ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

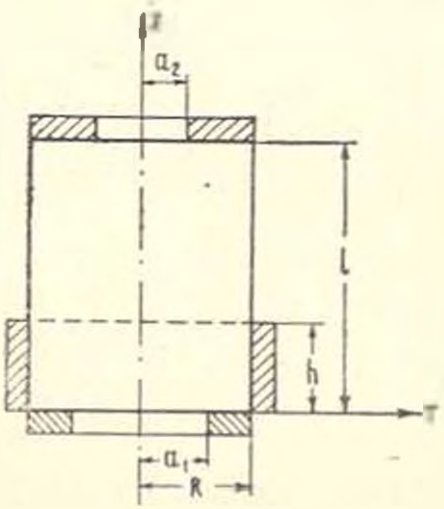
Մեխանիկա XXVI, № 5, 1973 Механика

А. А. БАБЛОЯН, А. П. МЕЛКОНЯН

ОБ ОДНОЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ЦИЛИНДРА КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Осесимметричные контактные задачи для сплошных и полых цилиндров, когда смешанные условия заданы на цилиндрической поверхности, исследовались в работах Окубо [1], П. З. Лившица [2], В. М. Александрова [3, 4], Г. Я. Попова [5] и других. В работах [6, 7] приводятся решения осесимметричной задачи для цилиндра конечной длины в случае смешанных граничных условий на одной или обеих торцевых плоскостях.

В настоящей работе приводится решение осесимметричной задачи теории упругости для цилиндра конечной длины, когда граничные условия как на цилиндрической поверхности, так и на обеих торцевых плоскостях заданы в смешанном виде. Предполагается, что касательные напряжения на всей поверхности цилиндра отсутствуют.



Фиг. 1

Решение задачи представлено в виде суммы рядов Фурье и Фурье-Дини, коэффициенты которых определяются из системы трех парных рядов-уравнений, содержащих функции Бесселя или тригонометрические функции. Далее задача сведена к решению совокупности трех бесконечных систем линейных алгебраических уравнений, свободные члены которых стремятся к нулю. Доказывается, что эти системы не только квазивполне регулярны, но и суммы модулей коэффи-

циентов при неизвестных стремятся к нулю. Получены формулы для контактных напряжений с выделенной особенностью и для перемещений вне контакта.

1. Рассмотрим осесимметричную задачу теории упругости о равновесии круглого цилиндра конечной длины, когда на кольцевых областях (наружный диаметр которых совпадает с диаметром цилиндра) торцевых плоскостей заданы нормальные перемещения, а на остальной части — напряжения. Граничные условия на цилиндрической поверхности также заданы в смешанном виде, а именно: на части ее поверхности ($0 \leqslant z \leqslant h < l$, $r = R$) заданы нормальные перемещения, а в области поверхности ($h < z < l$) — заданы напряжения (фиг. 1).

Граничные условия для вышесформулированной задачи запишутся в виде

$$\tau_{rz}(r, 0) = \tau_{rz}(r, l) = \tau_{rz}(R, z) = 0 \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned} &\sigma_z(r, 0) = f_1(r) \quad (0 < r < a_1); && u_r(r, 0) = \tau_{11}(r) \quad (a_1 \leqslant r \leqslant R) \\ &\sigma_z(r, l) = f_2(r) \quad (0 < r < a_2); && u_r(r, l) = \tau_{12}(r) \quad (a_2 \leqslant r \leqslant R) \\ &u_r(R, z) = \tau_{13}(z) \quad (0 \leqslant z \leqslant h); && \sigma_r(R, z) = f_3(z), \quad (h < z < l) \end{aligned} \tag{1.2}$$

где l — высота, R — радиус цилиндра, $f_i(x)$ — интегрируемые, а $\tau_{ij}(x)$ — кусочно-гладкие функции ($i = 1, 2, 3$).

Бигармоническую функцию Лява для рассматриваемой здесь задачи представим в виде суммы рядов Фурье и Фурье-Дини

$$\begin{aligned} \Phi(r, z) = \frac{\beta_0^{(1)}}{6(1-\nu)} \Bigg\{ \Bigg[X_0^{(2)} - X_0^{(3)} + 4(1-\nu)\frac{l}{R} X_0^{(3)} \Bigg] \frac{z^3}{l^2} - 3X_0^{(3)} \frac{z^3}{l^2} - \\ - 3(1-2\nu) X_0^{(3)} \frac{zr^2}{Rl^2} \Bigg\} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k^{(1)}}{\alpha_k^3} \Bigg[2\nu \frac{\operatorname{sh}\alpha_k(l-z)}{\operatorname{sh}\gamma_k} + \alpha_k z \frac{\operatorname{ch}\alpha_k(l-z)}{\operatorname{sh}\gamma_k} - \\ - \gamma_k \frac{\operatorname{sh}\alpha_k z}{\operatorname{sh}^2\gamma_k} \Bigg] J_0(\alpha_k r) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k^{(2)}}{\alpha_k^3} \Bigg[2\nu \frac{\operatorname{sh}\alpha_k z}{\operatorname{sh}\gamma_k} - \alpha_k z \frac{\operatorname{ch}\alpha_k z}{\operatorname{sh}\gamma_k} + \\ + \gamma_k \frac{\operatorname{ch}\gamma_k \operatorname{sh}\alpha_k z}{\operatorname{sh}^2\gamma_k} \Bigg] J_0(\alpha_k r) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k^{(3)}}{\alpha_k^2} \Bigg[\alpha_k \Omega_1(r) - 2(2-\nu) \frac{I_0(\alpha_k r)}{I_1(\omega_k)} \Bigg] \sin \alpha_k z \end{aligned} \tag{1.3}$$

где

$$\Omega_k(r) = \frac{r I_1(\omega_k) I_1(\alpha_k r) - R I_1(\omega_k) I_0(\alpha_k r)}{I_1^2(\omega_k)} \tag{1.4}$$

$$\beta_0 = \frac{2(1-\nu)^2}{(1-2\nu) l}, \qquad \alpha_k = \frac{\pi k}{l}, \qquad \omega_k = \alpha_k R, \quad \gamma_k = \alpha_k l$$

ν — коэффициент Пуассона, G — модуль сдвига, α_k — положительные корни уравнения $J_1(\alpha_k R) = 0$. $J_i(x)$ — функции Бесселя, $I_i(x)$ — модифицированные цилиндрические функции первого рода, $X_k^{(i)}$ — неизвестные постоянные.

Для компонент напряжений и перемещений, в силу (1.3) и известных представлений их через бигармоническую функцию, получим следующие выражения:

$$\sigma_r = \frac{\varkappa_0}{1-\nu}[X_0^{(2)} - X_0^{(1)}] + \frac{\varepsilon_0}{2\nu} X_0^{(3)} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} X_k^{(1)} \left| \frac{\varphi_k(z)}{\lambda_k J_0(\lambda_k R)} \frac{dJ_1(\lambda_k r)}{dr} - 2\nu \frac{\operatorname{ch}\lambda_k(l-z)}{\operatorname{sh}\gamma_k} \frac{J_1(\lambda_k r)}{r} \right| +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} X_k^{(2)} \left| \frac{\psi_k(z)}{\lambda_k J_0(\lambda_k R)} \frac{dJ_1(\lambda_k r)}{dr} + 2\nu \frac{\operatorname{ch}\lambda_k z}{\operatorname{sh}\gamma_k} \frac{J_1(\lambda_k r)}{r} \right| +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k X_k^{(3)}}{I_1^2(\omega_k)} \left| [\omega_k I_0(\omega_k) I_0(\alpha_k r) - \alpha_k r I_1(\omega_k) I_1(\alpha_k r)] - \right.$$

$$- 2(1-\nu)\frac{I_1(\omega_k) I_1(\alpha_k r)}{\alpha_k r} + \left[I_1(\omega_k) I_0(\alpha_k r) - \right.$$

$$\left. \left. - \frac{\omega_k}{\alpha_k r} I_0(\omega_k) I_1(\alpha_k r) \right] \right| \cos \alpha_k z$$

$$\sigma_z = \frac{\varepsilon_0}{2\nu}[X_0^{(2)} - X_0^{(1)}] + \varepsilon_0 X_0^{(3)} -$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty} X_k^{(1)} \left| \varphi_k(z) + \frac{2\lambda_k \operatorname{ch}\lambda_k(l-z)}{\operatorname{sh}\gamma_k} J_0(\lambda_k R) \right| \frac{J_0(\lambda_k r)}{J_0(\lambda_k R)} -$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty} X_k^{(2)} \left| \psi_k(z) - \frac{2\nu_k \operatorname{ch}\lambda_k z}{\operatorname{sh}\gamma_k} J_0(\lambda_k R) \right| \frac{J_0(\lambda_k r)}{J_0(\lambda_k R)} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 X_k^{(3)} \Omega_k(r) \cos \alpha_k z$$

$$\tau_{rz} = \sum_{k=1}^{\infty} X_k^{(1)} \lambda_k \left| \frac{\operatorname{sh}\lambda_k z}{\operatorname{sh}^2 \gamma_k} - \frac{\lambda_k z \operatorname{ch}\lambda_k(l-z)}{\operatorname{sh}\gamma_k} \right| J_1(\lambda_k r) + \qquad (1.5)$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} X_k^{(2)} \gamma_k \frac{\lambda_k z \operatorname{sh}\gamma_k \operatorname{ch}\lambda_k z - \gamma_k \operatorname{ch}\gamma_k \operatorname{sh}\lambda_k z}{\operatorname{sh}^2 \gamma_k} J_1(\lambda_k r) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 X_k^{(3)} \frac{r I_1(\omega_k) I_0(\alpha_k r) - R I_0(\omega_k) I_1(\alpha_k r)}{I_1^2(\omega_k)} \sin \alpha_k z$$

$$2Gu_r = \frac{2(1-\nu)}{R} X_0^{(3)} r +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k^{(1)}}{\lambda_k} \left| \varphi_k(z) \frac{J_1(\lambda_k r)}{J_0(\lambda_k R)} + 2\nu\lambda_k \frac{\operatorname{ch}\lambda_k(l-z)}{\operatorname{sh}\gamma_k} J_1(\lambda_k r) \right| +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{X_k^{(2)}}{\lambda_k}\left|\gamma_k(z)\frac{J_1(\lambda_k r)}{J_0(\lambda_k R)}-2\omega_k\frac{\operatorname{ch}\lambda_k z}{\operatorname{sh}\gamma_k}J_1(\lambda_k r)\right|-$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}X_k^{(3)}\frac{\alpha_k r I_1(\omega_k)I_0(\alpha_k r)-\omega_k I_0(\omega_k)I_1(\alpha_k r)-2(1-\nu)I_1(\omega_k)I_1(\alpha_k r)}{I_1^2(\omega_k)}\cos\alpha_k z$$

$$2Gu_z=2(1-\nu)\left|\left(1-\frac{z}{l}\right)X_0^{(1)}+\frac{z}{l}X_0^{(2)}\right|-$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}X_k^{(1)}\left|\gamma_k\frac{\operatorname{sh}\lambda_k z}{\operatorname{sh}^2\gamma_k}-\frac{\lambda_k z\operatorname{ch}\lambda_k(l-z)}{\operatorname{sh}\gamma_k}-2(1-\nu)\frac{\operatorname{sh}\lambda_k(l-z)}{\operatorname{sh}\gamma_k}\right]J_0(\lambda_k r)-$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}X_k^{(2)}\left|\lambda_k z\frac{\operatorname{ch}\lambda_k z}{\operatorname{sh}\gamma_k}-\gamma_k\frac{\operatorname{ch}\gamma_k\operatorname{sh}\lambda_k z}{\operatorname{sh}^2\gamma_k}-\right.$$

$$\left.-2(1-\nu)\frac{\operatorname{sh}\lambda_k z}{\operatorname{sh}\gamma_k}\right|J_0(\lambda_k r)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}X_k^{(3)}\alpha_k\left|\Omega_k(r)-2\nu\frac{I_0(\lambda_k r)}{\alpha_k I_1(\omega_k)}\right|\sin\alpha_k z$$

где

$$\varepsilon_0=\frac{4\nu(1-\nu)}{(1-2\nu)R}$$

$$\varphi_k(z)=\lambda_k J_0(\lambda_k R)\left|\lambda_k z\frac{\operatorname{sh}\lambda_k(l-z)}{\operatorname{sh}\gamma_k}-\frac{\operatorname{ch}\lambda_k(l-z)}{\operatorname{sh}\gamma_k}+\frac{\gamma_k\operatorname{sh}\lambda_k z}{\operatorname{sh}^2\gamma_k}\right| \tag{1.6}$$

$$\psi_k(z)=\lambda_k J_0(\lambda_k R)\left|-\lambda_k(l-z)\frac{\operatorname{sh}\lambda_k z}{\operatorname{sh}\gamma_k}+\frac{\operatorname{ch}\lambda_k z}{\operatorname{sh}\gamma_k}-\frac{\gamma_k\operatorname{ch}\lambda_k(l-z)}{\operatorname{sh}^2\gamma_k}\right|$$

Как следует из (1.5), граничные условия (1.1) удовлетворяются тождественно, а условия (1.2) приводят к следующей системе из трех парных рядов-уравнений относительно неизвестных $X_k^{(i)}$:

$$\beta_0[X_0^{(2)}-X_0^{(1)}]+\varepsilon_0 X_0^{(3)}-\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k[(1+N_k)X_k^{(1)}-M_k X_k^{(2)}]J_0(\lambda_k r)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^2 X_k^{(3)}\Omega_k(r)=f_1(r)\qquad(0<r<a_1)\tag{1.7}$$

$$X_0^{(1)}+\sum_{k=1}^{\infty}X_k^{(1)}J_0(\lambda_k r)=\frac{G}{1-\nu}\tau_{zr}(r)\qquad(a_1<r<R)$$

$$\beta_0[X_0^{(2)}-X_0^{(1)}]-\varepsilon_0 X_0^{(3)}+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k[(1+N_k)X_k^{(1)}-$$

$$-M_k X_k^{(1)}]\, J_0(\lambda_k r) + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \alpha_k^2 Q_k(r)\, X_k^{(3)} = f_2(r) \quad (0 < r < a_2) \tag{1.8}$$

$$X_0^{(2)} + \sum_{k=1}^{\infty} X_k^{(2)} J_0(\lambda_k r) = \frac{G}{1-\nu}\, \tau_{i_2}(z) \quad (a_2 < r < R)$$

$$X_0^{(3)} + \sum_{k=1}^{\infty} X_k^{(3)} \cos \alpha_k z = \frac{G}{1-\nu}\, \tau_{i_3}(z) \quad (0 < z < h)$$

$$\frac{\nu p_0}{1-\nu} [X_0^{(2)} - X_0^{(1)}] + \frac{\varepsilon_0}{2\nu} X_0^{(3)} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k (1 - Q_k) X_k^{(3)} \cos \alpha_k z + \tag{1.9}$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} [\tau_k(z) X_k^{(1)} + \varphi_k(z) X_k^{(2)}] = f_3(z) \quad (h < z < l)$$

где

$$M_k = \frac{1 + \gamma_k \operatorname{cth} \gamma_k}{\operatorname{sh} \gamma_k}, \quad 1 + N_k = \operatorname{cth} \gamma_k + \frac{\gamma_k}{\operatorname{sh}^2 \gamma_k}$$

$$1 - Q_k = \frac{\omega_k^2 [J_0^2(\omega_k) - J_1^2(\omega_k)] - 2(1-\nu) J_1^2(\omega_k)}{\omega_k J_1^2(\omega_k)} \tag{1.10}$$

Функции $\tau_{i_l}(r)$, заданные соответственно в интервалах $[0, a_l]$, продолжим непрерывным образом на полный интервал $[0, R]$ и разложим их в ряды Фурье-Дини

$$\frac{G}{1-\nu}\, \tau_{i_l}(r) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k^{(l)} J_0(\lambda_k r)$$

$$g_k^{(l)} = \frac{2G}{(1-\nu) R^2 J_0^2(\lambda_k R)} \int_0^R r \tau_{i_l}(r)\, J_0(\lambda_k r)\, dr \quad (l = 1, 2) \tag{1.11}$$

и далее, следуя [6, 7, 8], неизвестные $X_k^{(l)}$ будем искать в виде

$$X_k^{(l)} = g_k^{(l)} + \frac{1}{(\lambda_k a_l)^{3/2} J_0^2(\lambda_k R)} \sum_{m=0}^{\infty} b_m^{(l)} J_{2m+3/2}(\lambda_k a_l) \quad (l = 1, 2) \tag{1.12}$$

При этом $X_0^{(l)}$ получается из (1.12) предельным переходом при $\lambda_k \to \lambda_0 = 0$ и имеет вид

$$X_0^{(l)} = g_0^{(l)} + \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, b_0^{(l)} \quad (l = 1, 2)$$

В силу представления (1.12) и разложения Фурье-Дини

$$\frac{(2a_l)^{3/2} \Gamma(s + 3/2)}{R^2 \Gamma(1+s)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J_{2s+3/2}(\lambda_k a_l)\, J_0(\lambda_k r)}{\lambda_k^{3/2} J_0^2(\lambda_k R)} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{a_i^2 - r^2}} F\left(-s,\ s+3/2;\ 1;\ \dfrac{r^2}{a_i^2}\right) & (0<r<a_i) \\ 0 & (a_i<r<R) \end{cases} \tag{1.13}$$

нетрудно убедиться, что вторые уравнения систем (1.7) и (1.8) удовлетворяются тождественно. Подставив (1.12) в первые уравнения систем (1.7) и (1.8) и далее пользуясь (1.13) и значением ряда [6, 7, 8]

$$\frac{2}{R^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_{2m+3/2}(\lambda_k a_i)\,J_{2s+3/2}(\lambda_k a_j)}{\lambda_k^2 J_0^2(\lambda_k R)} = \frac{\delta_{ms}}{4s+3} -$$

$$-\frac{2(-1)^{m+s}}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{K_1(y)}{yI_1(y)}\,I_{2m+3/2}\left(\frac{a_i y}{R}\right)I_{2s+3/2}\left(\frac{a_j y}{R}\right)dy \tag{1.14}$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция, $F(\alpha, \beta; \gamma; z)$ — гипергеометрический ряд, $K_n(x)$ — функции Макдональда, δ_{ms} — символ Кронекера, после некоторых преобразований для определения постоянных $b_m^{(i)}$ окончательно получим следующую совокупность двух бесконечных систем линейных алгебраических уравнений:

$$(1-\mu_1\tilde{\delta}_{0s})\,b_s^{(1)} = -\sum_{m=0}^{\infty} c_{ms}^{(1)}\,b_m^{(1)} - \mu_1\tilde{\delta}_{0s}b_0^{(2)} + \sum_{m=0}^{\infty} d_{ms}^{(1)}\,b_m^{(2)} -$$

$$-\varepsilon_1\tilde{\delta}_{0s}\,X_0^{(3)} - \sum_{k=1}^{\infty}\omega_{ks}(a_1)\,X_k^{(3)} + f_s^{(1)} \tag{1.15}$$

$$(1+\mu_2\tilde{\delta}_{0s})\,b_s^{(2)} = -\sum_{m=0}^{\infty} c_{ms}^{(2)}\,b_m^{(2)} + \mu_2\tilde{\delta}_{0s}\,b_0^{(1)} + \sum_{m=0}^{\infty} d_{ms}^{(2)}\,b_m^{(1)} -$$

$$-\varepsilon_2\tilde{\delta}_{0s}\,X_0^{(3)} - \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^s\,\omega_{ks}(a_2)\,X_k^{(3)} + f_s^{(2)} \tag{1.16}$$

$$(s = 0,\ 1,\ 2\cdots)$$

здесь введены следующие обозначения:

$$\mu_i = \frac{4\beta_0 a_i^3}{3\pi R^2}, \qquad \varepsilon_i = \frac{2\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,\varepsilon_0 a_i^2}{R^2}$$

$$c_{ms}^{(i)} = 2(4s+3)\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{N_k J_{2m+3/2}(\lambda_k a_i)\,J_{2s+3/2}(\lambda_k a_i)}{(\lambda_k R)^2 J_0^2(\lambda_k R)} - \right.$$

$$\left. -\frac{(-1)^{m+s}}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{K_1(Ry)}{yI_1(Ry)}\,j_{2m+3/2}(a_i y)\,j_{2s+3/2}(a_i y)\,dy\right\}$$

$$d_{ms}^{(i)} = 2(4s+3)\left(\frac{a_i}{a_{3-i}}\right)^{3/2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{M_k J_{2m+3/2}(\lambda_k a_{3-i})\,J_{2s+3/2}(\lambda_k a_i)}{(\lambda_k R)^2 J_0^2(\lambda_k R)}$$

$$f_s^{(i)} = \frac{\sqrt{2}\,(4s+3)\,\Gamma(s+1)}{R^2\,\Gamma(s+3/2)} \times$$

$$\times \int_0^{a_i} r\,(a_i^2 - r^2)^{1/2} F\left(-s,\ \frac{3}{2}+s;\ 1;\ \frac{r^2}{a_i^2}\right) f_i(r)\,dr \qquad (1.17)$$

$$-2(4s+3)\left(\frac{a_i}{R}\right)^2 \sum_{k=1}^{\infty}\left[(1+N_k)\,g_k^{(i)} - M_k g_k^{(3-i)}\right]\frac{J_{2s+3/2}(\gamma_k a_i)}{\sqrt{\gamma_k a_i}} -$$

$$-\frac{2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\beta_0 a_i^2 \delta_{0s}}{R^2}\,(g_0^{(i)} - g_0^{(3-i)})$$

$$\omega_k(a_i) = \frac{2(-1)^s(4s+3)}{\sqrt{\omega_k}\,J_1(\omega_k)}\left(\frac{a_i}{R}\right)^{3/2}\left\{J_1(\omega_k)\left[\left(\frac{5}{2}+2s\right)J_{2s+3/2}(\gamma_k a_i) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \gamma_k a_i J_{2s+5/2}(\gamma_k a_i)\right] - \omega_k J_2(\omega_k)\,J_{2s+3/2}(\gamma_k a_i)\right\}$$

$$(i = 1,\ 2)$$

Пользуясь точным решением [9, 10] парных рядов-уравнений по косинусам, для определения неизвестных коэффициентов $X_s^{(1)}$ парные уравнения (1.9) можно привести к следующей бесконечной системе линейных алгебраических уравнений

$$X_s^{(3)} = p_{1s}X_0^{(3)} + \sum_{k=1}^{\infty} p_{ks}^{(3)}X_k^{(3)} + p_{2s}\left[X_0^{(2)} - X_0^{(1)}\right] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} p_{ks}^{(1)}X_k^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} p_{ks}^{(2)}X_k^{(2)} - q_s \qquad (1.18)$$

$$(s = 1,\ 2,\ 3\cdots)$$

здесь введены следующие обозначения:

$$p_{1s} = \frac{\pi_0\,l y_s(\cos x_0)}{2\nu\pi s} \qquad p_{2s} = \frac{\nu\beta_0\,l y_s(\cos x_0)}{(1-\nu)\,\pi s} \qquad x_0 = \frac{\pi h}{l}$$

$$\Phi_k(\vartheta) = \frac{\sqrt{2}\,l}{\pi^2}\int_{\vartheta}^{\pi}\frac{\varphi_k\left(\frac{lx}{\pi}\right)\sin\frac{x}{2}\,dx}{(\cos\vartheta - \cos x)^{1/2}}$$

$$\Psi_k(\vartheta) = \frac{\sqrt{2}\,l}{\pi^2}\int_{\vartheta}^{\pi}\frac{\varphi_k\left(\frac{lx}{\pi}\right)\sin\frac{x}{2}\,dx}{(\cos\vartheta - \cos x)^{1/2}}$$

$$p_{ks}^{(i)} = \int_{x_0}^{\pi}\Phi_k(\vartheta)\,Z_s(\cos\vartheta)\operatorname{ctg}\frac{\vartheta}{2}\,d\vartheta \qquad x = \frac{\pi z}{l}$$

$$p_{k0}^{(2)} = \int_{x_0}^{\pi} \Psi_k(\theta)\, Z_s(\cos\theta)\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\, d\theta$$

$$p_{ks}^{(3)} = \frac{kQ_k}{2}\int_{x_0}^{\pi} Z_k(\cos\theta)\, Z_s(\cos\theta)\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\, d\theta =$$

$$= \frac{kQ_k}{2}\begin{cases} \dfrac{sY_s(t)\,Z_k(t) - kY_k(t)\,Z_s(t)}{s^2-k^2} & (s\neq k) \\ \dfrac{2 - P_s^2(t) + P_{s-1}^2(t) + 2P_{s-1}(t)\,P_s(t)}{2s} - & \\ -\dfrac{2}{s}\sum_{j=1}^{s-1}\dfrac{j}{j+1}\,[tP_j(t) - P_{j-1}(t)]\,P_j(t) & (s=k) \\ (t=\cos x_0) & \end{cases} \tag{1.19}$$

$$F(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_{\theta}^{x_0}\frac{f_1\left(\dfrac{lx}{\pi}\right)\sin\dfrac{x}{2}\,dx}{(\cos\theta - \cos x)^{1/2}}$$

$$H(\theta) = \frac{\sqrt{2}\,lG}{\pi^2(1-\nu)}\int_{0}^{\theta}\frac{\tau_{03}\left(\dfrac{lx}{\pi}\right)\sin\dfrac{x}{2}\,dx}{(\cos x - \cos\theta)^{1/2}}$$

$$q_s = \int_0^{x_0} H(\theta)\, Z_s(\cos\theta)\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\, d\theta + \int_{x_0}^{\pi} F(\theta) Z_s(\cos\theta)\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\, d\theta$$

где

$$Y_k(x) = P_{k-1}(x) + P_k(x), \qquad Z_k(x) = P_{k-1}(x) - P_k(x)$$

$P_k(x)$ — полиномы Лежандра $|x| \leq 1$.

Постоянная $X_0^{(3)}$ будет определена из следующего уравнения, получаемого из условия интегрируемости контактных напряжений

$$\left(1 - \frac{le_0}{2\pi\nu}\ln\sin^2\frac{x_0}{2}\right)X_0^{(3)} = \frac{G}{1-\nu}\tau_{03}(0) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}X_k^{(3)}Q_k\,Y_k(\cos x_0) -$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\left\{X_k^{(1)}\int_{x_0}^{\pi}\Phi_k(\theta)\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\,d\theta + X_k^{(2)}\int_{x_0}^{\pi}\Psi_k(\theta)\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\,d\theta\right\} +$$

$$+\int_0^{x_0}H(\theta)\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\,d\theta + \int_{x_0}^{\pi}F(\theta)\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\,d\theta +$$

$$+\left|X_0^{(2)}-X_0^{(1)}\right|\frac{l\nu\beta_0}{\pi(1-\nu)}\ln\sin^2\frac{x_0}{2} \tag{1.20}$$

2. Докажем, что полученные бесконечные системы линейных алгебраических уравнений (1.15), (1.16) и (1.18) квазиполные регулярны, а сумма модулей коэффициентов при возрастании номера строки стремится к нулю, то есть покажем, что

$$\lim_{s\to\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left|\omega_{ms}(a_i)\right| = \lim_{s\to\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left|c_{ms}^{(i)}\right| = \lim_{s\to\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left|d_{ms}^{(i)}\right| =$$

$$= \lim_{s\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left|p_{ks}^{(i)}\right| = 0 \tag{2.1}$$

Докажем первое из этих соотношений. Пользуясь асимптотическим разложением модифицированных цилиндрических функций первого рода при больших значениях индекса, а также их асимптотическим выражением при больших значениях аргумента [11]

$$I_n(x)\approx\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{\Gamma(n)},\ (n\gg x);\quad I_n(x)\approx\frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}},\ (x\gg 1) \tag{2.2}$$

нетрудно заметить, что этот ряд сходится как геометрическая прогрессия со знаменателем $\exp\left[-a_1(K-a_i)\right]$, но так как $a_i<R$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty}|\omega_{ks}(a_i)|$ сходится равномерно относительно параметра s. Общий член этого ряда при возрастании s стремится к нулю как $\frac{\left(\frac{\lambda_k a_i}{2}\right)^{2s+3/2}}{\Gamma\left(2s-\frac{1}{2}\right)}$. Сумма же ряда, в силу быстрой его сходимости, будет иметь такой же порядок, как и общий его член, то есть

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\omega_{ks}(a_i)\right| = O\left(\frac{c^{2s+3/2}}{\Gamma\left(2s-\frac{1}{2}\right)}\right),\qquad \text{где } c<1$$

Сумма $\sum_{k=1}^{\infty}|p_{ks}^{(i)}|$ в (2.1) при $i=1,2$ стремится к нулю, как $s^{-3/2}$, а при $i=3$ стремится к нулю, как $s^{-1}\ln s$, что подробно показано в работе [12]. Суммы же $\sum_{m=0}^{\infty}|c_{ms}^{(i)}|$ и $\sum_{m=0}^{\infty}|d_{ms}^{(i)}|$ рассматривались в работе [7], где показано, что при возрастании s они стремятся к нулю, как $\frac{c_1^{2s+3/2}}{\Gamma\left(2s+\frac{1}{2}\right)}$. Из вышеизложенного следует, что все суммы,

входящие в (2.1), стремятся к нулю, а, следовательно, бесконечные системы в общем случае квазивполне регулярны. Нетрудно заметить также, что при любых $f_i(z)$ и $\eta_i(z)$ свободные члены бесконечных систем стремятся к нулю по крайней мере, как $O(s^{-1})$.

Отметим, что факт стремления к нулю свободных членов и суммы модулей коэффициентов бесконечных систем существенно облегчает вычислительные работы при рассмотрении конкретных примеров.

3. Ряды, входящие в выражения напряжений и перемещений, сходятся достаточно быстро внутри области цилиндра $(r < R, 0 < z < l)$. На границах же области $(r = R;\ z = 0,\ l)$ сходимость этих рядов ухудшается, и формулы (1.5) непригодны для вычислений контактных напряжений и перемещений вне контакта. Однако, предварительно улучшив сходимость этих рядов и выделив при этом особенности, можно получить формулы, пригодные для вычисления напряжений и перемещений как на торцевых плоскостях $(z = 0;\ l)$, так и на цилиндрической поверхности $r = R$.

Подставляя (1.12) в выражение $u_z(r, z)$ из (1.5) при $z = 0,\ l$ и пользуясь формулой (1.13), получим

$$\frac{G}{1-\nu} u_z(r, l\delta_{2i}) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k^{(i)} J_0(\lambda_k r) = \frac{G}{1-\nu} \eta_i(r) +$$

$$+ \begin{cases} \dfrac{R^2 \sqrt{a_i^2 - r^2}}{(2a_i)^{3/2}} \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} b_m^{(i)} \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+3/2)} F\left(-m, m+3/2; 1; \frac{r^2}{a_i^2}\right) & \text{при } (0 < r < a_i) \\ 0 & \text{при } (a_i < r < R) \end{cases} \tag{3.1}$$

Коэффициент при особенности $\sqrt{a_i^2 - r^2}$ в формуле (3.1) в окрестности $r = a_i$ имеет вид

$$\frac{R^2}{(2a_i)^{\frac{3}{2}}} \sum_{m=0}^{\infty} b_m^{(i)} \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma\left(m+\frac{3}{2}\right)} F\left(-m, m+\frac{3}{2};\ 1;\ 1\right) =$$

$$= \frac{R^2}{\sqrt{2\pi}\, a_i^{\frac{1}{2}}} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m b_m^{(i)} \tag{3.2}$$

На поверхности же цилиндра $r = R$ нормальное перемещение u_r, как это следует из (1.5), представится формулой

$$\frac{G}{1-\nu} u_r(R, z) = X_0^{(3)} + \sum_{s=1}^{\infty} X_s^{(3)} \cos \alpha_s z \tag{3.3}$$

Для улучшения сходимости этого ряда в области $h < z < l$ подставим в (3.3) значение $X_s^{(3)}$ из бесконечной системы (1.18) и далее, пользуясь значением ряда [10]

$$1-\sum_{s=1}^{\infty} Z_s(\cos\theta)\cos sx=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2}\sin\dfrac{x}{2}}{(\cos\theta-\cos x)^{\frac{1}{2}}} & x>\theta\\[2ex] 0 & x<\theta\end{cases}\tag{3.4}$$

после некоторых выкладок получим окончательно

$$\frac{G}{1-\nu}u_r(R,z)=\frac{G}{1-\nu}u_0(0)-\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}\left\{\frac{\nu\beta_0}{1-\nu}\left(X_0^{(2)}-X_0^{(1)}\right)+\right.$$

$$+\frac{\alpha_0}{2\nu}X_0^{(3)}\left[\frac{l}{\sqrt{2}\,\pi\sin\dfrac{x}{2}}\ln\frac{\sqrt{1-\cos x}+\sqrt{\cos x_0-\cos x}}{\sqrt{1-\cos x}-\sqrt{\cos x_0-\cos x}}+\right.$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left[X_k^{(1)}\int_{x_0}^{x}\frac{\Phi_k(\theta)\operatorname{ctg}\dfrac{\theta}{2}\,d\theta}{(\cos\theta-\cos x)^{\frac{1}{2}}}+X_k^{(2)}\int_{x_0}^{x}\frac{\Psi_k(\theta)\operatorname{ctg}\dfrac{\theta}{2}\,d\theta}{(\cos\theta-\cos x)^{\frac{1}{2}}}+\right.$$

$$\left.\left.+X_k^{(3)}\frac{kQ_k}{2}\int_{x_0}^{x}\frac{Z_k(\cos\theta)\operatorname{ctg}\dfrac{\theta}{2}\,d\theta}{(\cos\theta-\cos x)^{\frac{1}{2}}}\right]-\int_{0}^{x}\frac{H(\theta)\operatorname{ctg}\dfrac{\theta}{2}\,d\theta}{(\cos\theta-\cos x)^{\frac{1}{2}}}-\right.$$

$$\left.\left.-\int_{x_0}^{x}\frac{F(\theta)\operatorname{ctg}\dfrac{\theta}{2}\,d\theta}{(\cos\theta-\cos x)^{\frac{1}{2}}}\right]\right\}\tag{3.5}$$

$$\text{при }(x_0<x<\pi),\ \left(z=\frac{lx}{\pi},\qquad x_0=\frac{\pi h}{l}\right)$$

Получим теперь формулы для контактных напряжений в областях $a_i<r<R$ торцевых плоскостей ($z=0;\ l$). Из (1.5) имеем

$$\sigma_z(r,l\delta_{2i})=\beta_0\left(X_0^{(2)}-X_0^{(1)}\right)+\alpha_0X_0^{(3)}+(-1)^i\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_kX_k^{(i)}J_0(\lambda_kr)+$$

$$+(-1)^i\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\left(N_kX_k^{(i)}-M_kX_k^{(3-i)}\right)J_0(\lambda_kr)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{(3-i)k}\,\alpha_k^2X_k^{(3)}\,\Omega_k(r)\qquad(i=1;\ 2)\tag{3.6}$$

Здесь следует улучшить только сходимость первого ряда, выделив при этом особенность. Подставив значения $X_k^{(i)}$ из (1.12) в первую сумму и далее пользуясь значением ряда [7.8]

$$2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_{2m+\frac{3}{2}}(\lambda_k a_i)J_0(\lambda_k r)}{(\lambda_k R)^{\frac{3}{2}}J_0^2(\lambda_k R)} =$$

$$= -\frac{2}{\pi}(-1)^m\int_0^{\infty}\frac{\sqrt{y}\,K_1(y)}{I_1(y)}I_0\left(\frac{r}{R}y\right)I_{2m+\frac{3}{2}}\left(\frac{a_i}{R}y\right)dy +$$

$$+\frac{(-1)^{m+1}\sqrt{2}\left(\frac{a_i}{R}\right)^{2m+\frac{3}{2}}\Gamma^2\left(m+\frac{3}{2}\right)}{\pi\left(\frac{r}{R}\right)^{2m+3}\Gamma\left(2m+\frac{5}{2}\right)}\left(1-\frac{a_i^2}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\times$$

$$\times F\left(m+1,\ m+1;\quad 2m+\frac{5}{2};\ \frac{a_i^2}{r^2}\right)$$

$$(a_i<r<R) \qquad (3.7)$$

окончательно получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k X_k^{(i)}J_0(\lambda_k r) = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k g_k^{(i)}J_0(\lambda_k r) -$$

$$-\frac{\sqrt{R}}{\pi a_i^{3/2}}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m b_m^{(i)}\left\{\int_0^{\infty}\frac{\sqrt{y}\,K_1(y)}{I_1(y)}I_0\left(\frac{ry}{R}\right)I_{2m+\frac{3}{2}}\left(\frac{a_i y}{R}\right)dy +\right.$$

$$+\frac{\left(\frac{a_i}{R}\right)^{2m+\frac{3}{2}}\Gamma^2\left(m+\frac{3}{2}\right)r}{\left(\frac{r}{R}\right)^{2m+3}\Gamma\left(2m+\frac{5}{2}\right)(r^2-a_i^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\left.\times F\left(m+1,\quad m+1;\quad 2m+\frac{5}{2};\quad \frac{a_i^2}{r^2}\right)\right\} \qquad (3.8)$$

$$(a_i<r<R)$$

Пользуясь соотношением

$$F\left(m+1,\ m+1;\ 2m+\frac{5}{2};\ 1\right)=\frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(2m+\frac{5}{2}\right)}{\Gamma^2\left(m+\frac{3}{2}\right)}$$

находим коэффициент при особенности в (3.8) около точки $r=a_i$, равный

$$\frac{R^2}{\sqrt{\pi}\,a_i^2}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m b_m^{(i)} \qquad (3.9)$$

Для вычисления контактных напряжений на цилиндрической поверхности подстановкой $X_s^{(3)}$ из (1.18) и использованием значения ряда

$$\sum_{s=1}^{\infty} Z_s(\cos\vartheta)\sin sx = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}\sin\dfrac{x}{2}}{(\cos x-\cos\vartheta)^{\frac{1}{2}}} & x<\vartheta \\ 0 & x>\vartheta \end{cases} \tag{3.10}$$

интеграла

$$\int_x^{\pi} \frac{Z_s(\cos\vartheta)\operatorname{ctg}\dfrac{\vartheta}{2}\,d\vartheta}{(\cos x-\cos\vartheta)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{2}\sin sx}{s\cdot\sin\dfrac{x}{2}}$$

и формулы обращения типа Абеля

$$\int_x^{\pi} \frac{\operatorname{ctg}\dfrac{\vartheta}{2}\,d\vartheta}{(\cos x-\cos\vartheta)^{\frac{1}{2}}} \int_{\vartheta}^{\pi} \frac{f(t)\sin\dfrac{t}{2}\,dt}{(\cos\vartheta-\cos t)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\pi}{2\sin\dfrac{x}{2}}\int_x^{\pi} f(t)\,dt \tag{3.11}$$

предварительно вычислена сумма $\sum_{s=1}^{\infty} X_s^{(3)}\sin sx$ в области $x<x_0$, $(z<h)$.

Далее, после некоторых преобразований и последующим дифференцированием этой суммы получена следующая формула для контактных напряжений:

$$\sigma_r(R,x) = -\frac{A\cos\dfrac{x}{2}}{(\cos x-\cos x_0)^{\frac{1}{2}}} - D(x) \qquad \begin{matrix}(0<x<x_0)\\(0<z<h)\end{matrix} \tag{3.12}$$

где

$$A = \frac{\pi\sqrt{2}}{l}\left\{\frac{l}{\pi}\left|\frac{\sqrt{2}\vartheta_0}{1-\nu}(X_0^{(2)}-X_0^{(1)})+\frac{\vartheta_0}{2\nu}X_0^{(3)}\right| + H(x_0)-F(x_0)+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{\infty}\left|X_k^{(1)}\Phi_k(x_0)+X_k^{(2)}\Psi_k(x_0)+X_k^{(3)}\frac{kQ_k}{2}Z_k(\cos x_0)\right|\right\}$$

$$D(x) = \frac{\sqrt{2}}{l}\cos\frac{x}{2}\left\{\int_{x_0}^{\pi}\frac{F'(\vartheta)\,d\vartheta}{(\cos x-\cos\vartheta)^{\frac{1}{2}}}+\int_x^{\pi}\frac{H'(\vartheta)\,d\vartheta}{(\cos x-\cos\vartheta)^{\frac{1}{2}}}+\right. \tag{3.13}$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{\infty}\left[X_k^{(1)}\int_x^{\pi}\frac{\Phi_k'(\vartheta)\,d\vartheta}{(\cos x-\cos\vartheta)^{\frac{1}{2}}}+X_k^{(2)}\int_x^{\pi}\frac{\Psi_k'(\vartheta)\,d\vartheta}{(\cos x-\cos\vartheta)^{\frac{1}{2}}}+\right.\right.$$

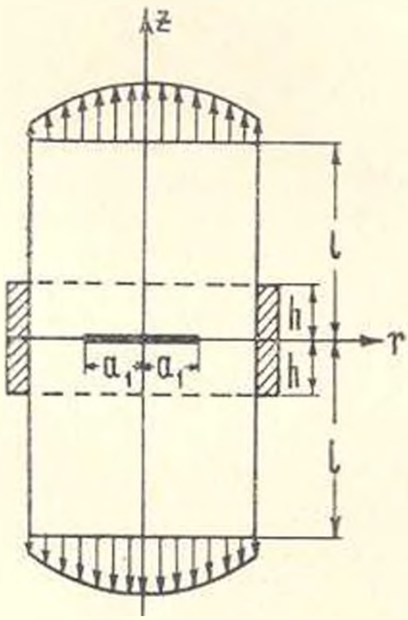
$$+ \frac{k^2 Q_k}{2} X_k^{(3)} \int\limits_0^x \frac{y_k(\cos\theta)\,\mathrm{tg}\,\frac{\theta}{2}\,d\theta}{(\cos x - \cos\theta)^{\frac{1}{2}}} \Bigg] \Bigg]$$

Очевидно, что решенная здесь задача при малых значениях относительной толщины $\frac{l}{2R}$ может быть рассмотрена как задача о равновесии толстой круглой плиты.

Здесь отметим, что таким же образом может быть решена задача для цилиндра с наружными кольцевыми трещинами.

4. В заключение приведем ряд задач, которые на наш взгляд, представляются интересными и решения которых, как частный случай, могут быть получены из решения задачи, рассмотренной в настоящей работе.

а) Полагая $\tau_1(r) = 0$, $a_1 \neq 0$, $a_1 = R$, получим решение задачи об осесимметричной деформации конечного цилиндра, ослабленного в плоскости симметрии $z = 0$ центральной монетообразной трещиной радиуса a_1, к поверхности которой, в общем случае, приложено давление $f_2(r)$.

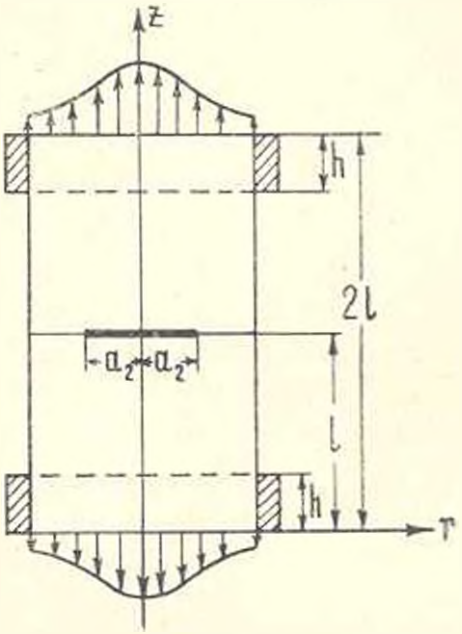


Фиг. 2.

Деформация цилиндра осуществляется также нормальными напряжениями, приложенными к торцевым плоскостям $z = \pm l$, радиальными силами $f_3(z)$, приложенными к части поверхности $h < |z| < l$, $r = R$ и гладким диском заданной формы, симметрично насаженным на цилиндр (фиг. 2).

б) В задаче, приведенной выше в пункте а), граничные условия по цилиндрической поверхности могут быть заданы однородно, то есть в одном случае ($h = 0$) по цилиндрической поверхности заданы только радиальные давления $f_3(z)$, а в другом случае ($h = l$) цилиндр по всей длине заключен в полый гладкий цилиндр, внутренняя поверхность которого определяется формулой $r = R - v_0(z)$; если при этом устремить l к бесконечности, то получим задачу о бесконечном цилиндре, ослабленном монетообразной трещиной, которая другим методом подробно исследована в работе Снеддона и Тейта [13].

в) Если положить $v_{02}(z) = 0$, $a_1 = R$, $a_2 \neq 0$, то получим решение задачи о деформации цилиндра, ослабленного в сечении $z = l$ монетообразной трещиной радиуса a_2, к поверхности которой в общем случае приложено давление $f_2(r)$. Деформация осуществляется также двумя, расположенными симметрично, гладкими дисками заданной формы, радиальными силами $f_3(z)$, приложенными к цилиндрической поверхности между дисками $h \leq z \leq (2l - h)$, нормальными напряжениями, приложенными к торцевым плоскостям $z = 0$, $z = 2l$ (фиг. 3).



Фиг. 3.

В вышеприведенных задачах по обеим торцевым плоскостям задавались напряжения, однако во всех этих задачах могут быть рассмотрены случаи, когда по обеим торцевым плоскостям или по одной действуют гладкие жесткие штампы.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 6 III 1973

Ա. Հ. ԲԱԲԼՈՅԱՆ, Ա. Պ. ՄԵԼՔՈՆՅԱՆ

ՎԵՐՋԱՎՈՐ ԵՐԿԱՐՈՒԹՅԱՄԲ ԴԼԱՆԻ ՀԱՄԱՐ ՄԻ ԱՌԱՆՑՔԱՍԻՄԵՏՐԻԿ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Աշխատանքում բերվում է վերջավոր երկարությամբ գլանի համար առաձգականության տեսության առանցքասիմետրիկ խնդրի լուծումը, երբ ինչպես գլանային մակերևույթի, այնպես էլ երկու հակատային հարթությունների վրա եղրային պայմանները տրված են խառը տեսքով։ Ընդհատող յարումները ամբողջ մակերևույթի վրա բացակայում են։

Խնդրի լուծումը ներկայացված է Ֆուրյեի և Ֆուրյե-Դինիի շարքերի գումարի տեսքով, որոնց գործակիցները որոշվում են Բեսելի կամ նուանկյունաչափական ֆունկցիաներ պարունակող երեք զույգ-շարք հավասարումների սիստեմից։

Ապացուցված է, որ խնդիրը բերվում է քվազի-լիովին ռեգուլյար գծային հանրահաշվական հավասարումների անվերջ սիստեմների լուծմանը, որոնց ազատ անդամները ձգտում են զրոյի։

Ստացված են բանաձևեր կոնտակտային յարումների համար՝ անջատված եղակիությունով և կոնտակտային միջավայրից դուրս մասում տեղափոխությունների համար։

ON AN AXISYMMETRIC CONTACT PROBLEM FOR A FINITE LENGTH CYLINDER

A. H. BABLOYAN, A. P. MELKONIAN

S u m m a r y

The solution of an axisymmetric problem in the theory of elasticity is presented for a finite length cylinder, where the boundary conditions both on the cylindrical surface and on the two butt planes are given in a mixed form. The solution is expressed as a sum of the Fourier and Fourier-Dini series whose coefficients are found from the system of three dual series-equations, containing trigonometric and Bessel's functions.

Further, the problem is reduced to the solution of a set of three quasi-quite regular infinite systems of linear algebraic equations whose free terms tend to zero.

Some formulas for contact stresses with separated singularity and for displacements out of contact are obtained.

А Н Т Е Р А Т У Р А

1. *Okubo H.* The Stress Distribution in Shaft Press-fitted with a Collar. Zeitschr. für ang. Math. und Mech., vol. 32, № 6, 1952.

2. *Лидский П. З.* О распределении напряжений по контактной поверхности при горячей посадке диска постоянной толщины на сплошной вал. Изв. АН СССР, ОТН, № 4, 1955.

3. *Александров В. М.* Осесимметричная контактная задача для упругого бесконечного цилиндра. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, № 5, 1962.
4. *Александров В. М.* К решению некоторых контактных задач теории упругости. ПММ, т. XXVII, № 5, 1963.
5. *Попов Г. Я.* К решению контактных (смешанных) задач теории упругости для бесконечно длинного кругового цилиндра. Изв. АН Арм. ССР, серия физ.-мат. наук, т. XVII, № 4, 1964.
6. *Баблоян А. А., Мелконян А. П.* О двух смешанных осесимметричных задачах теории упругости. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XXII, № 5, 1969.
7. *Мелконян А. П.* Об одной смешанной осесимметричной задаче теории упругости для цилиндра конечной длины. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XXIV, № 2, 1971.
8. *Cooke J. C., Tranter C. J.* Dual Fourier-Bessel Series. The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, vol. XII, part 2, August 1959, Oxford.
9. *Srivastav R. P.* III. Dual relations involving trigonometric series. Proc. Roy Soc. Edinburg (Ser. A) vol. 66, Pt. III, 1964, 173-184.
10. *Баблоян А. А.* Решение некоторых парных рядов уравнений, встречающихся в задачах теории упругости. ПММ, т. 31, вып. 4, 1967.
11. *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложения. М., 1953.
12. *Баблоян А. А., Мелконян А. П.* Осесимметричная задача полого бесконечного цилиндра с периодически насаженными на него дисками. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XXI, № 1, 1968.
13. *Sneddon N., Tait R. J.* The effect of a penny-shaped crack on the distribution of stress in a long circular cylinder. Int. J. Eng. Sci, vol. 1, pp. 391-409, Pergamon Press, 1963.