ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXVI, № 2, 1973 Механика

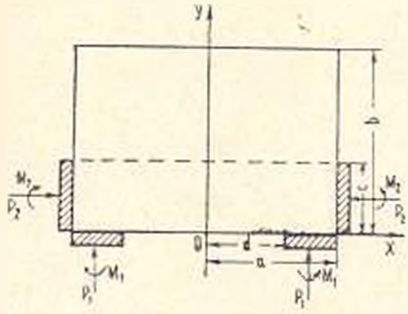
А. А. БАБЛОЯН, Н. О. ГУЛКАНЯН

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНИКА СО СМЕШАННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Решается плоская задача теории упругости для прямоугольника, когда на трех сторонах прямоугольника граничные условия заданы в смешанном виде, а на одной стороне заданы нагрузки.

Задача решается при помощи функции напряжений Эри методом, использованным в работах [1—4].

1. Рассмотрим плоскую задачу для прямоугольника, сжимаемого по трем кромкам расположенными у краев жесткими штампами (фиг. 1). Предполагается, что штампы расположены симметрично относительно оси „Oy“. На остальных частях границы прямоугольника заданы внеш



Фиг. 1

ние усилия, также симметричные относительно оси „Oy“. В силу симметрии задачу будем решать только для одной половины области прямоугольника, удовлетворяя при этом условиям симметрии

$$\tau_{xy}(0,\ y) = 0, \quad u(0,\ y) = 0 \tag{1.1}$$

и следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} \tau_{xy}(x,\ b) &= 0 \qquad (0 \leqslant x \leqslant a) \\ \tau_{xy}(a,\ y) &= 0 \qquad (0 \leqslant y \leqslant b) \\ \tau_{xy}(x,\ 0) &= 0 \qquad (0 \leqslant x \leqslant a) \end{aligned} \tag{1.2}$$

$$u(a,\ y) = f_3(y) \quad (0 \leqslant y \leqslant c), \qquad \sigma_x(a,\ y) = f_2(y) \quad (c \leqslant y \leqslant b) \tag{1.3}$$

$$v(x,\ 0) = f_5(x) \quad (d \leqslant x \leqslant a), \qquad \sigma_y(x,\ 0) = f_4(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant d)$$

$$\sigma_y(x,\ b) = f_1(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant a)$$

Бигармоническую функцию, через которую определяются все напряжения и перемещения, ищем в виде

$$\Phi(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \operatorname{sh} \alpha_k y + B_k \operatorname{ch} \alpha_k y + C_k \alpha_k y \operatorname{sh} \alpha_k y +$$

$$+ D_k \alpha_k y \operatorname{ch} \alpha_k y] \cos \alpha_k x + \sum_{k=1}^{\infty} [F_k \operatorname{ch} \beta_k x + G_k \beta_k x \operatorname{sh} \beta_k x] \cos \beta_k y +$$

$$+ C_1 x^2 + C_2 y^2 \tag{1.4}$$

где

$$\alpha_k = \frac{k\pi}{a}, \quad \beta_k = \frac{k\pi}{b}$$

Выбором функции $\Phi(x, y)$ в виде (1.4) и $f_0 = 0$ в выражении перемещений [2] будут удовлетворены условия (1.1).

Удовлетворяя условиям (1.2), между коэффициентами разложения получим соотношения

$$A_k = -D_k$$

$$F_k = -[1 + \beta_k a \operatorname{cth} \beta_k a] G_k \tag{1.5}$$

$$B_k = -C_k [1 + \alpha_k b \operatorname{cth} \alpha_k b] - \alpha_k b D_k$$

Разлагая функцию $f_1(x)$ в ряд Фурье по косинусам в интервале $[0, a]$

$$f_1(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \alpha_k x \tag{1.6}$$

и удовлетворяя последнему условию (1.3), для определения одного из коэффициентов C_k или D_k получим бесконечную систему алгебраических уравнений

$$D_k \operatorname{sh} \alpha_k b + C_k \left[\operatorname{ch} \alpha_k b + \frac{\alpha_k b}{\operatorname{sh} \alpha_k b} \right] = \tag{1.7}$$

$$= \frac{4(-1)^k}{a} \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p+1} G_p \frac{\beta_p^3}{(\beta_p^2 + \alpha_k^2)^2} \operatorname{sh} \beta_p a + \frac{a_k}{\alpha_k^2}$$

Удовлетворяя затем смешанным граничным условиям (1.3), для определения остальных коэффициентов получим следующие системы парных рядов-уравнений:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k G_k \operatorname{sh} \beta_k a \cos \beta_k y + C_2 a = \frac{E}{2} f_3(y) + \gamma a \frac{a_0}{4}$$

$$(0 \leqslant y \leqslant c)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^2 \left(\operatorname{ch} \beta_k a + \frac{\beta_k a}{\operatorname{sh} \beta_k a} \right) G_k \cos \beta_k y + 2C_2 = f_2(y) +$$

$$+ \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p+1} \alpha_p^2 \{ D_p [\operatorname{sh} \alpha_p y - \alpha_p (b - y) \operatorname{ch} \alpha_p y] + C_p \operatorname{sh} \alpha_p b \varphi_{\alpha_p}^{(b)}(y) \}$$

$$(c \leqslant y \leqslant b) \tag{1.8}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \left\{ \alpha_k b D_k + \left[1 + \frac{\alpha_k b \operatorname{ch} \alpha_k b}{\operatorname{sh} \alpha_k b} \right] C_k \right\} \cos \alpha_k x =$$

$$= f_4(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{p=1}^{\infty} \beta_p^2 \operatorname{sh} \beta_p a \varphi_{\beta_p}^{(a)}(x)\, G_p$$

$$(0 \leqslant x \leqslant d)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k D_k \cos \alpha_k x + \frac{g_0}{2} = \frac{E}{2} f_5(x) \qquad (d \leqslant x \leqslant a)$$

где

$$\varphi_{\alpha_k}^{(b)}(y) = \frac{1}{\operatorname{sh} \alpha_k b} \left[\operatorname{ch} \alpha_k y - \alpha_k b \frac{\operatorname{ch} \alpha_k (b-y)}{\operatorname{sh} \alpha_k b} - \alpha_k (b-y) \operatorname{sh} \alpha_k y \right] \tag{1.9}$$

Пользуясь точным решением парных уравнений по косинусам [1, 5, 6], а также учитывая соотношение (1.7), определение неизвестных постоянных сводим к решению бесконечных систем алгебраических уравнений

$$X_k (1 + M_k) = Y_k H_k + \sum_{p=1}^{\infty} a_{kp} Z_p + a_k$$

$$Y_k = \sum_{p=1}^{\infty} b_{kp}^{(1)} Y_p + \sum_{p=1}^{\infty} b_{kp}^{(2)} X_p + \sum_{p=1}^{\infty} b_{kp}^{(3)} Z_p + d_k \tag{1.10}$$

$$Z_k = \sum_{p=1}^{\infty} C_{kp}^{(1)} Z_p + \sum_{p=1}^{\infty} c_{kp}^{(2)} X_p + \sum_{p=1}^{\infty} c_{kp}^{(3)} Y_p + f_k$$

где

$$a_{kp} = \frac{4\alpha_k^2}{b} (-1)^{k+p+1} (1 - N_p) \frac{\beta_p}{(\beta_p^2 + \alpha_k^2)^2}$$

$$b_{kp}^{(1)} = -\frac{k}{2} M_p I_{kp}^{(1)}(w_0), \qquad b_{kp}^{(2)} = \frac{k}{2} H_p I_{kp}^{(2)}(w_0)$$

$$b_{kp}^{(3)} = \frac{k}{2} \frac{a}{b} (1 - N_p) W_{\beta_p \alpha_k}^{(2)}(w_0), \qquad c_{kp}^{(1)} = \frac{k}{2} N_p I_{kp}^{(1)}(z_0)$$

$$c_{kp}^{(2)} = \frac{k}{2} \frac{b}{a} (-1)^p W_{\beta_p \alpha_k}^{(1)}(z_0), \quad c_{kp}^{(3)} = \frac{k}{2} \frac{b}{a} (-1)^p U_{\beta_p \alpha_k}(z_0) \tag{1.11}$$

$$d_k = \frac{k}{2} \int_{w_0}^{\pi} F_4^*(\theta)\, y_k(\cos\theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}\, d\theta + \frac{k}{2} \int_0^{w_0} F_5^*(\theta)\, y_k(\cos\theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}\, d\theta +$$

$$+ \frac{a_0}{2} z_k(\cos w_0)$$

$$f_k = \frac{k}{2} \frac{b}{a} \int_0^{z_0} F_1^*(\theta)\, z_k(\cos\theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}\, d\theta + \frac{k}{2} \frac{b}{a} \int_{z_0}^{\pi} F_2^*(\theta)\, z_k(\cos\theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}\, d\theta +$$

$$+ 2 \frac{b}{a} C_0 y_k(\cos z_0)$$

$$M_k = \frac{2\alpha_k b + 1 - e^{-2\alpha_k b}}{2\,\mathrm{sh}^2 \alpha_k b}, \qquad N_k = \frac{2\beta_k a - 1 - e^{-2\beta_k a}}{\mathrm{sh}\, 2\beta_k a + 2\beta_k a}$$

$$H_k = \frac{\mathrm{sh}\, \alpha_k b + \alpha_k b\, \mathrm{ch}\, \alpha_k b}{\mathrm{sh}^2 \alpha_k b}$$

$$I_{kp}^{(1)}(z_0) = \int_0^{z_0} z_k(\cos\theta) z_p(\cos\theta)\, \mathrm{ctg}\frac{\theta}{2}\, d\theta$$

$$I_{kp}^{(2)}(w_0) = \int_0^{w_0} y_k(\cos\theta)\, y_p(\cos\theta)\, \mathrm{tg}\frac{\theta}{2}\, d\theta$$

$$U_{\xi_p k}(z_0) = \int_{z_0}^{\pi} z_k(\cos\theta)\, M_{\xi_p}(\cos\theta)\, \mathrm{ctg}\frac{\theta}{2}\, d\theta$$

$$W_{\xi_p k}^{(1)}(z_0) = \int_{z_0}^{\pi} z_k(\cos\theta)\, L_{\xi_p}(\cos\theta)\, \mathrm{ctg}\frac{\theta}{2}\, d\theta$$

$$W_{\gamma_p k}^{(2)}(w_0) = \int_0^{w_0} y_k(\cos\theta)\, \bar{L}_{\gamma_p}(\cos\theta)\, \mathrm{tg}\frac{\theta}{2}\, d\theta$$

$$M_{\xi}(\cos\theta) = -\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_{\theta}^{\pi} \frac{\varphi_3^{(\pi)}(\pi - z)\sin\frac{z}{2}\, dz}{(\cos\theta - \cos z)^{1/2}}$$

$$\bar{L}_{\gamma}(\cos\theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\theta} \frac{\varphi_{\gamma}^{(\pi)}(x)\cos\frac{x}{2}\, dx}{(\cos x - \cos\theta)^{1/2}}$$

$$L_{\xi}(\cos\theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_{\theta}^{\pi} \frac{\varphi_{\xi}^{(\pi)}(x)\sin\frac{x}{2}\, dx}{(\cos\theta - \cos x)^{1/2}}$$

$$\xi_p = p\frac{b}{a}, \qquad \gamma_p = p\frac{a}{b}, \qquad w_0 = \pi\frac{d}{a}, \qquad z_0 = p\frac{c}{b}$$

$$F_1^{*}(\theta) = -\frac{\sqrt{2}}{\pi} E \int_0^{\theta} \frac{f_3\left(\frac{b}{\pi} z\right)\sin\frac{z}{2}\, dz}{(\cos z - \cos\theta)^{1/2}}$$

$$F_2^*(\theta) = -\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\frac{f_2\left(\frac{bz}{\pi}\right)\sin\frac{z}{2}\,dz}{(\cos\theta-\cos z)^{1/2}}$$

$$F_4^*(\theta) = -\frac{\sqrt{2}}{\pi}E\int\limits_{\theta}^{\pi}\frac{f_5\left(\frac{a}{\pi}w\right)\cos\frac{w}{2}\,dw}{(\cos\theta-\cos w)^{1/2}}$$

$$F_5^*(\theta) = -\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int\limits_0^{\theta}\frac{f_4\left(\frac{a}{\pi}w\right)\cos\frac{w}{2}\,dw}{(\cos w-\cos\theta)^{1/2}}$$

а функции $y_k(\cos\theta)$ и $z_k(\cos\theta)$ представляют собой соответственно сумму и разность полиномов Лежандра [1].

Неизвестные коэффициенты C_k, D_k, G_k определяются через X_k, Y_k, Z_k из следующих соотношений:

$$X_k = \alpha_k^2\left[D_k\operatorname{ch}\alpha_k b + C_k\operatorname{sh}\alpha_k b\right],\quad Y_k = \alpha_k^2 D_k \tag{1.12}$$

$$Z_k = \frac{b}{a}\beta_k^2 G_k\left[\operatorname{ch}\beta_k a + \frac{\beta_k a}{\operatorname{sh}\beta_k a}\right]$$

а коэффициенты A_k, B_k и F_k — из соотношения (1.5). Для свободных членов парных уравнений получены следующие выражения [2]:

$$g_0\frac{\pi}{a} = -\sum_{p=1}^{\infty}M_pY_p\frac{z_p(\cos w_0)}{p} + \sum_{p=1}^{\infty}X_pH_p\frac{z_p(\cos w_0)}{p} +$$

$$+\sum_{p=1}^{\infty}\frac{Z_p(1-N_p)}{p\operatorname{sh}\gamma_p\pi}\left[-\gamma_p W_{\gamma_p}(\cos w_0) + (2-\pi\gamma_p\operatorname{cth}\gamma_p\pi)Z_{\gamma_p}(\cos w_0)\right] + \tag{1.13}$$

$$+\int\limits_{w_0}^{\pi}F_4^*(\theta)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\,d\theta + \int\limits_0^{w_0}F_5^*(\theta)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\,d\theta +$$

$$+\frac{\pi}{a}Ef_3(a) - 2a_0\ln\cos\frac{w_0}{2}$$

$$\pi C_0 - 4C_0\frac{b}{a}\ln\sin\frac{z_0}{2} = \pi\nu\frac{a_0}{4} + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{\infty}N_pZ_p\frac{y_p(\cos z_0)}{p} +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{\infty}(-1)^{p+1}\frac{X_p}{p}\left[K_{1p}(\cos z_0) - H_{1p}(\cos z_0)\right] + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{\infty}(-1)^{p+1}\frac{Y_p}{p}\times$$

$$\times\left[P_{i_p}(\cos z_0)-N_{i_p}(\cos z_0)\right]-\frac{1}{2}\frac{b}{a}\int_0^{z_0}F_1^{**}(\theta)\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}d\theta-$$

$$-\frac{1}{2}\frac{b}{a}\int_{z_0}^{\pi}F_2^{*}(\theta)\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}d\theta+\frac{\pi}{a}\frac{E}{2}f_3(0)$$

Здесь

$$K_p(\cos\theta)=\frac{2\sqrt{2}}{\pi\operatorname{sh}p\pi}\int_\theta^\pi\frac{\operatorname{sh}px\cos\frac{x}{2}dx}{(\cos\theta-\cos x)^{1/2}}$$

$$H_p(\cos\theta)=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_\theta^\pi\frac{\psi_p^{(\pi)}(x)\cos\frac{x}{2}dx}{(\cos\theta-\cos x)^{1/2}}$$

$$P_p(\cos\theta)=\frac{2\sqrt{2}}{\pi\operatorname{sh}p\pi}\int_\theta^\pi\frac{\operatorname{sh}p(\pi-z)\cos\frac{z}{2}dz}{(\cos\theta-\cos z)^{1/2}}\tag{1.14}$$

$$N_p(\cos\theta)=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_\theta^\pi\frac{\psi_p(\pi-z)\cos\frac{z}{2}dz}{(\cos\theta-\cos z)^{1/2}}$$

$$Z_p(\cos\theta)=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\theta\frac{\operatorname{sh}px\sin\frac{x}{2}dx}{(\cos x-\cos\theta)^{1/2}}$$

$$W_p(\cos\theta)=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\theta\frac{x\operatorname{ch}px\sin\frac{x}{2}dx}{(\cos x-\cos\theta)^{1/2}}$$

$$\psi_{\alpha_k}^{(b)}(y)=\frac{1}{\operatorname{sh}\alpha_k b}\left[\operatorname{sh}\alpha_k y+\alpha_k b\frac{\operatorname{sh}\alpha_k(b-y)}{\operatorname{sh}\alpha_k b}-\alpha_k(b-y)\operatorname{ch}\alpha_k y\right]$$

Докажем, что бесконечная система (1.10) в общем случае квазивполне регулярна. Для этого оценим суммы модулей коэффициентов при неизвестных

$$\sum_{p=1}^{\infty}|a_{kp}|=\frac{4\alpha_k^2}{b}\sum_{p=1}^{\infty}(1-N_p)\frac{\beta_p}{(\beta_p^2+\alpha_k^2)^2}<\frac{4\alpha_k^2}{b}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\beta_p}{(\beta_p^2+\alpha_k^2)^2}=$$

$$=\frac{4\alpha_k^2\pi b^4}{b^2\pi^4}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{p}{\left[p^2+\left(\frac{\alpha_k b}{\pi}\right)^2\right]^2}<\frac{4\alpha_k^2 b^2}{\pi^3}\int\limits_0^{\infty}\frac{x\,dx}{\left[x^2+\left(\frac{\alpha_k b}{\pi}\right)^2\right]^2}=$$

$$=\frac{4\alpha_k^2 b^2}{2\pi^3}\,\frac{\pi^2}{\alpha_k^2 b^2}=\frac{2}{\pi}<1$$

Пользуясь асимптотическими разложениями функций $y_k(x)$, $z_k(x)$, $Y_k(x)$, $Z_k(x)$ для больших значений k [1, 2], а также разложениями функций

$$M_k(\cos\theta)\sim O(k^{1/2}e^{-k(\pi-\theta)})$$

$$L_k(\cos\theta)\sim O\left(\frac{1}{k^3}\right)$$

нетрудно заметить, что коэффициенты бесконечных систем $b_{kp}^{(i)}$, $c_{kp}^{(i)}$ $(i=1,\ 2,\ 3)$ по „k“ имеют порядок $\frac{1}{\sqrt{k}}$, а по „p“ они стремятся к нулю достаточно быстро $\left(O\left(\frac{1}{p^3}\right)\text{ или } O\left(\frac{1}{p}e^{-\alpha p}\right),\ \alpha>0\right)$, поэтому суммы модулей этих коэффициентов по индексу „p“ имеют такой же порядок стремления к нулю по „k“, какой имеет каждый его член.

Например, если принять $M_p<mp^{-3/2}$, то

$$\sum_{p=1}^{\infty}|b_{kp}^{(1)}|=\frac{k}{2}\sum_{p=1}^{\infty}M_p\,|I_{kp}^{(2)}(w_0)|<\frac{k}{2}\left|\sum_{p\neq k}M_p\,|I_{kp}^{(2)}(w_0)|+M_k\frac{2}{k}\right|<$$

$$<\frac{mk}{2}\left|\frac{2}{k^{5/2}}+\frac{1}{\sqrt{k}}\sum_{p\neq k}\frac{1}{p^2\,|p-k|}\right|<\frac{mk}{2}\left|\frac{2}{k^{5/2}}+\frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{\text{const}}{k}\right|=O\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

Таким образом,

$$\sum_{p=1}^{\infty}|b_{kp}^{(i)}|=O\left(\frac{1}{k^{1/2}}\right),\qquad\sum_{p=1}^{\infty}|C_{kp}^{(i)}|=O\left(\frac{1}{k^{1/2}}\right)\quad(i=1,\ 2,\ 3)$$

то есть, начиная с некоторого „k“ суммы модулей коэффициентов бесконечных систем становятся меньше единицы. Свободные члены бесконечных систем ограничены по модулю и стремятся к нулю, как $O(k^{-1/2})$.

2. Подставляя найденные из бесконечных систем значения неизвестных коэффициентов в выражение функции Эри (1.4) и пользуясь известными формулами теории упругости, нетрудно получить выражения для перемещений

$$Ev(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \alpha_k x}{\alpha_k} \frac{1}{\operatorname{sh} \alpha_k b} \Big\{ X_k \Big[2 \operatorname{sh} \alpha_k y + (1+\nu) \Big(\alpha_k (b-y) \operatorname{ch} \alpha_k y -$$

$$- \alpha_k b \frac{\operatorname{sh} \alpha_k (b-y)}{\operatorname{sh} \alpha_k b} \Big) \Big] + Y_k [2 \operatorname{sh} \alpha_k (b-y) -$$

$$- (1+\nu)(\alpha_k (b-y) \operatorname{ch} \alpha_k (b-y) - \alpha_k b \operatorname{cth} \alpha_k b \operatorname{sh} \alpha_k (b-y))] \Big\} +$$

$$+ \frac{a}{b} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \beta_k y}{\beta_k} \frac{1}{\operatorname{sh} \beta_k a} (1 - N_k) Z_k \Big\{ 2 \operatorname{ch} \beta_k x - (1+\nu) \Big[\operatorname{ch} \beta_k x +$$

$$+ \beta_k a \frac{\operatorname{ch} \beta_k (a-x)}{\operatorname{sh} \beta_k a} + \beta_k (a-x) \operatorname{sh} \beta_k x \Big] \Big\} + g_0 + \Big(\frac{a_0}{2} - 2\nu C_2 \Big) y$$

$$Eu(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha_k x}{\alpha_k} \frac{1}{\operatorname{sh} \alpha_k b} \Big\{ X_k \Big[2 \operatorname{ch} \alpha_k y - (1+\nu)(\operatorname{ch} \alpha_k y +$$

$$+ \alpha_k b \frac{\operatorname{ch} \alpha_k (b-y)}{\operatorname{sh} \alpha_k b} + \alpha_k (b-y) \operatorname{sh} \alpha_k y \Big] +$$

$$+ Y_k \Big[-2 \operatorname{ch} \alpha_k (b-y) + (1+\nu)(\operatorname{ch} \alpha_k (b-y) + \alpha_k b \frac{\operatorname{ch} \alpha_k b \operatorname{ch} \alpha_k (b-y)}{\operatorname{sh} \alpha_k b} -$$

$$- \alpha_k (b-y) \operatorname{sh} \alpha_k (b-y) \Big] \Big\} + \frac{a}{b} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \beta_k y}{\beta_k} Z_k \frac{1}{\operatorname{sh} \beta_k a} (1 - N_k) \times$$

$$\times \Big\{ 2 \operatorname{sh} \beta_k x + (1+\nu) \Big[- \beta_k a \frac{\operatorname{sh} \beta_k (a-x)}{\operatorname{sh} \beta_k a} + \beta_k (a-x) \operatorname{ch} \beta_k x \Big] \Big\} +$$

$$+ \Big(2C_2 - \nu \frac{a_0}{2} \Big) x$$

и для напряжений

$$\tau_{xy}(x, y) = \frac{a}{b} \sum_{k=1}^{\infty} \sin \beta_k y (1 - N_k) \frac{Z_k}{\operatorname{sh} \beta_k a} \Big[\beta_k a \frac{\operatorname{sh} \beta_k (a-x)}{\operatorname{sh} \beta_k a} -$$

$$- \beta_k (a-x) \operatorname{ch} \beta_k x \Big] + \sum_{k=1}^{\infty} \sin \alpha_k x \frac{1}{\operatorname{sh} \alpha_k b} \Big\{ \Big[\alpha_k b \frac{\operatorname{sh} \alpha_k (b-y)}{\operatorname{sh} \alpha_k b} -$$

$$- \alpha_k (b-y) \operatorname{ch} \alpha_k y \Big] X_k - Y_k \Big[\alpha_k b \frac{\operatorname{ch} \alpha_k b \operatorname{sh} \alpha_k (b-y)}{\operatorname{sh} \alpha_k b} -$$

$$- \alpha_k (b-y) \operatorname{ch} \alpha_k (b-y) \Big] \Big\}$$

$$\sigma_x(x,\ y)=\sum_{k=1}^{\infty}\cos\alpha_k x\left[X_k\varphi_{\alpha_k}^{(b)}(y)+Y_k\varphi_{\alpha_k}^{(b)}(b-y)\right]+ \tag{2.1}$$

$$+\frac{a}{b}\sum_{k=1}^{\infty}\cos\beta_k y\,\frac{Z_k}{\operatorname{sh}\beta_k a}(1-N_k)\left[\operatorname{ch}\beta_k x+\frac{\beta_k a}{\operatorname{sh}\beta_k a}\operatorname{ch}\beta_k(a-x)+\right.$$

$$\left.+\beta_k(a-x)\operatorname{sh}\beta_k x\right]+2C_2$$

$$\sigma_y(x,\ y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos\alpha_k x}{\operatorname{sh}\alpha_k b}\left\{Y_k\left[-\operatorname{ch}\alpha_k(b-y)-\alpha_k b\,\frac{\operatorname{ch}\alpha_k b\operatorname{ch}\alpha_k(b-y)}{\operatorname{sh}\alpha_k b}+\right.\right.$$

$$\left.+\alpha_k(b-y)\operatorname{sh}\alpha_k(b-y)\right]+X_k\left[\operatorname{ch}\alpha_k y+\frac{\alpha_k b\operatorname{ch}\alpha_k(b-y)}{\operatorname{sh}\alpha_k b}+\right.$$

$$\left.\left.+\alpha_k(b-y)\operatorname{sh}\alpha_k y\right]\right\}+\frac{a}{b}\sum_{k=1}^{\infty}\cos\beta_k y Z_k(1-N_k)\varphi_{\beta_k}^{(a)}(x)+\frac{a_0}{2}$$

Эти формулы верны для всех значений x и y. Но при вычислении напряжений и перемещений на границе области некоторые из этих рядов сходятся медленно из-за наличия особенностей у краев штампов. Для улучшения сходимости этих рядов подставим значения неизвестных X, Y, Z из бесконечных систем (1.10) в формулы для напряжений и перемещений, вычисленных на границе прямоугольника. После ряда выкладок для контактных напряжений и перемещений граничных точек вне контактов получим следующие выражения:

$$\sigma_x\left(a,\frac{b}{\pi}z\right)=\frac{Q\cos\frac{z}{2}}{(\cos z-\cos z_0)^{1/2}}+$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{z}{2}\left\{\frac{a}{b}\sum_{p=1}^{\infty}Z_p N_p p\int_z^{z_0}\frac{y_p(\cos\theta)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\,d\theta}{(\cos z-\cos\theta)^{1/2}}+\right.$$

$$+\sum_{p=1}^{\infty}(-1)^{p+1}X_p t_p\int_z^{z_0}\frac{H_{t_p}(\cos\theta)+K_{t_p}(\cos\theta)}{(\cos z-\cos\theta)^{1/2}}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\,d\theta+$$

$$+\sum_{p=1}^{\infty}t_p(-1)^{p+1}Y_p\int_z^{z_0}\frac{N_{t_p}(\cos\theta)+P_{t_p}(\cos\theta)}{(\cos z-\cos\theta)^{1/2}}\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\,d\theta+$$

$$\left.+\int_z^{z_0}\frac{F_1^{**}(\theta)\,d\theta}{(\cos z-\cos\theta)^{1/2}}+\int_{z_0}^{\pi}\frac{F_2^{**}(\theta)\,d\theta}{(\cos z-\cos\theta)^{1/2}}\right\} \tag{2.2}$$

$$(0\leqslant z\leqslant z_0)$$

$$\sigma_y\left(\frac{a}{\pi}w,\ 0\right)=\frac{R\sin\dfrac{w}{2}}{(\cos w_0-\cos w)^{1/2}}+$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{w}{2}\left\{-\sum_{p=1}^{\infty}pM_pY_p\int_{w}^{w_0}\frac{z_p(\cos\theta)\operatorname{ctg}\dfrac{\theta}{2}\,d\theta}{(\cos\theta-\cos w)^{1/2}}+\right.$$

$$+\sum_{p=1}^{\infty}pX_pH_p\int_{w}^{w_0}\frac{z_p(\cos\theta)\operatorname{ctg}\dfrac{\theta}{2}\,d\theta}{(\cos\theta-\cos w)^{1/2}}-$$

$$-\frac{a}{b}\sum_{p=1}^{\infty}\tau_p(1-N_p)Z_p\int_{w}^{w_0}\frac{H_{\tau_p}(\cos\theta)+K_{\tau_p}(\cos\theta)}{(\cos\theta-\cos w)^{1/2}}\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\,d\theta-$$

$$\left.-\int_{w_0}^{w}\frac{F_4^{**}(\theta)\,d\theta}{(\cos\theta-\cos w)^{1/2}}-\int_{w}^{w_0}\frac{F_5^{**}(\theta)\,d\theta}{(\cos\theta-\cos w)^{1/2}}\right\}$$

$$(w_0\leqslant w\leqslant\pi)$$

$$Eu\left(a,\frac{b}{\pi}z\right)=Ef_3(0)-8C_2\frac{b}{\pi}\ln\frac{\sin\dfrac{z}{2}+\sqrt{\sin^2\dfrac{z}{2}-\sin^2\dfrac{z_0}{2}}}{\sin\dfrac{z_0}{2}}+$$

$$+2\frac{a}{\pi}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{N_p}{p}Z_p(1-\cos pz)+2\frac{a}{\pi}\frac{\sin\dfrac{z}{2}}{\sin\dfrac{z_0}{2}}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{N_p}{p}Z_p(\cos pz_0-1)-$$

$$-\sqrt{2}\frac{b}{\pi}\sin\frac{z}{2}\left\{\sum_{p=1}^{\infty}(-1)^pX_p\int_{z_0}^{z}\frac{L_{\tau_p}(\cos\theta)\operatorname{ctg}\dfrac{\theta}{2}\,d\theta}{(\cos\theta-\cos z)^{1/2}}+\right.$$

$$+\sum_{p=1}^{\infty}(-1)^pY_p\int_{z_0}^{z}\frac{M_{\tau_p}(\cos\theta)\operatorname{ctg}\dfrac{\theta}{2}\,d\theta}{(\cos\theta-\cos z)^{1/2}}+$$

$$\left.+\int_{0}^{z_0}\frac{F_1^{*}(\theta)\operatorname{ctg}\dfrac{\theta}{2}\,d\theta}{(\cos\theta-\cos z)^{1/2}}+\int_{z_0}^{z}\frac{F_2^{**}(\theta)\operatorname{ctg}\dfrac{\theta}{2}\,d\theta}{(\cos\theta-\cos z)^{1/2}}\right\}$$

$$(z_0\leqslant z\leqslant\pi)$$

$$Ev\left(\frac{a}{\pi}w,\ 0\right) = Ef_5(a) + 2\frac{a}{\pi}a_0 \ln \frac{\cos\frac{w}{2} + \sqrt{\cos^2\frac{w}{2} - \cos^2\frac{w_0}{2}}}{\cos\frac{w_0}{2}} -$$

$$-2\frac{a}{\pi}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{M_p}{p}Y_p[\cos pw - (-1)^p] + 2\frac{a}{\pi}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{H_p}{p}X_p[\cos pw - (-1)^p] +$$

$$+\frac{a}{\pi}\sqrt{2}\cos\frac{w}{2}\left\{\sum_{p=1}^{\infty}M_p Y_p\int_{w_0}^{\pi}\frac{y_p(\cos\theta)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\,d\theta}{(\cos w - \cos\theta)^{1/2}} -\right.$$

$$-\sum_{p=1}^{\infty}X_p H_p\int_{w_0}^{\pi}\frac{y_p(\cos\theta)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\,d\theta}{(\cos w - \cos\theta)^{1/2}} +$$

$$+\frac{a}{b}\sum_{p=1}^{\infty}Z_p(1 - N_p)\int_{w}^{w_0}\frac{\overline{L}_{1,p}(\cos\theta)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\,d\theta}{(\cos w - \cos\theta)^{1/2}} +$$

$$\left.+\int_{w_0}^{\pi}\frac{F_4^*(\theta)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\,d\theta}{(\cos w - \cos\theta)^{1/2}} + \int_{w}^{w_0}\frac{F_5^*(\theta)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\,d\theta}{(\cos w - \cos\theta)^{1/2}}\right\}$$

$$(0 \leqslant w \leqslant w_0)$$

где

$$z = \frac{\pi y}{b}, \quad w = \frac{\pi x}{a}$$

а коэффициенты при особенностях напряжений определяются формулами

$$R = \frac{\sqrt{2}}{2}\left\{-\sum_{p=1}^{\infty}M_p Y_p y_p(\cos w_0) + \sum_{p=1}^{\infty}X_p H_p y_p(\cos w_0) - F_4^{**}(w_0) +\right.$$

$$\left.+F_5^*(w_0) + \frac{a}{b}\sum_{p=1}^{\infty}Z_p(1 - N_p)\overline{L}_{1,p}(\cos w_0) + a_0\right\} \tag{2.3}$$

$$Q = \frac{\sqrt{2}}{2}\left\{-\frac{a}{b}\sum_{p=1}^{\infty}N_p Z_p z_p(\cos z_0) + \sum_{p=1}^{\infty}(-1)^p Y_p M_{1,p}(\cos z_0) -\right.$$

$$- F_1^*(z_0) + F_2^*(z_0) + 4C_2 + \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p X_p L_p(\cos\theta)\Big]$$

Имея формулы контактных напряжений, вычислим силы и моменты, приложенные к штампам (фиг. 1)

$$P_1 = \frac{a_0 d}{2} - \int_0^d f_4(y)\,dy, \quad P_2 = 2C_2 b - \int_c^b f_2(y)\,dy \tag{2.4}$$

$$M_1 = -\frac{a-d}{2} P_1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k - \cos\alpha_k d}{\alpha_k^2} [H_k X_k - (1+M_k) Y_k] -$$

$$-\frac{a}{b} \sum_{p=1}^{\infty} Z_p \frac{1-N_p}{\beta_p^2 \operatorname{sh}\beta_p a} \Big[\frac{a\beta_p}{\operatorname{sh}\beta_p a} (1 - \operatorname{ch}\beta_p d \operatorname{ch}\beta_p a) + d\beta_p \operatorname{sh}\beta_p d +$$

$$+ \operatorname{ch}\beta_p a - \operatorname{ch}\beta_p d \Big]$$

$$M_2 = -\frac{c}{2} P_2 + c^2 C_2 - \frac{ab}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} Z_k \frac{\cos\beta_k c - 1}{k^2} + \tag{2.5}$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\alpha_k^2} X_k \frac{1}{\operatorname{sh}\alpha_k b} [-c\alpha_k \operatorname{sh}\alpha_k c + (\operatorname{ch}\alpha_k c - 1)(1 + \alpha_k b \operatorname{cth}\alpha_k b)] +$$

$$+ \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p+1} \frac{Y_p}{\alpha_p^2 \operatorname{sh}\alpha_p b} \Big[c\alpha_p \operatorname{sh}\alpha_p (b-c) +$$

$$+ \frac{b\alpha_p}{\operatorname{sh}\alpha_p b} (\operatorname{ch}\alpha_p c - 1) + \operatorname{ch}\alpha_p (b-c) - \operatorname{ch}\alpha_p b \Big]$$

Соотношения (2.4) выражают те линейные связи, которые существуют между силами, приложенными к штампам, и поступательными перемещениями этих штампов, а соотношения (2.5) устанавливают связь между моментами, приложенными к штампам, и углами поворота этих штампов.

3. Рассмотрим некоторые частные случаи.

а) Пусть $c = b$, то есть боковые штампы приложены по всей высоте. Тогда из бесконечных систем (1.10) имеем

$$Z_k(1 - N_k) = f_k, \quad Z_0 = b\frac{a_0}{4} + \frac{1}{2}\frac{E}{a}\int_0^b f_3(x)\,dx$$

Подставляя значение Z_k в первое уравнение системы (1.10), получим

$$X_k(1+M_k) - Y_k H_k = \varkappa_k, \quad X_0 = 2C_1 a = \frac{a_0 a}{2}$$

где $\varkappa_k$ — известное число.

Остается только одна бесконечная система для определения Y_k. Такая задача ранее была рассмотрена в работе [3].

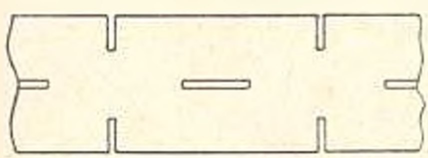
б) Пусть $d = 0$, то есть к прямоугольнику приложен штамп П-образной формы.

В этом случае

$$Y_k = d_k, \quad Y_0 = \frac{\beta_0}{2} = \frac{1}{2}\frac{E}{a}\int_0^a f_5(x)\,dx$$

и останутся две системы для определения X_k и Z_k.

Случай $f_5(x) = 0$ соответствует задаче сжатия прямоугольника двумя одинаковыми симметрично расположенными штампами.



Фиг. 2

в) Случай $d = a$, $c = 0$ соответствует задаче для прямоугольника, когда по всему контуру заданы напряжения. Случай $f_3(y) = f_5(x) = 0$ соответствует плоской задаче для бесконечной полосы с прямолинейными внутренними и наружными разрезами (фиг. 2).

4. В рассматриваемой задаче принималось, что материал прямоугольника соприкасается со штампами по всей длине.

В случае длинных штампов с гладкими и неволнистыми поверхностями возможен отрыв материала прямоугольника от краев штампов вплоть до точек $z_0^{(1)}$, $w_0^{(1)}$ ($z_0^{(1)} < z_0$, $w_0^{(1)} > w_0$). Например, если $f_3(y)$ и $f_5(x)$—неубывающие функции и их первые две производные неотрицательны, очень вероятно, что материал прямоугольника отрывается от штампов от их концов z_0, w_0, но при этом в углах прямоугольника не происходит отрыва материала. В таких случаях положения точек отрыва $z_0^{(1)}$, $w_0^{(1)}$ определяются из условия непрерывности нормальных напряжений в точках отрыва, то есть из условий

$$\sigma_x(a,\ z_0^{(1)}) = f_2(z_0^{(1)}),\quad \sigma_y(w_0^{(1)},\ 0) = f_4(w_0^{(1)}) \tag{4.1}$$

где $\sigma_x(a,\ z_0^{(1)})$ и $\sigma_y(w_0^{(1)},\ 0)$ вычисляются по формулам (2.2). Так как регулярные части нормальных контактных напряжений в точках $z_0^{(1)}$ и $w_0^{(1)}$ принимают соответственно значения $f_2(z_0^{(1)})$ и $f_4(w_0^{(1)})$, то согласно условиям (4.1) коэффициенты при особенностях R и Q в формулах (2.2) для контактных нормальных напряжений должны обращаться в нуль

$$R = 0,\quad Q = 0 \tag{4.2}$$

Условия (4.2) в случае наличия отрыва материала от штампов являются уравнениями для определения координат точек отрыва.

Нетрудно видеть, что при фиксированных значениях $z_0^{(1)} = z_0$, $w_0^{(1)} = w_0$ условия (4.2) являются теми предельными связями между внешними усилиями, которые еще обеспечивают безотрывный контакт.

В случае, когда отрыв материала происходит только от одного из штампов, координата точки отрыва будет определена из уравнения

$$Q = 0$$

при отрыве материала от боковых штампов и из условия

$$R = 0$$

при отрыве от нижних штампов (оснований).

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 10 V 1972

Ա. Հ. ԲԱԲԼՈՅԱՆ, Ն. Օ. ԳՈՒԼԿԱՆՅԱՆ

ՈՒՂՂԱՆԿՅԱՆ ՀԱՄԱՐ ԽԱՌԸ ԵԶՐԱՅԻՆ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐՈՎ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐԹ ԽՆԴԻՐԸ

Ամփոփում

Լուծված է ուղղանկյան համար այն հարթ խնդիրը, երբ ուղղանկյան երեք կողմերում եզրային պայմանները տրված են խառը տեսքով, իսկ մի կողմի վրա տրված է բեռը։

Ենթադրվում է, որ շոշափող լարումները ամբողջ եզրագծով բացակայում են և ուղղանկյունը սեղմվում է գլանների մոտ տեղավորված կոշտ դրոշմներով։

Խնդիրը սկզբում բերվում է եռանկյունաչափական զույգ հավասարումներից կազմված սիստեմի, այնուհետև քվազիլիովին ռեգուլյար հանրահաշվական հավասարումների անվերջ սիստեմների։

Դիտարկված են մի քանի մասնավոր դեպքեր պարամետրերի սահմանային արժեքների և տարբեր եզրային պայմանների համար։

A PLANE PROBLEM IN THE THEORY OF ELASTICITY FOR A RECTANGULAR REGION WITH MIXED BOUNDARY CONDITIONS

A. A. BABLOYAN, N. O. GULKANIAN

S u m m a r y

A plane problem for a rectangular region is solved where boundary conditions are given in a mixed form on its three sides, with loads given on the fourth.

It is assumed that tangent strains throughout the contour are non-existent and the rectangle is pressed on its three sides with rigid punches placed at its edges.

The problem is reduced first to a system of dual trigonometrical equations, and then to a quasiregular infinite system of linear algebraic equations.

Some particular cases for the limit values of parameters and for different boundary conditions are considered.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баблоян А. А.* Решение некоторых парных уравнений, встречающихся в задачах теории упругости. ПММ, т. XXXI, вып. 4, 1967.
2. *Баблоян А. А., Гулканян Н. О.* Об одной смешанной задаче для прямоугольника. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XXII, № 1, 1969.
3. *Баблоян А. А., Мелконян А. П.* Об одной смешанной задаче плоской теории упругости. Изв. АН АрмССР, Механика, т. XXIII, № 5, 1970.
4. *Баблоян А. А., Мкртчян А. М.* Об одной смешанной задаче для прямоугольника. Изв. АН АрмССР, Механика, т. XXIV, № 5, 1971.
5. *Tranter C. J.* Dual trigonometrical series. Proc. Glasgow Math. Assoc., 1959, vol.4, № 2, p.p. 49—57.
6. *Цейтлин А. И.* О методе парных интегральных уравнений и парных рядов и его приложениях к задачам механики. ПММ, т. 30, вып. 2, 1966, стр. 259—270.