}{c_R^2}}$, обращаем преобразование Лапласа и находим

$$v_1 = [H(t - t_d) - H(t - t_s)] \int_0^{q_d} E_1(t, q) dq + H(t - t_s) \int_{q_s}^{q_d} E_1(t, q) dq + \\ + \frac{\pi c_s^2 H(t)}{r} + \frac{\Gamma_1 c_R t H(t - t_R)}{r | (c_R t)^2 - r^2 } \quad (2.7)$$

где

$$t_d = r/c_d, \quad t_s = r/c_s, \quad t_R = r/c_R \quad (2.8)$$

$$q_d = \sqrt{t^2 - t_d^2} / r, \quad q_s = \sqrt{t^2 - t_s^2} / r \quad (2.9)$$

Обращение \bar{v}_2 , \bar{v}_1 и \bar{v}_1 производится точно так же. Приведем окончательные результаты

$$v_2 = [H(t - t_d) - H(t - t_s)] \int_0^{q_d} G_1(t, q) dq + H(t - t_s) \int_{q_s}^{q_d} G_1(t, q) dq - \\ - \frac{2\pi c_s^2 H(t)}{c_d r} + \frac{\Gamma_2 c_R t H(t - t_R)}{r | (c_R t)^2 - r^2 } \quad (2.10)$$

$$v_1 = [H(t - t_d) - H(t - t_s)] \int_0^{q_d} E_2(t, q) dq + H(t - t_s) \left[\int_{q_s}^{q_d} E_2(t, q) dq + \right. \\ \left. + \text{v. p.} \int_0^{q_s} \bar{E}_2(t, q) dq \right] + \frac{\pi c_s^2 H(t)}{c_d t} \quad (2.11)$$

$$v_1 = [H(t - t_d) - H(t - t_s)] \int_0^{q_d} G_2(t, q) dq + \\ + H(t - t_s) \left[\int_{q_s}^{q_d} G_2(t, q) dq + \text{v. p.} \int_0^{q_s} \bar{G}_2(t, q) dq \right] \quad (2.12)$$

В последней формуле вклад вычета в полюсе $\omega = \Omega_0^-$ отсутствует. Символы в. п. перед интегралами означают, что интегрирование

ведется в смысле главного значения по Коши, ибо полюс $\omega = \Omega_R$ находится между пределами интегрирования.

В этих формулах введены следующие обозначения:

$$G_1(t, q) = 2E_1(t, q) / \left[r^2 \left(\frac{t^2}{r^2} - q^2 \right) \right]$$

$$\Gamma_2 = 2\Gamma_1 \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_d^2}} \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_s^2}} / \left(\frac{c_R^2}{c_s^2} - 2 \right) \quad (2.13)$$

$$E_2(t, q) = -rE_1(t, q) \left(\frac{1}{c_s^2} - \frac{2t^2}{r^2} + 2q^2 \right) / 4t \sqrt{\frac{1}{c_s^2} - \frac{t^2}{r^2} + q^2} \quad (2.14)$$

$$G_2(t, q) = -rG_1(t, q) \left(\frac{1}{c_s^2} - \frac{2t^2}{r^2} + 2q^2 \right) / t \sqrt{\frac{1}{c_s^2} - \frac{t^2}{r^2} + q^2} \quad (2.15)$$

$$\bar{E}_2(t, q) = \frac{-2 \left(\frac{1}{c_s^2} - \frac{2t^2}{r^2} + 2q^2 \right) \sqrt{\frac{t^2}{r^2} - \frac{1}{c_d^2} - q^2}}{X}$$

где

$$X = r \left(\frac{t^2}{r^2} - q^2 \right) \left[\left(\frac{1}{c_s^2} - \frac{2t^2}{r^2} + 2q^2 \right)^2 - 4 \left(\frac{t^2}{r^2} - q^2 \right) \sqrt{\frac{t^2}{r^2} - \frac{1}{c_d^2} - q^2} \right] \times \\ \times \sqrt{\frac{t^2}{r^2} - \frac{1}{c_s^2} - q^2} \quad (2.16)$$

$$\bar{G}_2(t, q) = 2 \left(\frac{t^2}{r^2} - q^2 \right) \bar{E}_2(t, q) / \left(\frac{1}{c_s^2} - \frac{2t^2}{r^2} + 2q^2 \right) \quad (2.17)$$

Метод обращения последних четырех интегралов тот же, что и в предыдущем изложении. Но в данном случае контур интегрирования имеет различные положения относительно разреза в плоскости ω . Действительно, сделав в интегралах \bar{u}_{e1} , \bar{u}_{e2} , \bar{u}_{e3} и \bar{u}_{e4} замену

$$t = i\omega r + \frac{c^2 \omega^2}{4} + \frac{c^2 q^2}{4} \quad (2.18)$$

и решая относительно ω , находим

$$\omega = \omega_{\pm} = -\frac{2ir}{c^2} \pm \frac{2}{c} \sqrt{t - t_{qr}} \quad (2.19)$$

где

$$t_{qr} = \frac{r^2}{c^2} + \frac{c^2 a^2}{4} \quad (2.20)$$

Уравнение (2.19) параметрически определяет прямую, параллельную оси $\text{Re } \omega$, когда параметр t меняется от t_{qr} до бесконечности. В зависимости от значения $-2r/c^2$ эта прямая может пересекать или не пересекать разрез в плоскости ω .

В зависимости от положений точек особенностей подынтегральной функции $\bar{z}_{1,2}$ и точки $\omega = -2i\tau c^2$ в плоскости ω имеются следующие варианты обращения \bar{v}_{c1} , каждому из которых соответствует определенная область границы полупространства.

Область I: $r < r_d$, где $r_d = c^2/2c_d$.

Прямая ω_0 не пересекает разрез для $q \in (0, \infty)$. Полюс $\omega = \Omega_0^-$ находится внутри контура $C = (\text{Im } \omega = 0) + C_1 + \omega_0 + \omega_1 + C_2$ для $q \in [0, 2r/c^2)$ и вне C для $q \in (2r/c^2, \infty)$.

Область II: $r_d < r < r_s$, где $r_s = c^2/2c_s$.

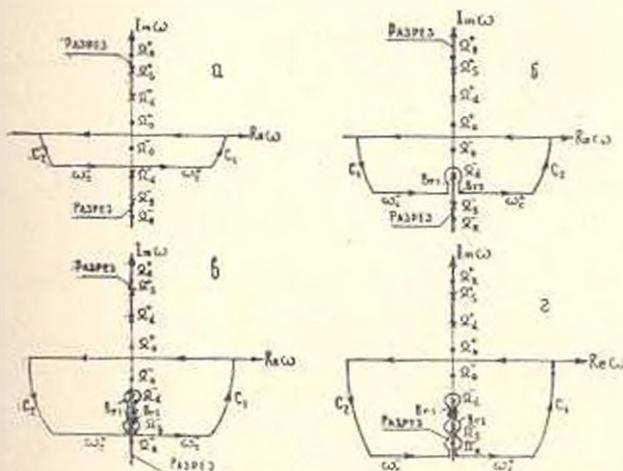
Прямая ω_0 пересекает разрез между точками ветвления $\omega = \Omega_0^-$ и $\omega = \Omega_1^-$ для $q \in [0, Q_{rd})$ и не пересекает разрезы для $q \in (Q_{rd}, \infty)$, где $Q_{rd} = \int \sqrt{\frac{4r^2}{c^4} - \frac{1}{c_d^2}}$. Полюс $\omega = \Omega_0^-$ лежит внутри C для $q \in [0, \infty)$.

Область III: $r_s < r < r_R$, где $r_R = c^2/2c_R$.

Прямая ω_0 пересекает разрез ниже точки ветвления $\omega = \Omega_1^-$ для $q \in [0, Q_{rs})$ и не пересекает части разреза для $q \in (Q_{rs}, \infty)$, где $Q_{rs} = \int \sqrt{\frac{4r^2}{c^4} - \frac{1}{c_s^2}}$. Полюс $\omega = \Omega_0^-$ лежит внутри C для $q \in [0, \infty)$.

Область IV: $r_R < r$.

Прямая ω_0 пересекает разрез ниже точки ветвления $\omega = \Omega_1^-$ для $q \in [0, Q_{rs})$ и не пересекает части разреза для $q \in (Q_{rs}, \infty)$. Полюс $\omega = \Omega_0^-$ лежит на контуре интегрирования для $q \in [0, Q_{R})$ и не лежит для $q \in (Q_{R}, \infty)$, где $Q_{R} = \int \sqrt{\frac{4r^2}{c^4} - \frac{1}{c_R^2}}$.



Фиг. 3.

Полюс $\omega = \Omega_0^-$ лежит внутри C для $q \in [0, \infty)$.

Контур, соответствующий каждой из этих областей, показаны на фиг. 3, причем дуги окружности C_1 и C_2 введены для того, чтобы

получить замкнутый контур S . Для каждого из этих случаев рассмотрим подынтегральную функцию на контуре S и применим теорему Коши о вычетах. Имеем

$$\bar{v}_{r1} = \int_0^{\infty} \int_{t_{qc}}^{\infty} F_1(\omega_c, q) e^{-pt} dt dq - \pi c_r^2 \int_0^{2rc^2} e^{-pqr} dq \quad \text{в области I} \quad (2.21)$$

$$\bar{v}_{c1} = \int_0^{\infty} \int_{t_{qc}}^{\infty} F_1(\omega_c, q) e^{-pt} dt dq + \int_0^{Q_{cd}} \int_{t_{acd}}^{t_{qr}} F_1(\omega_{cd}, q) e^{-pt} dt dq - \pi c_r^2 \int_0^{\infty} e^{-pqr} dq \quad (2.22)$$

в области II

$$\bar{v}_{r1} = \int_0^{\infty} \int_{t_{qr}}^{\infty} F_1(\omega_c, q) e^{-pt} dt dq + \int_0^{Q_{rs}} \int_{t_{qrs}}^{t_{qcd}} F_1(\omega_{rd}, q) e^{-pt} dt dq - \pi c_r^2 \int_0^{\infty} e^{-pqr} dq \quad (2.23)$$

в области III

$$\bar{v}_{c1} = \int_0^{\infty} \int_{t_{qc}}^{\infty} F_1(\omega_c, q) e^{-pt} dt dq + \int_0^{Q_{rs}} \int_{t_{qcd}}^{t_{qrs}} F_1(\omega_{cd}, q) e^{-pt} dt dq - \pi c_r^2 \int_0^{\infty} e^{-pqr} dq +$$

$$+ \Gamma_3 \int_0^{Q_{rR}} \exp \left[-p \left(r \sqrt{q^2 + \frac{1}{c_d^2} - \frac{c^2}{4c_d^2}} \right) \right] dq \quad \text{в области IV} \quad (2.24)$$

где

$$F_1(\omega_c, q) = -\operatorname{Re} M_1(\omega_c, q) \frac{d\omega_c}{dt}, \quad \omega_c = \omega_c^1$$

$$\omega_{rd} = \frac{2i}{c} \left(-\frac{r}{c} + \sqrt{t_{qr} - t} \right), \quad \Gamma_3 = -\Gamma_1/4 \quad (2.25)$$

$$t_{acd} = r \sqrt{q^2 + \frac{1}{c_d^2} - \frac{c^2}{4c_d^2}}, \quad t_{qrs} = r \sqrt{q^2 + \frac{1}{c_s^2} - \frac{c^2}{4c_s^2}} \quad (2.26)$$

Меняя порядок интегрирования в двукратных интегралах и произведя в однократных интегралах замену переменной $t = qr$ и $t = -r \sqrt{q^2 + \frac{1}{c_d^2} - \frac{c^2}{4c_d^2}}$, после выполнения необходимых операций, получим преобразование Лапласа известных оригиналов. Обращая все формулы для разных областей и объединяя их в одну, будем иметь

$$v_{c1} = H(t - t_c) \text{в.р.} \int_0^{q_c} F_1(\omega_c, q) dq +$$

$$+ H(r - r_d) H(r_c - r) H(t - t_{cd}) H(t_{cd}^* - t) \int_{\frac{r}{c}}^{q_{cd}} F_2(\omega_{cd}, q) dq +$$

$$\begin{aligned}
& + H(r - r_s) H(t - t_{cd}) H(t_{cs}^* - t) \text{v. p.} \int_{q_{cs}^*}^{q_{cd}} F_3(\omega_{cd}, q) dq - \\
& - \frac{\pi c_d^2 H(t)}{r} [H(r_d - r) H(2t_c - t) + H(r - r_d)] + \\
& + \frac{H(r - r_R) H(t - t_{cR}) H(t_{cR}^* - t) \Gamma_3(t - \gamma_R^2 t_0)}{r \sqrt{(t - \gamma_R^2 t_0)^2 - t_R^2}}
\end{aligned} \quad (2.27)$$

где

$$t_c = r^2/c^2, \quad t_0 = c^2/4c_d^2, \quad t_{cd} = t_d - t_0, \quad t_{cs} = t_s - \gamma^2 t_0 \quad (2.28)$$

$$t_{cR} = t_R - \gamma_R^2 t_0, \quad \gamma = c_d/c_s, \quad \gamma_R = c_d/c_R$$

$$t_{cd}^* = 2t_c - t_0, \quad t_{cs}^* = 2t_c - \gamma^2 t_0, \quad t_{cR}^* = 2t_c - \gamma_R^2 t_0$$

$$t_{csd}^* = r \sqrt{\frac{4r^2}{c^2} - \frac{1}{c_s^2} + \frac{1}{c_d^2} - t_0} \quad (2.29)$$

$$q_c = \frac{2}{c} \sqrt{t - t_c}, \quad q_{cd} = \sqrt{(t + t_0)^2 - t_d^2}$$

$$q_{cs} = \sqrt{(t + \gamma^2 t_0)^2 - t_s^2}, \quad q_{cs}^* = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_c \\ q_c & \text{при } t > t_c \end{cases} \quad (2.30)$$

$$q_{csd}^* = \begin{cases} q_{cd} & \text{при } t < t_{csd}^* \\ q_{cs} & \text{при } t > t_{csd}^* \end{cases}, \quad q_{cs}^* = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_{cs} \\ q_{cs} & \text{при } t > t_{cs} \end{cases}$$

Оригиналы v_{c2} , v_{c3} , v_{c4} образов \bar{v}_{c2} , \bar{v}_{c3} , \bar{v}_{c4} найдутся таким же образом. Не останавливаясь на подробном выводе этих формул, приведем окончательные результаты:

$$\begin{aligned}
v_{c2} = & H(t - t_c) \text{v. p.} \int_0^{q_c} F_2(\omega_c, q) dq + H(r - r_d) H(r_s - r) H(t - t_{cd}) \times \\
& \times H(t_{cd}^* - t) \int_{q_{cs}^*}^{q_{cd}} F_2(\omega_{cd}, q) dq + H(r - r_s) H(t - t_{cd}) H(t_{cs}^* - t) \times \\
& \times \text{v. p.} \int_{q_{cs}^*}^{q_{cd}} F_2(\omega_{cd}, q) dq + \frac{\pi c^3 H(t)}{c_d r} [H(r_d - r) H(2t_c - t) + \\
& + H(r - r_d)] + \frac{H(r - r_R) H(t - t_{cR}) H(t_{cR}^* - t) \Gamma_4(t + \gamma_R^2 t_0)}{r \sqrt{(t + \gamma_R^2 t_0)^2 - t_R^2}}
\end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned}
v_{r3} = & H(t - t_1) \text{v. p.} \int_0^{q_r} F_2(\omega_r, q) dq + H(r - r_d) H(r - r) H(t - t_d) \times \\
& \times H(t_d - t) \int_0^{q_{cd}} F_2(\omega_{cd}, q) dq + H(r - r_s) H(t_s - t) \left[H(t - t_d) \times \right. \\
& \times \text{v. p.} \int_0^{q_{cd}} F_2(\omega_{cd}, q) dq - H(t - t_s) \text{v. p.} \int_0^{q_{cs}} F_3(\omega_{cd}, q) dq \left. \right] - \\
& - \frac{c_R^2 H(r_s - r) H(t)}{c_R t} [H(2t_s - t) - 1] \quad (2.32)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{r3} = & H(t - L) \text{v. p.} \int_0^{q_r} F_1(\omega_r, q) dq + H(r - r_d) H(r - r) H(t - t_d) \times \\
& \times H(t_s - t) \int_0^{q_{cd}} F_3(\omega_{cd}, q) dq + H(r - r_s) H(t_s - t) \left[H(t - t_d) \times \right. \\
& \times \text{v. p.} \int_0^{q_{cd}} F_4(\omega_{cd}, q) dq - H(t - t_s) \int_0^{q_{cs}} F_4(\omega_{cd}, q) dq \left. \right] \quad (2.33)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
F_2(\omega, q) &= -\text{Re } 2iM_2(\omega, q) \frac{d\omega}{dt}, & F_3(\omega, q) &= -2\text{Re } M_3(\omega, q) \frac{d\omega}{dt} \\
F_4(\omega, q) &= -2\text{Re } M_4(\omega, q) \frac{d\omega}{dt} \quad (2.34)
\end{aligned}$$

Таким образом, получены оригиналы каждого слагаемого радиального и вертикального компонентов скорости. С учетом свойства линейности преобразования Лапласа, мы найдем и оригиналы для радиального и вертикального компонентов скорости.

Компонента скорости по направлению r представляет собой сумму $v_{r1}, v_{r2}, v_{r3}, v_{r4}$, а по направлению z — сумму $v_{z1}, v_{z2}, v_{z3}, v_{z4}$. Имеем

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_{r3}}{\partial P_0} = & \left[H(t - t_d) - H(t - t_s) \right] \int_0^{q_r} [E_1(t, q) + G_1(t, q)] dq + \\
& + H(t - t_s) \int_0^{q_d} [E_1(t, q) + G_1(t, q)] dq + \frac{(\Gamma_1 + \Gamma_2) c_R t H(t - t_R)}{r \sqrt{(c_R t)^2 - r^2}} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + H(t - t_c) \text{v. p.} \int_0^{q_c} [F_1(\omega_c, q) + F_2(\omega_c, q)] dq + H(r - r_d) H(r_s - r) \times \\
 & \times H(t - t_{cd}) H(t_{cd} - t) \int_{q_c}^{q_d} [F_1(\omega_{cd}, q) + F_2(\omega_{cd}, q)] dq + H(r - r_s) \times \\
 & \times H(t - t_{cd}) H(t_{ca}^* - t) \text{v. p.} \int_{q_{ca}^*}^{q_{cd}} [F_1(\omega_{cd}, q) + F_2(\omega_{cd}, q)] dq + \\
 & + \frac{(\Gamma_3 + \Gamma_4) H(r - r_R) H(t - t_{cR}) H(t_{cR}^* - t) (t + \frac{1}{\gamma_R} t_0)}{r \sqrt{(t + \frac{1}{\gamma_R} t_0)^2 - t_{cR}^2}} + \\
 & + \frac{\pi c_2^2 (\gamma + 1) H(r_d - r) H(t - 2t_c)}{2r} \quad (2.35)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\pi \mu_0}{2P_0} = & [H(t - t_d) - H(t - t_s)] \int_{q_s}^{q_d} [E_2(t, q) + G_2(t, q)] dq + H(t - t_s) \times \\
 & \times \left\{ \int_{q_s}^{q_d} [E_2(t, q) + G_2(t, q)] dq + \text{v. p.} \int_0^{q_s} [E_2(t, q) + G_2(t, q)] dq \right\} + \\
 & + H(t - t_s) \text{v. p.} \int_0^{q_s} [F_3(\omega_c, q) + F_4(\omega_c, q)] dq + H(r - r_d) H(r_s - r) \times \\
 & \times H(t - t_{cd}) H(t_{cd} - t) \text{v. p.} \int_{q_c}^{q_d} [F_3(\omega_{cd}, q) + F_4(\omega_{cd}, q)] dq + H(r - r_s) \times \\
 & \times H(t_{ca}^* - t) \left| H(t - t_{cd}) \int_{q_{ca}^*}^{q_{cd}} [F_3(\omega_{cd}, q) + F_4(\omega_{cd}, q)] dq + H(t - t_{ca}^*) \times \right. \\
 & \left. \times \text{v. p.} \int_{q_c}^{q_{ca}^*} [F_3(\omega_{cd}, q) + F_4(\omega_{cd}, q)] dq \right\} + \frac{\pi c_2^2 H(r_d - r) H(t - 2t_c)}{c_2 t} \quad (2.36)
 \end{aligned}$$

Обратим внимание на слагаемые этих формул. Первые три члена в них представляют собой систему поля, исходящих из начального

положения нагрузки. Она представляется продольной, поперечной и Рэлеевской волнами. Более сложной является картина распространения воли, оторвавшихся от фронта распространяющейся нагрузки. На границе полупространства в области $r < r_d$ фронт нагрузки распространяется со сверхзвуковой скоростью. На характерном расстоянии r_d скорость фронта нагрузки становится равной скорости продольной волны. С этого момента времени в области $r_d < r < r_c$ распространяется продольная волна, оторвавшаяся от фронта нагрузки. Поперечная волна оторвется от фронта нагрузки на характерном расстоянии r_c , когда скорость фронта нагрузки сравняется со скоростью поперечной волны. Описанию соответствуют следующие три члена в (2.35) и (2.36). Наконец, предпоследние члены в формулах (2.35) и (2.36) представляют собой связанные нагрузкой волны Рэлея, формирующиеся на характерном расстоянии $r = r_R$. Этот член комбинируется с шестым членом (2.35), делая v непрерывным, когда $t \rightarrow t_{Rc}$, что и следовало ожидать из физических соображений. Шестой член является несобственным интегралом потому, что его подынтегральное выражение содержит особенность первого порядка при $q = \sqrt{\frac{1r^2}{c^2} - \frac{1}{c_R^2}}$. По-

следний член в формулах устраняет конечный разрыв несобственных интегралов при $H(t - t_c)$, когда $t \rightarrow 2t_c$, делая скорость непрерывной. Эти интегралы имеют особенность первого порядка при $q = 2r^2 c^2$.

Нетрудно заметить из формул (2.35) и (2.36), что когда $t \rightarrow t_c$, $t \rightarrow t_{ca}$ и $t \rightarrow t_{ca}$, скорость является непрерывной, то есть $t = t_c$, $t = t_{ca}$ и $t = t_c$ не являются фронтами волн.

§ 3. Прифронтовые разложения волн

Скорость на фронтах воли $t = t_d$, $t = t_{ca}$, $t = t_R$, $t = t_c$, $t = t_{cd}$ и $t = t_{ca}$ определяется путем разложения полученных формул в окрестностях этих характерных времен. Чтобы получить эти разложения удобно в формулах (2.35) и (2.36) исключить время в пределах интегралов с помощью замены

$$q = \sqrt{q_1^2 + (q_2^2 - q_1^2) \sin^2 \alpha} \quad (3.1)$$

где q_1 и q_2 — нижний и верхний пределы интеграла.

Таким образом, имеем прифронтовые разложения

$$\int_{q_1}^{q_2} E_1(t, q) dq = \frac{a_1}{r^2} (t - t_d) + O(t - t_d)^2$$

$$\int_0^{q_d} G_l(t, q) dq = \frac{a_l}{r^l} (t - t_d) + O(t - t_d)^2 \quad (l = 1, 2), \quad \text{когда } t \rightarrow t_d \quad (3.2)$$

$$\int_{q_1}^{q_2} E_i(t, q) dq = \frac{b_i}{r} + O(t - t_i)$$

$$\int_{q_1}^{q_2} G_i(t, q) dq = \frac{b_i}{r} + O(t - t_i) \quad (i = 1, 2), \quad \text{когда } t \rightarrow t_i \quad (3.3)$$

$$\frac{(\Gamma_1 + \Gamma_2) C_R t}{r |c_R t^2 - r^2} = \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{|2c_R r|} (t - t_R)^{-\frac{1}{2}} + O(t - t_R)^{\frac{1}{2}}$$

когда $t \rightarrow t_R$

$$\int_{q_1}^{q_2} E_2(t, q) dq = \frac{c_2}{r^{\frac{3}{2}}} (t - t_2)^{\frac{1}{2}} + O(t - t_2)^{\frac{3}{2}}$$

$$\int_{q_1}^{q_2} \bar{G}_2(t, q) dq = \frac{c_2}{r^{\frac{3}{2}}} (t - t_2)^{\frac{1}{2}} + O(t - t_2)^{\frac{3}{2}}, \quad \text{когда } t \rightarrow t_2 \quad (3.5)$$

$$\int_{q_1}^{q_2} E_3(\omega_c, q) dq = a_3 + O(t - t_c)^{\frac{1}{2}}$$

$$\int_{q_1}^{q_2} G_3(\omega_c, q) dq = a_3 + O(t - t_c)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{когда } t \rightarrow t_c \quad (3.6)$$

$$\int_{q_1}^{q_2} E_4(\omega_c, q) dq = \begin{cases} a_{3r} + O(t - t_c)^{\frac{1}{2}} & \text{для } r < r_c \\ O(t - t_c)^{\frac{1}{2}} & \text{для } r > r_c \end{cases} \quad \text{когда } t \rightarrow t_c \quad (3.7)$$

$$\int_{q_1}^{q_2} G_4(\omega_c, q) dq = \begin{cases} a_{3r} + O(t - t_c)^{\frac{1}{2}} & \text{для } r < r_c \\ O(t - t_c)^{\frac{1}{2}} & \text{для } r > r_c \end{cases} \quad \text{когда } t \rightarrow t_c \quad (3.8)$$

$$\int_{q_1}^{q_2} E_i(\omega_{cd}, q) dq = b_{ir} (t - t_{cd})^{\frac{1}{2}} + O(t - t_{cd})^{\frac{3}{2}}$$

$$\int_{q_1}^{q_2} G_i(\omega_{cd}, q) dq = b_{ir} (t - t_{cd})^{\frac{1}{2}} + O(t - t_{cd})^{\frac{3}{2}}, \quad \text{когда } t \rightarrow t_{cd} \quad (3.9)$$

($i = 3, 4$)

$$\int_{q_{c1}}^{q_{c2}} E_2(\omega_{c1}, q) dq = O(t - t_{c1})^{\frac{3}{2}}, \quad \int_{q_{c1}}^{q_{c2}} G_2(\omega_{c1}, q) dq = O(t - t_{c1})^{\frac{3}{2}} \quad (3.10)$$

когда $t \rightarrow t_{c1}$

$$\int_{q_{c1}}^{q_{c2}} E_1(\omega_{c1}, q) dq = d_{c1}(t - t_{c1})^{\frac{1}{2}} + O(t - t_{c1})^{\frac{3}{2}}$$

$$\int_{q_{c1}}^{q_{c2}} E_1(\omega_{c2}, q) dq = d_{c2}(t - t_{c2})^{\frac{1}{2}} + O(t - t_{c2})^{\frac{3}{2}}, \quad \text{когда } t \rightarrow t_{c2} \quad (3.11)$$

$$\int_{q_{c1}}^{q_{c2}} E_1(\omega_{c3}, q) dq = e_{c3}(t - t_{c3})^{\frac{1}{2}} + O(t - t_{c3})^{\frac{3}{2}} \quad (3.12)$$

когда $t \rightarrow t_{c3}$

$$\int_{q_{c1}}^{q_{c2}} G_1(\omega_{c3}, q) dq = e'_{c3}(t - t_{c3})^{\frac{1}{2}} + O(t - t_{c3})^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{(\Gamma_3 + \Gamma_4)(t + \gamma^2 t_0)}{r + (t + \gamma^2 t_0)^2 - t_R^2} = \frac{\Gamma_3 + \Gamma_4}{1 - 2c_R r} (t - t_{cR})^{\frac{1}{2}} + O(t - t_{cR})^{\frac{3}{2}} \quad (3.13)$$

когда $t \rightarrow t_{cR}$

В этих выражениях a_{c1}, a_{c2} и т. д. — коэффициенты прифронтовых разложений, которые не приводим из-за громоздкости.

На основании полученных прифронтовых разложений можно сделать следующие выводы.

1. Порядок радиального и вертикального компонентов скорости в окрестностях соответствующих волн одинаков. При этом для волн, исходящих из начального положения нагрузки, скорость на фронте продольных волн непрерывна, на фронте поперечных волн имеет конечный разрыв, а на фронте волны Рэлея имеет особенность полонинного порядка, то есть испытывает бесконечный разрыв порядка

$$(t - t_R)^{-\frac{1}{2}}.$$

2. Скорость на фронте нагрузки испытывает конечный разрыв, а на фронтах продольных и поперечных волн, оторвавшихся от фронта нагрузки, непрерывна.

3. На фронте волны Рэлея, связанной с нагрузкой, скорость испытывает бесконечный разрыв порядка $(t - t_R)^{-\frac{1}{2}}$.

4. По мере удаления на большие расстояния от точки приложения

нагрузки (эпицентра нагрузки) скорость убывает как r^{-2} , r^{-1} и $r^{-1/2}$ соответственно для продольных, поперечных и Рэлеяских волн, исходящих из начального положения нагрузки.

5. На больших расстояниях от точки приложения нагрузки скорость убывает как r^{-4} , r^{-4} и $r^{-1/2}$ на фронтах $t = t_1$, $t = t_2$ и $t = t_{CR}$ соответственно. Полученный закон затухания скорости в волнах Рэлея по мере удаления от точки приложения нагрузки ($\sim r^{-1/2}$) согласуется с известными результатами [3, 4, 5]. Таким образом, на больших расстояниях от приложения нагрузки заметные динамические эффекты могут проявляться лишь при прохождении волны Рэлея.

Ерванский политехнический институт

им. К. Маряса

Поступила 6 IV 1973

Ս. Գ. ՏԱԽԱԿՅԱՆ

ԳԻՆԱՄԻՎԱԿԱՆ ԿՆԻՒՆ ԲԱՌԱՉԳԱԿԱՆ, ՉԱՐԱՍԻՄԻ, ԻԶՈՏՐՈՊ
ԿՐԱՍԱՐԱՐԱՆՈՒԹՅԱՆ ԽԱՂՈՒՆԻ ՉԱՐԱՐ, ՄԱԿԵՐՆԵՎՈՒՅԹԻ ՎՐԱ
ՈՒԿԻՆԸ ՊԱՅՅՅՈՒՆԻ ԳԵՊԵՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո ս մ

Գիտարկվում է համասեռ, իզոտրոպ կիսատարածությունում առաձգական ալիքների տարածման մասին առանցքասիմետրիկ խնդիրը. մակերևույթի վրա ուժեղ պայթյունի դեպքում:

Լապլասի և Հանկելի ինտեգրալ ձևափոխությունների մեթոդով ստացվում է խնդրի լուծումը պատկերներով: Այնուհետև կիսատարածության սահմանի համար բերվում են արագության պատկերների շրջումը և ստացված բանաձևերի հետազոտումը:

THE DYNAMIC PROBLEM FOR THE BOUNDARY OF AN ELASTIC UNIFORM ISOTROPIC SEMISPACE UNDER A POWERFUL EXPLOSION ON ITS SURFACE

S. G. SAHAKIAN

S u m m a r y

The axisymmetric problem of elastic wave-propagation in a uniform isotropic semispace under a powerful explosion on its surface is examined.

By Laplace and Hankel's integral transformation method the solution to the problem is obtained in images. Further, the transformation of velocity images and the analysis of the formulas derived for the semispace boundary are presented.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. Изд-во «Наука», М., 1972.
2. Снегдин И. Преобразования Фурье. ИЛ, М., 1955.
3. Lamb H. On the Propagation of Tremors over the Surface of Elastic Solid. Philosophical Transactions of the Royal Society, London, Series A, vol. 203, 1904.
4. Нарышкина Е. А. () волны Рэлея в пространстве трех измерений. Труды СИ, А., № 48, 1934.
5. Gahlenholmer D. C. Response of an Elastic Half Space to Expanding Surface Loads. Transactions of the ASME, E 37, № 1, 1970.