

Ж. О. АХИНЯН. А. Г. БАГДОЕВ

ДВИЖЕНИЕ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА ПОД ДЕЙСТВИЕМ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Рассматривается задача о движении полупространства, заполненного идеально проводящим упругим веществом, граничащего с диэлектриком (воздух) и находящегося в первоначально-однородном вертикальном магнитном поле H_0 , под действием переменного давления, распространяющегося по поверхности проводника в виде ударной волны.

Физически такая задача возникает при взрыве на поверхности упругого тела, причем приближенно можно считать давление на поверхности таким же, как при отражении ударной волны от твердой стенки и давление на поверхности считать известным.

Требуется определить скорости частиц упругой среды, напряжения и деформации, а также индуцированное магнитное поле в упругой среде и в диэлектрике.

В одномерной постановке поставленная задача рассматривалась в [1, 2]. Для упругой и упруго-пластической среды в отсутствии магнитного поля ряд нестационарных задач рассмотрен в [3, 4, 5, 6].

Для задач магнитной газодинамики сходные по постановке задачи рассмотрены в [7].

§ 1. Поскольку упругое твердое тело является плотной средой, даже для значительных давлений можно считать возникающее движение малым и пользоваться линейными уравнениями упругости с учетом объемных сил Лоренца.

Уравнения для бесконечно-проводящей упругой среды состоят из уравнений Максвелла и уравнений движения, имеющих вид

$$\operatorname{rot} \bar{h} = \frac{4\pi}{c} \bar{j}, \quad \bar{E} = -\frac{v}{c} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \times H_0 \right), \quad \bar{h} = \operatorname{rot} (\bar{u} \times H_0) \quad (1.1)$$

и

$$\rho \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} = G \nabla^2 \bar{u} + (\lambda + G) \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{u} + \frac{v}{c} (\bar{j} \times H_0) \quad (1.2)$$

Здесь начальное однородное магнитное поле \bar{H}_0 , имеющее компоненты $(0, H_0, 0)$, \bar{h} — возмущенное магнитное поле, \bar{u} — вектор перемещения частиц упругой среды, \bar{E} — электрическое поле, c — скорость света, v — магнитная проницаемость, λ, G — модули упругости [4], ρ — плотность среды, \bar{j} — плотность тока.

Задача предполагается плоской. причем движение не зависит от координаты z , ось Ox выбрана по поверхности среды, ось Oy — нормально к ней вглубь среды.

Граничные условия на поверхности $y = 0$ имеют вид [1]

$$H_y = H_{y_0}, \quad \tau_y = T_{22} - T_{12} = -P_1(x, t); \quad \tau_{xy} = T_{12} - T_{22} = 0 \quad (1.3)$$

Здесь $P_1(x, t)$ — приложенное на границе давление, τ_y , τ_{xy} — нормальное и касательное напряжения на границе $y = 0$, причем согласно [4] имеет место связь напряжений и деформаций

$$\begin{aligned} \tau_x &= \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - 2G \frac{\partial u}{\partial x}, & \tau_y &= \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - 2G \frac{\partial v}{\partial y} \\ \tau_{xy} &= G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (1.4)$$

где u, v — проекции вектора \bar{u} по осям x, y . Входящие в (1.3) компоненты максвелловского тензора напряжений имеют вид [8]

$$\begin{aligned} T_{11} &= \left[H_x^2 - \frac{1}{2} (H_x^2 + H_y^2) \right] \frac{n}{4\pi}, & T_{12} &= \frac{n}{4\pi} H_x H_y \\ T_{22} &= \left[H_y^2 - \frac{1}{2} (H_x^2 + H_y^2) \right] \frac{n}{4\pi} \end{aligned} \quad (1.5)$$

где $H_x = h_x$, $H_y = H_0 + h_y$, h_x, h_y малы. Линеаризация дает

$$T_{12} = H_0 h_x \frac{n}{4\pi}, \quad T_{22} = \left[\frac{1}{2} H_0^2 + H_0 h_y \right] \frac{n}{4\pi} \quad (1.6)$$

причем T_{11}, T_{12} относятся к упругой среде, а T_{22}, T_{12}^* — к диэлектрику, занимающему верхнее полупространство. Окончательно, обозначая через h_x, h_y компоненты индуцированного магнитного поля в верхней среде, можно найти при $y = 0$

$$\begin{aligned} h_y &= h_{y_0} - \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2G \frac{\partial v}{\partial y} = -P_1(x, t) \\ G \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{n}{4\pi} (H_0 h_x - H_0 h_y) &= 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

Для верхней среды имеют место уравнения Максвелла для диэлектрика [7]

$$h_x = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad h_y = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad (1.8)$$

Из (1.1), (1.2) можно найти уравнения упругой среды

$$\frac{\partial h_x}{\partial t} = i i_0 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t}, \quad \frac{\partial h_y}{\partial t} = -H_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + (\nu + G) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \\ &\quad - \frac{\nu}{4\pi} H_0 \left(\frac{\partial h_x}{\partial x} - \frac{\partial h_y}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= G \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + (\nu + G) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (1.9)$$

Таким образом, имеем, с одной стороны, уравнения (1.8) для верхнего полупространства $y > 0$, а с другой стороны, уравнения (1.9) для нижнего полупространства $y < 0$, решения которых удовлетворяют нулевым начальным условиям и граничным условиям (1.7) при $y = 0$.

Решение ищется методом Смирнова-Соболева.

Для произвольной функции $P_1(x, t)$ можно записать

$$P_1(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^t P_1(x_1, t_1) \delta(x - x_1) \delta(t - t_1) dx_1 dt_1 \quad (1.10)$$

поэтому вначале возьмем в граничном условии $P_1(x, t) = \delta(x) \delta(t)$. Обозначим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = v_1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = v_2, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = v_3, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = v_4, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = v_5, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = v_6 \quad (1.11)$$

Тогда из (1.9) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_6}{\partial t} &= (a^2 - a_1^2) \frac{\partial v_3}{\partial x} + (b^2 - a_1^2) \frac{\partial v_2}{\partial y} + (a^2 - b^2) \frac{\partial v_5}{\partial x} \\ \frac{\partial v_4}{\partial t} &= b^2 \frac{\partial v_4}{\partial x} + a^2 \frac{\partial v_3}{\partial y} + (a^2 - b^2) \frac{\partial v_5}{\partial y} \end{aligned} \quad (1.12)$$

где
$$a^2 = \frac{\nu + 2G}{\gamma}, \quad b^2 = \frac{G}{\gamma}, \quad a_1^2 = \frac{\nu H_0^2}{4\pi}$$

Для верхней среды имеются уравнения (1.8). Введем новые функции \tilde{v}_i , представляющие однородные функции [9] от $\frac{x}{t}$, $\frac{y}{t}$, в виде

$$v_i = \frac{\partial^2 \tilde{v}_i}{\partial x \partial t} \quad (i=1, 2, 3, \dots, 6) \quad (1.13)$$

Функции \tilde{v}_i также удовлетворяют уравнениям (1.12). Уравнения (1.8) записываются в виде $h_x = H_0 \frac{\partial^2 P_1}{\partial x \partial t}$, $h_y = H_0 \frac{\partial^2 P_2}{\partial x \partial t}$

$$\frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial P_2}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial P_1}{\partial y} - \frac{\partial P_2}{\partial x} = 0 \quad (1.14)$$

Тогда граничные условия (1.7) запишутся в виде

$$\begin{aligned} -\varphi_1 - P_2 (a^2 - 2b^2) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial t} + a^2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial t} &= -\frac{1}{\beta} \zeta(x) \delta(t) \\ (b^2 + a^2) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial t} + b^2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 P_1}{\partial x \partial t} \end{aligned} \quad (1.15)$$

Интегрируя, получим

$$\begin{aligned} (a^2 - 2b^2) \varphi_1 + a^2 \varphi_2 &= -\frac{1}{\beta} \zeta(x) \varepsilon(t) \\ (b^2 - a^2) \varphi_2 + b^2 \varphi_1 - a^2 P_1 &= 0 \\ -\varphi_1 &= P_2 \end{aligned} \quad (1.16)$$

Функции φ_i ищутся методом Смирнова-Соболева в виде

$$\varphi_i = \operatorname{Re} \Phi_i(z) \quad (i = 1, 2, 3, \dots, 6)$$

где комплексная переменная z находится как функция от $\frac{t}{x}$, $\frac{t}{y}$ по формуле

$$zx + \beta(z)y = t \quad (1.17)$$

Подставляя φ_i в уравнения (1.12), которым удовлетворяют также функции φ_i , отбрасывая знак Re , получим соотношения

$$\begin{aligned} \Phi_1'(z) &= -\frac{1 - z^2 b^2 - a^2 \beta^2}{\beta(a^2 - b^2)} \Phi_6'(z), \quad \Phi_2(z) = -\frac{1 - z^2 b^2 - a^2 \beta^2}{\beta(a^2 - b^2)} \Phi_6(z) \\ \Phi_3(z) &= \frac{1 - z^2 b^2 - a^2 \beta^2}{\beta^2(a^2 - b^2)} \Phi_6(z), \quad \Phi_4'(z) = -z \Phi_6'(z), \quad \Phi_5(z) = -\beta \Phi_6'(z) \end{aligned} \quad (1.18)$$

причем условие разрешимости системы уравнений для $\Phi_6'(z)$ дает дисперсионное уравнение $\beta = \beta(z)$

$$(1 - z^2 b^2 - a^2 \beta^2) \{1 - z^2(a^2 + a^2) - \beta^2(a^2 + b^2)\} = a^2 \beta^2 (a^2 - b^2)^2 \quad (1.19)$$

По (1.18) все $\Phi_i(z)$ определяются через $\Phi_6(z)$.

Подставляя значение $\beta_{1,2}(z)$ в (1.17), получим значение $x_{1,2}$, и решение запишется в виде

$$\varphi_i = \operatorname{Re} \Phi_i^{(1)}(x_1) + \operatorname{Re} \Phi_i^{(2)}(x_2) \quad (1.20)$$

где $(\Phi_i^{(1)})'$ и $(\Phi_i^{(2)})'$ определяются через $(\Phi_6^{(1)})'$ и $(\Phi_6^{(2)})'$ по формулам (1.18). Функции P_1 и P_2 ищутся в виде

$$P_1 = \operatorname{Re} F_1(\gamma), \quad P_2 = \operatorname{Re} F_2(\gamma) \quad (1.21)$$

где γ определяется по формуле

$$\gamma(x + iy) = t \quad (1.21')$$

Подставляя (1.21) в (1.14) и отбрасывая знак Re , получим

$$F_2^* = iF_1^* \quad (1.22)$$

При $y=0$ по формулам (1.17) и (1.21) получается

$$z = \gamma = \frac{t}{x}$$

причем z — действительное.

Для действительного z $\ln z = \ln |z| + i\pi[1 - \varepsilon(z)]$, то есть $\varepsilon(z) = 1 - \text{Re} \frac{1}{i\pi} \ln z$.

Так как при $t \geq 0$ $\varepsilon\left(\frac{t}{x}\right) = \varepsilon(x)\varepsilon(t)$, то по условию (1.16) можно получить, отбрасывая знак Re ,

$$\begin{aligned} (a^2 - 2b^2)[(\Phi_1^{(1)})' + (\Phi_1^{(2)})'] + a^2[(\Phi_2^{(1)})' + (\Phi_2^{(2)})'] &= \frac{1}{\rho} \frac{1}{\pi i} \\ (b^2 + a^2)[(\Phi_2^{(1)})' + (\Phi_2^{(2)})'] + b^2[(\Phi_4^{(1)})' + (\Phi_4^{(2)})'] &= a^2 F_1^* \\ (\Phi_1^{(1)})' + (\Phi_1^{(2)})' &= -F_2^* \end{aligned} \quad (1.23)$$

То же значение постоянной $-\frac{1}{\rho\pi i}$ в правой части первого уравнения (1.23) получится переходом к волновому уравнению, что можно сделать, так как при $y=0$, $z = \frac{t}{x}$ не зависит от вида $\beta(z)$.

По (1.23) можно получить $(\Phi_0^{(1)})'$, $(\Phi_0^{(2)})'$, F_1^* и F_2^* . ($F_1^* = -iF_2^*$) и, следовательно, F_1 , P_1 и φ_1 .

Зная φ_1 , по (1.13) можно найти v_1 .

Для примера определим v_0 в виде $v_0 = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial t} = \text{Re} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x \partial t}$ или

$$\begin{aligned} v_0 = \text{Re} \left\{ - \frac{(\Phi_0^{(1)})'(z_1) a_1'}{[x + \beta_1'(z_1) y]^2} + \frac{z_1 \beta_1'' y}{[x + \beta_1'(z_1) y]^3} \Phi_0^{(1)'}(z_1) - \right. \\ \left. - \frac{(\Phi_0^{(2)})'(z_2) a_2'}{[x + \beta_2'(z_2) y]^2} + \frac{z_2 \beta_2'' y}{[x + \beta_2'(z_2) y]^3} \Phi_0^{(2)'}(z_2) \right\} \end{aligned} \quad (1.24)$$

Мы получили v_0 для сосредоточенной силы. Решение для распределенной силы получается путем замены переменных x через $x - x_1$ и t через $t - t_1$, умножения решения на P_1 и интегрирования, то есть в виде

$$v_0 = \text{Re} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty P_1(x_1, t_1) \left\{ - \frac{(\Phi_0^{(1)})'(z_1) a_1'}{[x - x_1 + \beta_1'(z_1) y]^2} + \frac{z_1 \beta_1'' y}{[x - x_1 + \beta_1'(z_1) y]^3} \Phi_0^{(1)'}(z_1) - \right.$$

$$\frac{(\Phi_0^{(2)}(z_2) z_2)'}{[x - x_1 + \beta_2'(z_2)y]^2} + \frac{a_2 z_2 y}{[x - x_1 + \beta_2'(z_2)y]^3} \Phi_0^{(2)}(z_2) dx_1 dt_1 \quad (1.25)$$

где $a_{1,2}$ можно определить по формуле

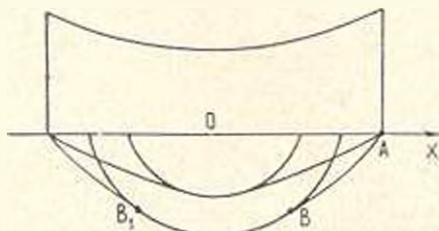
$$a_{1,2}(x - x_1) + \beta_{1,2}(z_{1,2})y = t - t_1 \quad (1.26)$$

Точечная волна BB_1 (фиг. 1), является огибающей плоских волн, уравнение которых дается (1.17), где $z = \text{const}$ (α, β — действительные). Тогда точечная волна будет огибающей (1.17) по z

$$\alpha x + \beta(z)y = t \quad \alpha x + \beta'(z)y = 0 \quad (1.27)$$

Для определенности исследуем решение около быстрых волн, которое соответствует меньшему значению $\beta, \beta = \beta_0$, в (1.27).

Отметим, что, когда точка (x, y) находится вблизи волны BB_1 (фиг. 1), согласно (1.27) кривая L (фиг. 2), даваемая (1.26), находится вблизи точки $(0, 0)$.



Фиг. 1

Поэтому нужно в (1.25) удерживать члены с наибольшей особенностью, причем вблизи быстрой волны существенен лишь четвертый член в правой части (1.25)

$$v_4 = \text{Re} \int_{(b)}^{\cdot} P_1(x_1, t_1) \Phi_0^{(2)}(z_2) \frac{a_2 z_2 y}{[x - x_1 + \beta_2'(z_2)y]^3} dx_1 dt_1 \quad (1.28)$$

Отметим, что вблизи волны

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{x - x_1 + \beta_2'(z_2)y} = \frac{y \beta_2''(z_2)}{[x - x_1 + \beta_2'(z_2)y]^2}$$

и (1.28) примет вид

$$v_0 \approx \text{Re} \Phi_0^{(2)}(z_2) \frac{\beta_2}{\beta_2'} \frac{\partial}{\partial y} \int_{(b)}^{\cdot} P_1(x_1, t_1) \frac{dx_1 dt_1}{x - x_1 + \beta_2'(z_2)y} \quad (1.29)$$

Определим значение z_0 по формуле

$$x - x_1 + \beta_2'(z_0)y = 0 \quad (1.30)$$

Так как $\arg z > 0$, то для малых $a_2 - a_0$ по (1.26) получим

$$x_1 - x_0 = i \sqrt{\frac{2|t - t_1 - \alpha_0(x - x_1) - \beta_2(\alpha_0)y|}{-\beta_2'(\alpha_0)y}} \quad (1.31)$$

Разлагая в (1.29)

$$x - x_1 + \beta_2(\alpha_0)y = -i \sqrt{-2\beta_2'(\alpha_0)y} \sqrt{t - t_1 - \alpha_0(x - x_1) - \beta_2(\alpha_0)y}$$

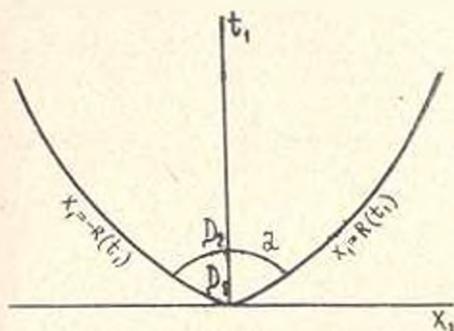
получим

$$v_0 = \operatorname{Re} \Phi_0^{(2)} i \frac{\alpha_0}{\beta_2} \frac{1}{V - 2\beta_2'(\alpha_0)y} \times \\ \times \frac{\partial}{\partial y} \iint_{(D)} P_1(x_1, t_1) \frac{dx_1 dt_1}{|t - t_1 - \alpha_0(x - x_1) + \beta_2(\alpha_0)y|} \quad (1.32)$$

Положим, что на поверхности профиль давления

$$P_1(x_1, t_1) = P(t_1) f \left| \left| \frac{x_1}{R(t_1)} \right| \right|, \quad f(1) = 1$$

и, кроме того, для малых t_1 $P(t_1) = At_1^2$, а $R(t_1) \approx Vt_1$, $V = \text{const}$, $V > c_{1,2}$, где $c_{1,2} = \frac{1}{1 \pm \beta_2'}$ — скорости медленных и быстрых волн ($V > c_2$).



Фиг. 2

§2. Обозначим $\Phi_0^{(2)} i \frac{\alpha_0}{\beta_2} \frac{1}{V - 2\beta_2'(\alpha_0)y} = a + bi$, тогда получим из (1.32) $v_0 = \operatorname{Re}(a + bi) f$, где

$$f = \frac{\sigma}{\partial y} \iint \frac{P_1(x_1, t_1) dx_1 dt_1}{|t - t_1 - \alpha_0(x - x_1) - \beta_2(\alpha_0)y|} \quad (2.1)$$

Вычислим часть v_0 , соответствующую a . Тогда в (2.1) для того, чтобы получить действительную часть с множителем a , следует взять область интегрирования D_1 (фиг. 2) для $\varphi > 0$, где

$$\varphi = t - t_1 - \alpha_0(x - x_1) - \beta_2(\alpha_0)y$$

причем $\varphi = 0$ дает линию L (фиг. 2).

Граничное условие берется в виде, характеризующем окрестность волновых фронтов

$$P_1(x_1, t_1) = At_1^2 [t_1 - f(|x_1|)] F\left(\frac{|x_1|}{R(t_1)}\right)$$

Здесь $t_1 = f(|x_1|)$ — функция, обратная к $|x_1| = R(t_1)$.

Уравнение линии L (фиг. 2) будет

$$t_1 = t - \alpha_0(x - x_1) - \beta(\alpha_0)y, \quad x - x_1 + \beta'(\alpha_0)y = 0$$

Используя уравнение точечной волны

$$t = t_{\text{дифр.}}, \quad t_{\text{дифр.}} = \alpha x + \beta(x)y, \quad x + \beta'(x)y = 0 \quad (2.2)$$

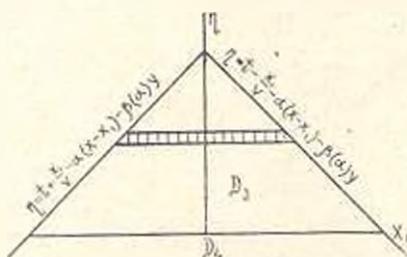
можно получить

$$t - t_1 - \alpha_0(x - x_1) - \beta(\alpha_0)y = t - t_1 - \alpha(x - x_1) - \beta(x)y \quad (2.3)$$

Введем новую переменную интегрирования

$$\eta = t - t_1 - \alpha(x - x_1) - \beta(x)y \quad (2.4)$$

Область интегрирования D_1 в переменных (η, x_1) дается на фиг. 3.



Фиг. 3

Вблизи волны (2.2) имеет место $x_1 \approx 0$, $t_1 \approx 0$ (фиг. 2), поэтому $R(t_1) \approx Vt_1$, $V = R'(0)$, причем поскольку $f'(|x_1|) = \frac{1}{R'(t)}$ можно в граничном условии полагать

$$f(|x_1|) = \frac{|x_1|}{V}$$

Тогда (2.1) примет вид

$$\frac{J}{A} = \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{\tau} \frac{d\eta}{V\eta} \int_{-\frac{1}{V} + \alpha}^{\frac{1}{V} - \alpha} t_1^2 \left(t_1 - \frac{|x_1|}{V}\right)^2 F\left(\frac{|x_1|}{Vt_1}\right) dx_1 \quad (2.5)$$

причем $t_1 = \tau + \alpha x_1 - \beta_0$, $\tau = t - \alpha x - \beta(x)y$

Обозначим $\frac{x_2}{Vt_2} = \zeta$, тогда $x_1 = \zeta \frac{z - \eta}{1 - \alpha \zeta}$ и из (1.5) имеем

$$\frac{J}{A} = VT \frac{\partial}{\partial y} \int_0^z (\tau - \eta)^{\mu + \lambda + 1} \frac{d\tau}{V \tau} \quad (2.6)$$

где

$$T = \int_0^z \frac{(1 - \tau)^{\lambda}}{(1 - \alpha V \tau)^{\mu + \lambda + 2}} F(\tau) d\tau + \int_{-1}^0 \frac{(1 + \tau)^{\lambda} F(-\tau) d\tau}{(1 - \alpha V \tau)^{\mu + \lambda + 2}} \quad (2.7)$$

Вычисление интеграла (2.6) с учетом равенства $\frac{\partial z}{\partial y} = -\beta$ даст

$$J = -VAT(\mu + \lambda + 1)\beta z^{\mu + \lambda + 1} B\left(1 + \mu + \lambda, \frac{1}{2}\right) \quad (2.8)$$

Найдем значение T из (2.7) вблизи точки B (фиг. 1), где $\alpha = \frac{1}{V}$.

Полагая $\tau = 1 - \alpha V$ и учитывая, что для малых α в (2.7) для выделения особой части решения следует оставить только первое слагаемое и интегрировать в окрестности $\zeta = 1$, то есть полагать $\tau^{\lambda} \approx \tau$, после замены $1 - \tau = \eta y_1$, где y_1 — новая переменная интегрирования, можно найти

$$T = (1 - \alpha V)^{-\mu - 1} B(\lambda + 1, \mu + 1) \quad (2.9)$$

Для отделения действительной части решения в слагаемом biJ из v_0 следует брать значения $\varphi \leq 0$, то есть область D_2 (фиг. 2). Тогда слагаемое biJ в выражении для v_0 примет вид

$$biJ = Ab \frac{\partial}{\partial y} \iint_{D_2} \frac{[t_1 - f(|x_1|)]^{\lambda} t_1^{\lambda} F\left(\frac{|x_1|}{R(t_1)}\right) dx_1 dt_1}{V - \eta}$$

где значение η дано (2.4).

Обозначим

$$I = \frac{bJ}{A}$$

В плоскости (η, x_1) (фиг. 3) область интегрирования будет ниже оси x_1 , и значение интеграла запишется в виде

$$I = \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\infty}^0 \frac{\partial \eta}{V - \eta} \int_{x_1}^{\eta} t_1^{\lambda} \left(t_1 - \frac{|x_1|}{V}\right)^{\lambda} F\left(\frac{|x_1|}{Vt_1}\right) dx_1 \quad (2.10)$$

где x_1 и x_1^- — образы линий $|x_1| = R(t_1)$.

$$x_1 = \frac{\tau - \eta}{\frac{1}{V} - \alpha}, \quad x_1^- = -\frac{\tau - \eta}{\frac{1}{V} + \alpha}$$

Вводя переменную

$$\frac{x_1}{Vt_1} = \zeta, \quad x_1 = \zeta \frac{\tau - \eta}{\frac{1}{V} - \alpha \zeta}$$

причем

$$t_1 = (\tau - \eta) \frac{1}{1 - \alpha V \zeta}$$

можно получить из (2.10)

$$\begin{aligned} I &= V \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\infty}^0 \frac{d\zeta}{\frac{1}{V} - \alpha \zeta} (\tau - \eta)^{\mu + \lambda + 1} \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{1 - \alpha V \zeta} \right)^{\mu + \lambda + 2} (1 - \zeta)^{\lambda} F(\zeta) d\zeta = \\ &= -TV \int_{-\infty}^0 (\mu + \lambda + 1) (\tau - \eta)^{\mu + \lambda + 1} \frac{d\zeta}{1 - \alpha \zeta} \end{aligned}$$

где T дается (2.7).

Обозначим $-\tau_1 = \alpha X$, тогда получим

$$I = V(1 - \alpha V)^{-\mu - \lambda - 1} \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\zeta - \tau_1} \frac{\Gamma(\mu + 1) \Gamma(\mu + 1) \Gamma\left(-\mu - \lambda - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\mu)} \times \sin \pi(\lambda + \mu) \quad (2.11)$$

Решение вблизи точечной волны согласно (1.32), (2.1) и (2.11) дается в виде $v_1 = aJ - bAI$, где J определяется из (2.8), а I — из (2.11). Мы видим, что учет комплексного значения амплитуды ($b \neq 0$) не меняет характера особенности решения точечной волны.

§ 3. Определение решения вблизи AB .

Для отделения действительной части решения в слагаемом aJ в формуле для v_1 следует выбрать область интегрирования D над кривой $L(\varphi > 0)$, для слагаемого bI из v_1 — над кривой $L(\varphi < 0)$. Сначала вычисляем слагаемое, соответствующее действительной части a . Когда точка $M(x, y)$ принадлежит AB (фиг. 1), область интегрирования D_1 (фиг. 4) стягивается к точке $x_1 = R(t_0)$, $t_1 = t_0$, что следует из уравнения линии $L(\varphi = 0)$ и уравнения AB

$$\begin{aligned} t_0 - t_1 &= \frac{1}{R'(t_0)} [x - R(t_0)] + \beta(\tau_1) y, \quad x - R(t_0) + \beta(\tau_1) y = 0 \\ \alpha_1 &= \frac{1}{R'(t_0)} \quad (3.1) \end{aligned}$$

Вводя малые переменные интегрирования (3.1) $t_1 - t_0 = \bar{t}$, $x_1 - R(t_0) = \bar{x}$, с учетом соотношения $x - R(t_0) + \beta'(a_1)y = 0$ можно представить равенство $x - x_1 + \beta'(a_0)y = 0$ или $R(t_0) - \beta'(a_1)y - R(t_0) - x + \beta'(a_0)y = 0$ в виде ряда по $x_0 - x_1$

$$\bar{x} \approx \beta'(a_1)y(x_0 - x_1) \quad (3.2)$$

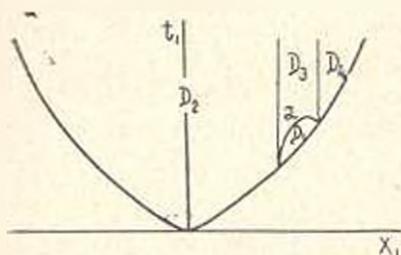
Вводя переменную интегрирования $\zeta = t_1 - f(x_1)$, можно разложить вокруг точки $t_1 = t_0$ функцию $f(x_1)$ в виде $f(x_1) = t_0 + \frac{\bar{x}}{V_1} + \frac{R''(t_0)}{2V_1^3} \bar{x}^2$, откуда можно получить

$$\zeta = \bar{t} - \frac{\bar{x}}{V_1} + \frac{R''(t_0)}{2V_1^3} \bar{x}^2 \quad (3.3)$$

и записать для $\varphi = t - t_1 - z_0(x - x_1) - \beta'(z_0)y$ п (2.1)

$$\varphi = t - t_0 - \bar{t} + x_1 \bar{x} - [x - R(t_0) - \bar{x}](z_0 - z_1) - \beta'(z_1)y(z_0 - z_1) - \frac{1}{2} \beta''(z_1)y(z_0 - z_1)^2$$

Здесь использовано, что t_φ находится из (3.1), записанного до второго порядка, причем $x_1 = \frac{1}{V_1}$, $R'(t_0) = V_1$. Теперь из (3.3) получится



Фиг. 4

$$\varphi = t - t_0 - \zeta + \frac{R''(t_0)}{2V_1^3} \bar{x}^2 - (x - \bar{x})(z_0 - z_1) - \frac{1}{2} \beta''(z_1)y(z_0 - z_1)^2$$

причем согласно (3.1)

$$x - R(t_0) + \beta'(a_1)y = 0$$

Подставляя сюда $x_0 - x_1$ из (3.2), можно получить

$$r = 1 + \frac{\beta''y R''(t_0)}{V_1^3}, \quad \varphi = t - t_\varphi + \frac{r}{2\beta''y} \bar{x}^2 - \zeta$$

Пределы интегрирования п (2.1) по ζ будут $0 < \zeta < \zeta_0$, где ζ_0 обращает в нуль φ , $\zeta_0 = t - t_\varphi + \frac{r}{2\beta''y} \bar{x}^2$ (на линии L), а пределы по \bar{x} будут $\bar{x} = r_1, r_2$, которые обращают в нуль ζ_0 , $r_{1,2} = \pm \sqrt{(t - t_\varphi) \sqrt{-\frac{2\beta''y}{r}}}$.

Граничное условие дается в § 2, где $P_1(x_1, t_1) = At_1^2 [t_1 - f(x_1)]$, так как $|x_1| = R(t_1)$, $F\left(\frac{|x_1|}{R(t)}\right) = 1$.

Тогда (2.1) вблизи AB примет вид

$$J = At_0^2 \frac{\partial}{\partial y} \int_{r_2}^{r_1} d\bar{x} \int_0^{\bar{x}} \frac{\zeta d\zeta}{V\zeta} \quad (3.4)$$

Вводя переменную интегрирования $\zeta = \frac{\bar{x}}{t-t_0 + \frac{r}{2\beta''y} \bar{x}^2}$, внутренний интеграл можно найти в виде

$$\left(t-t_0 + \frac{r}{2\beta''y} \bar{x}^2\right)^{-\frac{1}{2}} B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Далее, вводя в (3.4) вместо \bar{x} переменную $\bar{x} = \frac{\zeta}{\sqrt{t-t_0 - \frac{r}{2\beta''y} \zeta^2}}$,

можно получить

$$J = -At_0^2 \zeta \left(-\frac{2\beta''y}{r}\right)^{\frac{1}{2}} (t-t_0)^{\frac{1}{2}} \quad (3.5)$$

Для слагаемого в (2.1), содержащего коэффициент bi , действительное значение решения дается значениями $\varphi = 0$, то есть областями D_2, D_3, D_4 (фиг. 4).

Тогда слагаемое в v_0 вблизи полны AB , которое соответствует коэффициенту bi , имеет вид $biJ = t_0^2 bAI$,

$$I = \frac{\partial}{\partial y} \int_{r_2}^{r_1} d\bar{x} \int_{\zeta_0}^{\bar{x}} \frac{\zeta d\zeta}{V\zeta - \zeta_0} + \frac{\partial}{\partial y} \int_{r_1}^{\infty} d\bar{x} \int_0^{\bar{x}} \frac{\zeta d\zeta}{V\zeta - \zeta_0} + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-\infty}^{r_2} d\bar{x} \int_0^{\bar{x}} \frac{\zeta d\zeta}{V\zeta - \zeta_0} \quad (3.6)$$

где

$$r_{1,2} = \pm \sqrt{t-t_0} \sqrt{-\frac{2\beta''y}{r}}, \quad \zeta_0 = t-t_0 + \bar{x}^2 \frac{r}{2\beta''y}$$

В первом слагаемом в правой части, где интегралы берутся по области D_2 (фиг. 4), имеет место $\zeta_0 > 0$, а во втором и третьем слагаемых, взятых по областям D_3 и D_4 , $\zeta_0 < 0$.

Заметим, что третье слагаемое в правой части равно второму слагаемому, откуда

$$I = \frac{\partial}{\partial y} \int_{\frac{r_1}{2}}^{r_1} d\bar{x} \int_{\zeta_0}^{\infty} \frac{\zeta^{\lambda} d\zeta}{V\zeta - \zeta_0} + 2 \frac{\partial}{\partial y} \int_{\frac{r_1}{2}}^{\infty} d\bar{x} \int_0^{\infty} \frac{\zeta^{\lambda} d\zeta}{V\zeta - \zeta_0} = I_1 + 2I_2$$

Введем в I_1 новую переменную интегрирования $\eta = \frac{\zeta}{r_1}$, тогда получится

$$I_1 = \frac{\partial}{\partial y} \int_{\frac{r_1}{2}}^{r_1} d\bar{x} \int_{\zeta_0}^{\infty} \frac{\eta^{\lambda} d\eta}{V\eta - 1} = -2B \left(-\lambda - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) \frac{\partial t_{\Phi}}{\partial y} \left(\lambda + \frac{1}{2} \right) \times \\ \times \left(-\frac{r}{2\beta'' y} \right)^{\lambda - \frac{1}{2}} \int_0^{r_1} (r_1^2 - \bar{x}^2)^{\lambda - \frac{1}{2}} d\bar{x}$$

или

$$I_1 = \frac{\Gamma\left(-\lambda - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(-\lambda)} \beta \left(\lambda + \frac{1}{2} \right) \frac{\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\lambda + 1)} \times \\ \times \left(-\frac{2\beta'' y}{r} \right)^{\frac{1}{2}} (t - t_{\Phi})^{\lambda} \quad (3.7)$$

Для вычисления I_2 , где $\zeta_0 < 0$, обозначим $\eta = -\frac{\zeta}{\zeta_0}$, тогда полу-

чим

$$I_2 = B \frac{\partial}{\partial y} \int_{\frac{r_1}{2}}^{\infty} d\bar{x} (-\zeta_0)^{\lambda + \frac{1}{2}}$$

где

$$B = \int_0^{\infty} \frac{\eta^{\lambda} d\eta}{V\eta + 1}$$

или

$$I_2 = B \left(\lambda + \frac{1}{2} \right) \beta \left(-\frac{r}{2\beta'' y} \right)^{\lambda - \frac{1}{2}} \int_{\frac{r_1}{2}}^{\infty} (\bar{x}^2 - r_1^2)^{\lambda - \frac{1}{2}} d\bar{x} \quad (3.8)$$

Обозначая $\bar{x} = r_1 \xi$, подставляя I_1 и I_2 в (3.6), напомним решение (3.6), соответствующее bi , в виде

$$I = -\frac{\pi \sin \pi \lambda}{\sin \pi \left(\lambda + \frac{1}{2} \right)} \zeta \left(\lambda + \frac{1}{2} \right) \left(-\frac{2\zeta'' y}{r} \right)^{\frac{1}{2}} (t - t_\varphi) + \\ + \frac{\pi}{\sin \pi \lambda \cos \pi \lambda} \zeta \left(-\frac{2\zeta'' y}{r} \right)^{\frac{1}{2}} (t - t_\varphi)^{\lambda} \quad (3.9)$$

и общее решение будет

$$v_n = aJ + bAt_0^{\lambda} I \quad (3.10)$$

где I определяется из (3.9), J — из (3.5).

Все приведенные здесь интегралы понимаются в смысле главного значения, то есть вычисляются для тех λ , для которых они сходятся, а для остальных значений λ , значения этих интегралов считаются равными вычисленным, что составляет содержание метода аналитического продолжения по параметру [10]. Другими словами всюду берется конечная часть интегралов.

Вычислим выражение (3.6) для целых λ , а точнее для $\lambda = 0$. Тогда I_1 получится равным нулю, а значение I найдется в виде (где принимается главное значение интегралов)

$$I_2 = \frac{\partial}{\partial y} \int_{r_1}^{\infty} d\bar{x} \int_0^{\infty} \frac{d\bar{\zeta}}{V \bar{\zeta} - \bar{\zeta}_0} = -\zeta \int_{r_1}^{\infty} d\bar{x} (-\bar{\zeta}_0)^{-\frac{1}{2}} = \\ = -\zeta \sqrt{-\frac{2\zeta'' y}{r}} \int_{r_1}^{\infty} (\bar{x}^2 - r_1^2)^{-\frac{1}{2}} d\bar{x} = \\ = \zeta \sqrt{-\frac{2\zeta'' y}{r}} \cdot \frac{1}{2} (\ln |t - t_\varphi| + \dots) \quad (3.11)$$

причем $I = 2I_2$ и оставлено слагаемое с наибольшей особенностью.

Таким образом, согласно (3.10), (3.5), (3.11) решение в случае $\lambda = 0$ имеет вид

$$v_n = -A \zeta \left(-\frac{2\zeta'' y}{r} \right)^{\frac{1}{2}} t_0^{\lambda} \{ a [\bar{\zeta}(t - t_\varphi)] + b \ln |t - t_\varphi| + \dots \} \quad (3.12)$$

Интересно, что за счет непроходящей среды в верхнем полупространстве, в котором скорость возмущений бесконечна, среда в нижнем полупространстве впереди фронта волны ABV_1 (фиг. 3) будет возмущена, что аналитически выражается в наличии в (2.1) комплексной амплитуды $a + bi$, причем при $b \neq 0$ в (3.12) решение впереди волны AB , где $t < t_\varphi$, не равно нулю, а на самой волне AB имеется логарифмическая особенность решения, что для задачи о полном внутреннем отражении в газовой динамике показано в [11].

Тем не менее характер поведения решения вблизи AB при $\lambda \neq 0$, а также решения вблизи BB_1 (фиг. 3) для $b \neq 0$ будет таким же, как для $b = 0$, что видно из (3.9) и (2.12), отличие будет только в коэффициенте.

§ 4. Рассмотрим решение вблизи точки B .

Можно показать, что поскольку вблизи точки B $r \approx 1$, решение вблизи B имеет вид

$$u_x = aJ + bAt, \quad J = -\frac{\beta}{V^2} \int_{D_1} \int_{D_2} \frac{\lambda_1^{\lambda-1} x_1^\lambda dx_1 d\xi}{V^2}$$

$$I = -\frac{\beta}{V^2} \int_{D_1} \int_{D_2} \frac{\lambda_1^{\lambda-1} x_1^\lambda dx_1 d\xi}{V^2 - \varepsilon}$$

Области D_1 и D_2 указаны на фиг. 2 и 4. Вычисление J проводится подобно [12] и вблизи B получается

$$J = -\frac{\beta}{V^2} (t - t_0)^{\lambda + \frac{\mu}{2}} \left(-\frac{2\beta''y}{r} \right)^{\frac{\lambda+1}{2}} (1 - \omega)^{\lambda + \mu - \frac{1}{2}} 2^{\lambda - \frac{1}{2}} \times$$

$$\times \frac{\Gamma(\lambda + 1) \Gamma(\mu + 1)}{\Gamma(\lambda + \mu + \frac{3}{2})} V^{\mu} F\left(\frac{1}{2} - \lambda, \lambda + \frac{1}{2}, \lambda + \mu + \frac{3}{2}, \frac{1 - \omega}{2}\right) \quad (4.1)$$

позади BB_1 и

$$J = -\frac{\beta}{V^2} \pi (t - t_0)^{\mu} \left(\frac{x + \beta'y}{r} \right)^{\lambda} \left(-\frac{2\beta''y}{r} \right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times F\left(-\frac{\mu}{2}, \frac{1 - \mu}{2}, \lambda + 1, \frac{1}{\omega^2}\right) \quad (4.2)$$

между BB_1 и AB : здесь

$$\omega = \frac{x + \beta'y}{V(t - t_0) + 2\beta''ry}, \quad r_1 = 1 + \beta''y \frac{R''(0)}{V^2}$$

причем всюду аргумент функции $\lambda(z)$ равен $z = \frac{1}{V}$.

Для вычисления интеграла I в области позади BB_1 следует интегрировать по области D_2 (фиг. 2). Учитывая, что вблизи B можно отбросить область интегрирования, соответствующую $x_1 < 0$, можно получить

$$\frac{I}{\beta''} = \int_0^{r_1} x_1^\lambda dx_1 \int_K^{\infty} \frac{\lambda_1^{\lambda-1} d\xi}{V\xi - K} + \int_{r_1}^{\infty} x_1^\lambda dx_1 \int_0^{\infty} \frac{\lambda_1^{\lambda-1} d\xi}{V\xi - K} \quad (4.3)$$

где

$$K = t - t_\varphi + \frac{r}{2\beta''y} \left(x_1 - \frac{x + \beta'y}{r} \right)^2$$

а пределы интегрирования по x_1 , соответствующие кривой $x_1 = R(t_1)$ (фиг. 2), находятся из равенства

$$r_{2,1} = \frac{x + \beta'y}{r} = \sqrt{-\frac{2\beta''y}{r}} \sqrt{t - t_\varphi} \quad (4.4)$$

Обозначая в правой части уравнения (4.3) первый интеграл через $I_1 L_1$, а второй — через $I_2 L_2$, где

$$I_1 = \int_0^1 \frac{i\eta^{\lambda-1} d\eta}{V\eta-1} = \lambda \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1-\lambda)}$$

$$I_2 = \int_0^1 \frac{i\eta^{\lambda-1} d\eta}{V\eta+1} = \lambda \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\lambda\right) \Gamma(\lambda)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \quad (4.5)$$

и делая в L_1 и L_2 замены переменных

$$x_1 = \frac{x + \beta'y}{r} + \sqrt{-\frac{2\beta''y}{r}} \sqrt{t - t_\varphi} \zeta, \quad 1 - \zeta = \pm (1 - \omega)y_2 \quad (4.6)$$

соответственно, приводя интегралы к гипергеометрическим функциям подобно [12], можно получить решение позади BB_1 в виде

$$I = I_1 L_1 + I_2 L_2$$

$$L_1 = \left(-\frac{2\beta''y}{r}\right)^{\frac{\mu+1}{2}} (t - t_\varphi)^{\frac{\mu}{2} + \lambda} (1 - \omega)^{\lambda + \mu + \frac{3}{2}} \frac{\Gamma(\mu+1) \Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\mu + \lambda + \frac{3}{2}\right)} \times$$

$$\times 2^{\lambda - \frac{1}{2}} F\left(\frac{1}{2} - \lambda, \frac{1}{2} + \lambda, \lambda + \mu + \frac{3}{2}, \frac{1 - \omega}{2}\right)$$

$$L_2 = \left(-\frac{2\beta''y}{r}\right)^{\frac{\mu+1}{2}} (t - t_\varphi)^{\frac{\mu}{2} + \lambda} (1 - \omega)^{\lambda + \mu + \frac{1}{2}} 2^{\lambda - \frac{1}{2}} \times$$

$$\times \frac{\Gamma(-2\lambda - \mu) \Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\lambda - \frac{1}{2}\right)} F\left(\frac{1}{2} - \lambda, -2\lambda - \mu, -\lambda - \mu + \frac{1}{2}, \frac{\omega + 1}{2}\right) \quad (4.7)$$

При $\lambda = \mu = 0$, пользуясь соотношением $\lambda x^{\lambda-1} = \delta(x)$, можно видеть,

что первый интеграл (4.3) равен нулю, а конечное значение второго интеграла равно

$$\frac{\beta}{\sqrt{-\frac{\beta}{2\beta''y}}} \ln \left| \sqrt{-\frac{2\beta''y}{r}} \sqrt{t-t_0} \right|$$

Это медленно меняющаяся функция, поэтому можно считать, что быстро меняющаяся часть решения I , соответствующая мнимой части амплитуды b позади BB_1 , равна нулю, что согласуется с формулой (2.12).

Тот же вывод получится непосредственно из (4.7), где следует выделить конечную часть решения.

Вблизи линии BB_1 , где $\omega=1$, при отходе от точки B следует из (4.7)

$$1-\omega \approx \frac{z}{2(t-t_0)}, \quad \text{а} \quad t-t_0 \approx -\frac{(x+\beta'y)^2}{2\beta''ry} = -\left(x-\frac{1}{V}\right)^2 \frac{\beta''y}{2r}$$

$$I = -\frac{\sin \pi(\lambda+\mu)}{\Gamma^2 \pi} \Gamma(1+\mu) \Gamma(1+\lambda) \Gamma\left(-\mu-\lambda-\frac{1}{2}\right) \times$$

$$\times \left(-\frac{2\beta''y}{r}\right)^{\mu-1} (t-t_0)^{\lambda+1} (1-\omega)^{\lambda+\mu+\frac{1}{2}} 2^{-\lambda-\frac{1}{2}}$$

Это значение совпадает с (2.12), то есть решение вблизи $B\bar{D}_1$ и около точки B асимптотически переходят друг в друга. Для определения решения между BB_1 и AB вблизи B следует в выражении для I интегрирование производить по областям D_2, D_3, D_1 (фиг. 4), при этом

$$\frac{I}{-\frac{\beta}{V^2}} = \int_0^{\bar{x}_1} x_1^{\mu} dx_1 \int_0^{\bar{x}_2} \frac{x_2^{\lambda-1} dx_2}{V-\varphi} + \int_{\bar{x}_1}^{\bar{x}_2} x_1^{\mu} dx_1 \int_{\bar{k}}^{\bar{x}_2} \frac{x_2^{\lambda-1} dx_2}{V-\varphi} +$$

$$+ \int_{\bar{x}_1}^{\bar{x}_2} x_1^{\mu} dx_1 \int_0^{\bar{x}_2} \frac{x_2^{\lambda-1} dx_2}{V-\varphi} \tag{4.8}$$

Вычисляя первый и третий интегралы подобно предыдущему, а второй интеграл так же, как в работе [12], можно получить

$$\frac{I}{-\frac{\beta}{V^2}} = l_1 L_1 + l_2 L_2 + l_3 L_3$$

$$L_1 = \left(-\frac{2\beta''y}{r}\right)^{\mu-1} (t-t_0)^{\lambda+1} (1-\omega)^{\lambda+\mu+\frac{1}{2}} 2^{-\lambda-\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} & \times 2^{\lambda - \frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)\Gamma(1 + \mu)}{\Gamma\left(\lambda + \mu + \frac{3}{2}\right)} F\left(\frac{1}{2} - \lambda, \lambda + \frac{1}{2}, \lambda + \mu + \frac{3}{2}, \frac{1 + \omega}{2}\right) \\ L_2' &= \left(-\frac{2\beta''y}{r}\right)^{\frac{1}{2}} (t - t_0) \left(\frac{x + \beta'y}{r}\right)^\mu \frac{\pi}{\lambda B\left(\lambda, \frac{1}{2}\right)} \times \\ & \times F\left(-\frac{\mu}{2}, \frac{1 - \mu}{2}, \lambda + 1, \frac{1}{\omega^2}\right) \\ L_3' &= \left(-\frac{2\beta''y}{r}\right)^{\frac{\mu+1}{2}} (t - t_0)^{\frac{\mu}{2} + \lambda} (1 - \omega)^{\mu+2\lambda} \frac{\Gamma(-2\lambda - \mu)\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\lambda - \mu + \frac{1}{2}\right)} \times \\ & \times F\left(\frac{1}{2} - \lambda, -2\lambda - \mu, -\lambda - \mu + \frac{1}{2}, \frac{\omega + 1}{\omega - 1}\right) \quad (4.9) \end{aligned}$$

При отходе от точки B , являясь AB , где $\omega \approx \infty$, можно получить

$$\begin{aligned} \frac{l}{-\beta} &= l_1 L_2' + 2L_1 l_3' = \\ &= \left(-\frac{2\beta''y}{r}\right)^{\frac{1}{2}} (t - t_0) \left(\frac{x + \beta'y}{r}\right)^\mu \left(\frac{\pi \sin \pi \lambda}{\cos \pi \lambda} - \frac{\pi}{\sin \pi \lambda \cos \pi \lambda}\right) \end{aligned}$$

и с учетом $\frac{x + \beta'y}{r} = V t_0$ можно видеть, что результат совпадает с (3.9), то есть решение (4.9) при удалении от точки B переходит в решение на AB (3.9).

Полагая $\lambda = \mu = 0$ в (4.9), можно получить решение между BB_1 и AB , что проще, однако, сделать непосредственно, полагая $\lambda = \mu = 0$ в (4.8), где второй интеграл обратится в нуль и получится

$$\frac{l}{-\beta} = - \sqrt{-\frac{2\beta''y}{r}} \ln \frac{-\frac{2\beta''y}{r} (t - t_0)}{\frac{x + \beta'y}{r} \sqrt{\left(\frac{x + \beta'y}{r}\right)^2 - \frac{2\beta''y}{r} (t - t_0)}}$$

Отсюда видно, что вблизи AB решение приближенно равно

$$l = \beta \sqrt{-\frac{2\beta''y}{r}} \ln(t - t_0) \left(-\frac{2\beta''y}{r}\right)$$

что согласуется с (3.11).

Вблизи BB_1

$$l = \beta \sqrt{-\frac{2\beta'' y}{r}} \ln \sqrt{-\frac{2\beta'' y}{r} (t - t_0)}$$

и согласуется с вышеуказанным значением.

Институт механики АН Армянской ССР
Кировоградский педагогический институт

Поступила 24 V 1972

Վ. Է. ՀԱՅԵՆՅԱՆ, Ա. Գ. ԲԱԳԴՈՅԵՎ

ԱՌԱՋԳԱՍԱՆ ԿՐՈՒՏԱՐԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՇԱՐՃՈՒԲԸ ՈՒՍԳՆՈՒՄԱՆ ԱՆՏՏՈՒՐ
ՀԱՐՎԱՅԱՅԻՆ ԱՎԵՐՆԵՐԻ ԱՉԳԵՑՈՒԹՅԱՆ ՏԱԿ

Ս. մ. փ. ո. փ. ո. լ. մ.

Գիտարկվում է իղևալական հաղորդիչ առաձգական նյութով լցված կիսատարածության շարժման այն խնդիրը, երբ կիսատարածությունը իր մակերևույթով բաժանվում է դիէլեկտրիկից (օդից), դրանում է նախնական համասեռ ուղղաձիգ մագնիսական H_0 դաշտում և նրա մակերևույթի վրա հարվածային ալիքով տարածվում է փոփոխական ճնշումը:

Սմիռնով-Սորոլևի մեթոդով լուծումը դրսևված է առաձգական կիսատարածությունում ինտերգրալների տեսքով, որոնք պարզեցված են ալիքների ճակատների մաս:

Ստացված է լուծումը ալիքների ճակատների վրա, որը հաշվի է առնում քրդաման երևույթները ներքին կիսատարածությունում ճակատներից առաջ:

ELASTIC SEMISPACED MOTION DUE TO SHOCK WAVES IN A MAGNETIC FIELD

Zh. H. HAKHINIAN, A. G. BAGDOEV

S u m m a r y

The problem on motion of a semispace, filled with an ideal elastic conducting material, conterminous with a dielectric (air), in an originally homogeneous vertical magnetic field, H_0 , under the action of variable pressure, propagating over the conducting material surface, is considered.

The solution is defined by the Smirnov-Sobolev method in an elastic semispace in the form of quadratures, simplified near the wave fronts.

A solution is obtained for the wave fronts, taking account of the disturbances in the lower semispace ahead of the magnetoelastic wave fronts, developing as a result of the propagation of magnetic field disturbances in the dielectric at an infinite velocity.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Kaliski S.* Solution of the equation of motion in a magnetic field. Proceedings of vibration problems, № 3, 1960.
2. *Багдасарян Г. Б., Давоян Э. Н.* Распространение упругих волн в анизотропном полупространстве при наличии магнитного поля. Изв. АН АрмССР, Механика, т. 25, № 2, 1972.
3. *Рахматулин Х. А., Симонович А. Я., Алексеев Н. А.* Вопросы динамики грунтов, МГУ, 1964.
4. *Кольский Г.* Волны напряжения в твердых телах. ИЛ, М., 1969.
5. *Курант Р., Фридрихс К.* Сверхзвуковое течение и ударные волны. ИЛ, М., 1950.
6. *Багдоев А. Г., Мовсисян А. А.* К вопросу определения ударной волны в нелинейных задачах теории упругости. Изв. АН АрмССР, Механика, т. XXI, № 3, 1968.
7. *Багдоев А. Г.* Некоторые нелинейные задачи движения сжимаемой жидкости. Изд. АН АрмССР, Ереван, 1961.
8. *Кукушев А. А., Голубев Н. С.* Основы радиоэлектроники. М., 1969.
9. *Свекло В. А.* Смешанная задача для упругой анизотропной полуплоскости. ПММ, т. 24, в. 5, 1962.
10. *Бабич В. М.* Нестационарное распространение волн и каустики. Уч. записки АГУ, в. 32, 1958.
11. *Howarth L.* The propagation of steady disturbances. Proceed. Camb. Phil. Soc., 44, 1948, 380-390.
12. *Багдоев А. Г.* Определение параметров движения жидкости в окрестности встречи фронтов волн. Изв. АН АрмССР, Механика, т. XXII, № 5, 1969.