

Е. И. ЛУНЬ, А. А. СЯСЬКИЙ

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ОКОЛО
 КРИВОЛИНЕЙНОГО ОТВЕРСТИЯ В ТРАНСВЕРСАЛЬНО-
 ИЗОТРОПНОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ

Постановка и методы решения задач о концентрации напряжений около отверстий в трансверсально-изотропных оболочках даны в работах [1, 2, 3].

В настоящей статье рассматривается задача об определении напряженного состояния в трансверсально-изотропной сферической оболочке с криволинейным отверстием. Оболочка находится под действием равномерного внутреннего давления интенсивности P_0 .

Напряженное состояние оболочки, ослабленной криволинейным отверстием, представим как сумму основного напряженного состояния и дополнительного напряженного состояния, вызванного наличием отверстия. Срединная поверхность оболочки отнесена к полярной системе координат (r, θ) с полюсом в центре отверстия.

Пусть контур отверстия (Γ) в оболочке имеет такую форму, что функция

$$z = \omega(\xi), \quad \omega(\xi) = \rho \left(\xi + \frac{2a}{3N-1} \right) \quad (1)$$

где

$$\xi = \rho e^{i\theta}, \quad z = re^{i\theta}$$

конформно отображает бесконечную плоскость (ξ) с круговым отверстием радиуса ρ на бесконечную плоскость с отверстием, контур которого Γ .

При определенных значениях ϵ_0 и N можно получить из (1) конформное отображение для отверстий:

эллиптического при $\epsilon_0 = \frac{a-b}{a+b}$, $N=2$, $\rho = \frac{a+b}{2}$

квадратного при $\epsilon_0 = \pm \frac{1}{3}$, $N=4$ (2)

треугольного при $\epsilon_0 = \pm 0.25$, $N=3$

Основное напряженное состояние оболочки будем считать безмоментным и равным

$$T_1^0 = T_2^0 = 2\rho h, \quad \text{где } \rho = \frac{P_0 R}{4b} \quad (3)$$

Дополнительное напряженное состояние, вызванное наличием отверстия, будем находить, исходя из уравнений пологих оболочек в комплексной форме [2], которые учитывают влияние деформаций поперечного сдвига и анизотропию упругих свойств в направлении нормали к срединной поверхности оболочки

$$\begin{aligned} \Delta \Delta \varphi - \nu^2 \Delta \varphi &= 0 \\ \Delta \psi - H^2 \psi &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\varepsilon = \frac{2Eh^2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} w - i\varphi, \quad \frac{2Eh^2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} = n$$

w — нормальный прогиб оболочки,

φ — функция напряжений,

ψ — функция, через которую выражаются углы поворота нормали,

E, ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона,

$2h$ — толщина оболочки,

$$\nu^2 = \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{Rh}, \quad H^2 = \frac{2}{(1-\nu)\varepsilon}, \quad \varepsilon = \frac{h^2}{3k'(1-\nu^2)} \frac{E}{\sigma_0}$$

R — радиус оболочки,

k' — коэффициент сдвига,

G — модуль сдвига в плоскостях, нормальных к срединной поверхности оболочки.

Компоненты дополнительного напряженного состояния выражаются через функции $\varepsilon(r, \theta)$ и $\psi(r, \theta)$ по формулам [2]

$$T_r^* = - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \text{Im } \varepsilon$$

$$T_\theta^* = - \frac{\partial^2}{\partial r^2} \text{Im } \varepsilon$$

$$S_{r\theta}^* = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \text{Im } \varepsilon$$

$$N_r^* = - \frac{D}{\varepsilon} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \psi + \frac{\partial}{\partial r} (f - w) \right] \quad (5)$$

$$N_\theta^* = \frac{D}{\varepsilon} \left[\frac{\partial}{\partial r} \psi - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (f - w) \right]$$

$$M_r^* = - D \left\{ (1-\nu) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \psi + \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \right] f \right\}$$

$$M_\theta^* = - D \left\{ (\nu-1) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \psi + \left[\nu \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] f \right\}$$

$$H_{r\theta}^* = D(1-\nu) \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \psi - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) f \right]$$

где

$$f = w + \varepsilon \Delta w - \frac{\varepsilon^2}{DR} \Delta \varphi, \quad D = \frac{2Ek^2}{3(1-\nu^2)}$$

Используя метод „возмущения формы границы“ впервые предложенный в [6], представим решения уравнений (4) в полярной системе координат (r, θ) и компоненты напряженного состояния в криволинейной ортогональной системе координат (ρ, λ) в виде рядов по параметру ε :

$$z(r, \theta) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j z_j(r, \theta), \quad \psi(r, \theta) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \psi_j(r, \theta) \quad (6)$$

$$T_r^* = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j T_r^{(j)}, \quad S_r^* = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j S_r^{(j)}$$

$$T_\theta^* = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j T_\theta^{(j)}, \quad N_r^* = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j N_r^{(j)} \quad (7)$$

$$N_\theta^* = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j N_\theta^{(j)}, \quad M_\rho^* = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j M_\rho^{(j)}$$

$$M_\lambda^* = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j M_\lambda^{(j)}, \quad H_{\rho\lambda}^* = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j H_{\rho\lambda}^{(j)}$$

Используя результат работы [4], получим, что функции $z_j(r, \theta)$ и $\psi_j(r, \theta)$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \Delta \Delta z_j + \lambda \varepsilon^2 \Delta z_j &= 0 \\ \Delta \psi_j - H^2 \psi_j &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

а компоненты напряженного состояния $T_r^{(j)}, \dots, H_{\rho\lambda}^{(j)}$ записываются в виде

$$\begin{aligned} T_r^{(j)} &= T_r^{(j)} + \sum_{m=0}^{j-1} [L_1^{(j-m)} T_r^{(m)} + L_2^{(j-m)} (T_r^{(m)} - T_\theta^{(m)}) + L_3^{(j-m)} S_r^{(m)}] \\ T_\theta^{(j)} &= T_\theta^{(j)} + \sum_{m=0}^{j-1} [L_1^{(j-m)} T_\theta^{(m)} + L_2^{(j-m)} (T_\theta^{(m)} - T_r^{(m)}) - L_3^{(j-m)} S_r^{(m)}] \\ S_r^{(j)} &= S_r^{(j)} + \sum_{m=0}^{j-1} \left[(L_1^{(j-m)} - 2L_2^{(j-m)}) S_r^{(m)} + \frac{1}{2} L_3^{(j-m)} (T_\theta^{(m)} - T_r^{(m)}) \right] \\ N_r^{(j)} &= N_r^{(j)} + \sum_{m=0}^{j-1} [L_3^{(j-m)} N_r^{(m)} + L_4^{(j-m)} N_\theta^{(m)}] \\ N_\theta^{(j)} &= N_\theta^{(j)} + \sum_{m=0}^{j-1} [L_3^{(j-m)} N_\theta^{(m)} - L_4^{(j-m)} N_r^{(m)}] \end{aligned} \quad (9)$$

$$M_r^{(j)} = M_r^{(j)} + \sum_{m=0}^{j-1} |L_1^{(j-m)} M_r^{(m)} + L_2^{(j-m)} (M_\theta^{(m)} - M_r^{(m)}) + L_3^{(j-m)} H_{r,\theta}^{(m)}|$$

$$M_\theta^{(j)} = M_\theta^{(j)} + \sum_{m=0}^{j-1} |L_1^{(j-m)} M_\theta^{(m)} + L_2^{(j-m)} (M_r^{(m)} - M_\theta^{(m)}) - L_3^{(j-m)} H_{r,\theta}^{(m)}| \quad (9)$$

$$H_{r,\theta}^{(j)} = H_{r,\theta}^{(j)} + \sum_{m=0}^{j-1} \left[(L_1^{(j-m)} - 2L_2^{(j-m)}) H_{r,\theta}^{(m)} + \frac{1}{2} L_3^{(j-m)} (M_\theta^{(m)} - M_r^{(m)}) \right]$$

Выражения для величин с индексами j и m , стоящих в правых частях (9), совпадают с соответствующими выражениями (5), если в последних заменить $\varepsilon(r, \theta)$ и $\psi(r, \theta)$ на $\varepsilon_j(\rho, \lambda)$, $\psi_j(\rho, \lambda)$ или $\varepsilon_m(\rho, \lambda)$, $\psi_m(\rho, \lambda)$, r на ρ , θ на λ .

Дифференциальные операторы $L_k^{(j-m)}$ ($k = 1, 2, \dots, 6$), порядок которых указан верхним индексом, имеют те же выражения, что и в [5].

Под функциями $\varepsilon_m(\rho, \lambda)$, $\psi_m(\rho, \lambda)$ следует понимать решение уравнений (8) в m -ом приближении, в котором r заменено на ρ , а θ на λ .

Под значением какой-либо величины, например, T , на Γ , полученной в n -ом приближении, следует понимать величину

$$T = T_\lambda^0 + \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j^j T_\theta^{(j)} + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{j-1} \varepsilon_j^j |L_1^{(j-m)} T_\theta^{(m)} + L_2^{(j-m)} (T_r^{(m)} - T_\theta^{(m)}) - L_3^{(j-m)} S_{r,\theta}^{(m)}| \quad (10)$$

Граничные условия на контуре отверстия в случае, когда отверстие закрыто крышкой, которая передает действие перерезывающих усилий, имеют вид [6]

$$T_r = 0, \quad S_{r,\theta} = 0, \quad M_r = 0, \quad H_{r,\theta} = 0 \quad (11)$$

$$N_\theta = -\frac{\rho_0 \sigma_0}{2} + \varepsilon_0 \rho_0 \varepsilon_0 \cos N\lambda + \varepsilon_0^2 \frac{\rho_0 \sigma_0}{2} \left[(N-1) \frac{N-2}{4} - N \cos N\lambda \right]$$

Решение уравнений (8), удовлетворяющее условиям на „бесконечности“, возьмем в виде [6]

$$\varepsilon_j(r, \theta) = iB_0^j \ln r + (C_0^j + iD_0^j) H_0^{(j)}(\varepsilon_0 \sqrt{i}) + \sum_{k=1}^{\infty} [(A_{kN}^j + iB_{kN}^j) r^{-kN} + (C_{kN}^j + iD_{kN}^j) H_{kN}^{(j)}(r\varepsilon_0 \sqrt{i})] \cos kN\theta$$

$$\psi_j(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} D_{kN}^j K_{kN}(Hr) \sin kN\theta \quad (12)$$

Выбирая согласно (2) величину N , получим решение для определенного вида отверстия.

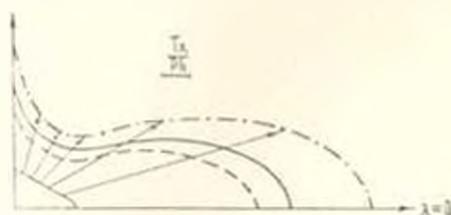
Раскладывая граничные условия (11) в ряды по ε_0 , подставляя в них (9) с учетом (12) и собирая члены при одинаковых ε_0 , получим

бесконечную цепочку систем алгебраических уравнений для определения постоянных, которые входят в (12). При $\varepsilon \rightarrow 0$, что соответствует бесконечно большой жесткости оболочки на сдвиг, получим решение задачи, соответствующее теории Кирхгофа-Лява.

Для усилия T_1 на контуре отверстия можно записать формулу

$$T_1 = 2 \left(2\rho h + \frac{\pi \kappa^2}{2} w \right) \quad (13)$$

которая может быть использована в случае, когда w можно определить экспериментальным путем.



Фиг. 1

В качестве примера на ЭЦВМ „Минск 22“ были подсчитаны значения $\frac{T_1}{2\rho h}$ на контуре треугольного отверстия в сферической оболочке с такими физико-геометрическими характеристиками

$$\begin{aligned} R &= 100 \text{ см}, & \nu &= 0.1 \\ 2h &= 2 \text{ см}, & \frac{E}{\varepsilon_n} &= 0, 40, 80 \\ r_0 &= 20 \text{ см}, & & \end{aligned}$$

Во втором приближении получены следующие выражения:

$$\frac{T_1}{2\rho h} = 5.687 - 4.993 \cos 3\lambda - 1.578 \cos 6\lambda \quad \text{при} \quad \frac{E}{\varepsilon_n} = 0$$

$$\frac{T_1}{2\rho h} = 7.083 - 5.836 \cos 3\lambda - 1.508 \cos 6\lambda \quad \text{при} \quad \frac{E}{\varepsilon_n} = 40$$

$$\frac{T_1}{2\rho h} = 10.125 - 8.200 \cos 3\lambda - 1.746 \cos 6\lambda \quad \text{при} \quad \frac{E}{\varepsilon_n} = 80$$

На фиг. 1 показано распределение величин $\frac{T_1}{2\rho h}$ по контуру отверстия (штриховая линия отвечает случаю, когда $\frac{E}{\varepsilon_n} = 0$, сплошная — $\frac{E}{\varepsilon_n} = 40$, штрих-пунктирная — $\frac{E}{\varepsilon_n} = 80$).

Из графика можно сделать вывод, что влияние сдвигов на величину $\frac{T_1}{2\rho h}$ при $\lambda = 0$ значительно и составляет 17% при $\frac{E}{z_n} = 40$, 56% при $\frac{E}{z_n} = 80$ по сравнению с величиной $\frac{T_1}{2\rho h}$ при $\frac{E}{z_n} = 0$. Влияние сдвигов при $\lambda = 60^\circ$ незначительно.

Результаты, полученные при $\frac{E}{z_n} = 0$, согласовываются с результатами работы [7].

Львовский ордена Ленина
государственный ин. Ив. Франко

Получено 11 VIII 1971

Ե. Ի. ԼՈՒՆ, Ա. Ա. ՏՅԱՍԿՅ

ՏՐԱՆՍՎԵՐՍԱԿ ԻԶՈՏՐՈՊ ԳՆԳԱՅԻՆ ՔԱՎԱՆՔՈՒՄ ԿՈՐԱՎԻՆ ԱՆՅՔԻ ՇՐՋԱՆԱՅՔՈՒՄ ԼԱՐԱԿ ԿՐՃԱԿ ՈՐՈՇԵՐԱՆ ՎԵՐԱՔԵՐՅԱԼ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Քերտվան թաղանթների կոմպլեքս ձևով վերլուծած համասարումների հիման վրա, որոնք հաշվի են առնում յայնպիսի սահմանի ղեֆորմացիաները և թաղանթի միջին մակերևույթի նորմալ ուղղությամբ առաձգական հասկոմիլունների անիզոտրոպիան, դիտարկվում է ղեղաչին թաղանթում կորագիծ անցքի շրջակայքում յարված վիճակի վերաբերյալ խնդիրը:

Դիտարկվել են էլիպտական, հռանկյունաձև և բառանկյունաձև անցքերի ղեկրերը:

Որպես օրինակ եռանկյունաձև անցքի կորագծի վրա հաշվվել են $\frac{T_1}{2\rho h}$

մեծությունները:

ON DETERMINATION OF STRESSED CONDITION AROUND A CURVILINEAR HOLE IN THE TRANSVERSIALLY ISOTROPIC SPHERICAL SHELL

E. I. LUN, A. A. SJASKY

S u m m a r y

On the basis of the equations for sloping shells in a complex form which take into account the deformation of transversal shears and the anisotropy of elastic characteristics in the direction of the normal to the median surface of the shell the problem of stressed condition around a curvilinear hole in the spherical shell is discussed. The cases of elliptic, triangular and quadrangular holes are examined.

As an example the quantities $\frac{T_1}{2\rho h}$ over the outline of the triangular hole are calculated.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Лузь А. Н., Ширенко К. И.* Концентрация напряжений около отверстий в оболочках, изготовленных из материала с малым сдвиговым модулем. Прикл. механика, т. VI, в. 8, 1970.
2. *Пелех Б. А., Лузь Е. И.* Концентрация напряжений в трансверсально-изотропных оболочках. Механика полимеров, № 6, 1970.
3. *Лузь А. Н., Чернышенко И. С., Ширенко К. И.* Сферические днища, ослабленные отверстиями. „Наукова думка“, Киев, 1970.
4. *Савин Г. Н.* Распределение напряжений около отверстий. „Наукова думка“, Киев, 1968.
5. *Савин Г. Н., Лузь А. Н.* О напряженном состоянии около криволинейных отверстий в оболочках. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, № 6, 1964.
6. *Лузь О. М.* Про приближений метод визначення концентрації напружень біля криволинійних отворів в оболочках. Прикладна механіка, т. VIII, в. 6, 1962.
7. *Лузь А. Н.* Равновесие сферической оболочки, ослабленной трехугольным отверстием. Прикл. механика, т. I, в. 3, 1965.