

Ж. О. АХИНЯН, А. Г. БАГДОВ

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ДВИЖЕНИИ УПРУГОЙ СРЕДЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ УДАРНОЙ НАГРУЗКИ

§ 1. Рассматривается задача о движении слабо нелинейной электропроводящей сплошной среды под действием ударных нагрузок. Возмущения предполагаются малыми, но в окрестности ударной волны и для больших расстояний необходимо учитывать нелинейные и диссипативные эффекты.

Ударные волны в нелинейной среде рассмотрены в [1], [2], [3]. Основные методы, применяемые в данной статье, развиты в [4], [5], [6].

Уравнения движения магнито-упругой среды удобно записывать в эйлеровых координатах, в которых записаны уравнения Максвелла.

Рассматривается одномерная задача о движении упругого тела под действием взрыва, сообщаемого в сечении  $x = 0$  частицам среды скоростью  $v = \tau V_0(t)$ , где  $\tau$  мала. Начальное магнитное поле однородно, равно  $H$  и направлено по оси  $y$ .

Уравнения движения образца, уравнение неразрывности и уравнения Максвелла имеют вид в одномерной задаче

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \left( \frac{1}{c} \bar{j} \times \bar{B} \right),$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (1.1)$$

$$\bar{j} = \frac{c}{4\pi} \text{rot } H, \text{ rot } \bar{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$$

$$\bar{E} = \frac{\bar{j}}{\epsilon_0} - \frac{\bar{v} \times \bar{B}}{c}, \quad \bar{B} = \tau H$$

где  $v = v(x, t)$  — скорость частиц,  $\rho = \frac{\rho_0}{1 + \epsilon}$  — плотность,  $\epsilon$  — деформация,  $\rho_0$  — начальная плотность,  $\sigma$  — напряжение,  $c$  — скорость света,  $\bar{j}$  — плотность тока,  $\bar{B}$  — магнитная индукция,  $\bar{E}$  — напряженность электрического поля,  $H$  — напряженность магнитного поля,  $\epsilon_0$  — электропроводность,  $\tau = 1$ .

Из уравнения Максвелла, то есть третьей группы уравнений (1.1), получится уравнение индукции, которое вместе с (1.1) дает систему уравнений

$$\begin{aligned} \gamma \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) &= \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{1}{4\pi} (\text{rot } \bar{H} \times H), \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - v \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial H}{\partial t} - \varepsilon \left( \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right) &+ \text{rot} (\bar{v} \times \bar{H}) \end{aligned} \quad (1.2)$$

В (1.2) учтено, что поскольку все величины зависят от  $x$ , то  $\text{grad } H = \frac{\partial H}{\partial x} \bar{i}$ .

Связь напряжения  $\varepsilon$  и деформации  $\varepsilon$  берется с учетом нелинейности и вязко-упругости [7]

$$\varepsilon = \left( K + \frac{4}{3} G \right) \left( \varepsilon + \alpha \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right) + \frac{K \gamma_3}{3} \varepsilon^2 \quad (1.3)$$

где  $K$ ,  $G$ ,  $\alpha$ ,  $\gamma_3$  — постоянные.

Кроме того, нужно вычислить выражения  $\text{rot } \bar{H} \times \bar{H}$  и  $\text{rot}(\bar{v} \times \bar{H})$ , причем  $H_x = H_0 h_x$ ,  $H_y = H_0 (1 + h_y)$ , где  $H_0$  — начальное поле,  $(h_x, h_y)$  — возмущенное поле.

Вычисление дает

$$\begin{aligned} \text{rot } \bar{H} &= k H_0 \frac{\partial h_x}{\partial x} \bar{j}; \quad \text{rot } \bar{H} \times \bar{H} = -H_0 \frac{\partial h_y}{\partial x} H_0 \bar{i} + H_0 H_x \frac{\partial H_x}{\partial x} \bar{j} \\ \text{rot}(\bar{v} \times \bar{H}) &= \frac{\partial v H_y}{\partial x} \bar{j} \end{aligned}$$

Подставляя эти значения в третье уравнение (1.2) или в уравнение индукции, можно получить

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \gamma_1 \frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial H_y}{\partial t} = \gamma_1 \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} - \frac{\partial v H_y}{\partial x}$$

Из граничных условий на границе образца, где  $h_x = 0$ , можно получить, что всюду  $H_x = 0$ . Тогда, поскольку  $H_y = H_0 (1 + h_y)$ , можно получить уравнение индукции

$$\frac{\partial h_y}{\partial t} - v \frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial v h_y}{\partial x} + \gamma_1 \frac{\partial^2 h_y}{\partial x^2} = 0 \quad (1.4)$$

Уравнение неразрывности имеет вид [2]

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + v \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} - (1 + \varepsilon) \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (1.5)$$

где учтено, что  $\rho = \frac{\rho_0}{1 - \varepsilon}$ ; (1.5) получится из второго уравнения (1.1).

Уравнение движения или первое уравнение (1.2) с учетом (1.3) дает

$$\gamma \left( \frac{\partial v}{\partial t} - v \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \left( K + \frac{4}{3} G \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{K \gamma_0}{3} \frac{\partial v^2}{\partial x} + \left( K + \frac{4}{3} G \right) \alpha \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x \partial t} - \frac{H_0^2}{4\pi} \frac{\partial h_y}{\partial x} (1 - h_y) \quad (1.6)$$

где

$$\alpha = \frac{h_0}{1 - \varepsilon}$$

В линейной задаче при отсутствии вязкости и электрического сопротивления  $\alpha = 0$ ,  $\gamma = 0$ ; из (1.5), (1.6) и (1.4) получится

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = a_0^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} - a_1^2 \frac{\partial h_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial h_y}{\partial t} = - \frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.7)$$

где

$$a_0^2 = \frac{K + \frac{4}{3} G}{\rho_0}; \quad a_1^2 = \frac{H_0^2}{4\pi \rho_0}$$

$a_0$  — скорость распространения упругой волны,  $a_1$  — скорость Альфвена.

Из этих уравнений можно получить уравнение для  $v$  в линейной задаче

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (1.8)$$

где  $c^2 = a_0^2 - a_1^2$ ;  $c$  — скорость магнитоупругой волны.

Начальные и граничные условия имеют вид

$$v = \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \quad \text{при } t = 0 \quad (1.9)$$

$$v = \gamma V(t) \quad \text{при } x = 0$$

где  $\gamma \ll 1$ .

Решение (1.8), удовлетворяющее (1.9), получится в виде

$$v = \begin{cases} \gamma V\left(t - \frac{x}{c}\right), & x < ct \\ 0, & x > ct \end{cases} \quad (1.10)$$

Из остальных уравнений (1.7) получится

$$h_y = \frac{1}{c} \gamma V\left(t - \frac{x}{c}\right), \quad \varepsilon = - \frac{1}{c} \gamma V\left(t - \frac{x}{c}\right) \quad (1.11)$$

где произвольные функции от  $x$  равны нулю, поскольку при  $t = 0$ ,  $\varepsilon = h_y = 0$ .

Как видно из (1.11), граничное условие для  $h_y$  при  $x = 0$  не требуется, что связано с бесконечной электропроводимостью среды и

тем, что начальное магнитное поле параллельно оси  $y$ , причем для всех  $t$   $H_z = 0$ , то есть силовые линии параллельны границе образца [9].

Учитывая форму линейного решения, и нелинейной постановке можно полагать

$$v = \gamma F(\tau, z), \quad h_y = \gamma X(\tau, z), \quad z = \gamma Y(\tau, z)$$

где 
$$\tau = t - \frac{x}{c}; \quad z = \gamma x \tag{1.12}$$

Здесь зависимость от  $z$  более слабая, чем от  $\tau$ .

Учитывая, что

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \gamma \frac{\partial F}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\gamma}{c} \frac{\partial F}{\partial \tau} + \gamma^2 \frac{\partial F}{\partial z} \tag{1.13}$$

можно из (1.6) получить

$$\begin{aligned} \gamma \frac{\partial F}{\partial \tau} - \frac{\gamma^2}{c} F \frac{\partial F}{\partial \tau} &= \gamma a_0^2 (1 - \gamma Y) \left( -\frac{1}{c} \frac{\partial Y}{\partial \tau} + \right. \\ &+ \left. \gamma \frac{\partial Y}{\partial z} \right) - \frac{2K\gamma_1}{3\gamma_0} \frac{\gamma^2 Y}{c} \frac{\partial Y}{\partial \tau} - a_0^2 \frac{\gamma_1}{c} \frac{\partial^2 Y}{\partial \tau^2} - \\ &- a_1^2 (1 + \gamma Y) \left( -\frac{\gamma}{c} \frac{\partial X}{\partial \tau} - \gamma^2 \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\gamma^2}{c} X \frac{\partial X}{\partial \tau} \right) \end{aligned} \tag{1.6'}$$

где оставлены малые порядка  $\gamma^2$ .

Уравнение (1.5) в порядке  $\gamma^2$  примет вид

$$\frac{\partial Y}{\partial \tau} + \frac{1}{c} \frac{\partial F}{\partial \tau} = \frac{\gamma F}{c} \frac{\partial Y}{\partial \tau} + \gamma \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{y}{c} \frac{\partial F}{\partial \tau} \tag{1.14}$$

Уравнение (1.4) дает

$$\frac{\partial X}{\partial \tau} - \frac{1}{c} \frac{\partial F}{\partial \tau} = \gamma \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\gamma}{c} \frac{\partial F X}{\partial \tau} + \frac{\gamma_1}{c^2} \frac{\partial^2 X}{\partial \tau^2} \tag{1.15}$$

Уравнение (1.6') дает

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \tau} + \frac{a_0^2}{c} \frac{\partial Y}{\partial \tau} - \frac{a_1^2}{c} \frac{\partial X}{\partial \tau} &= \frac{\gamma}{c} F \frac{\partial F}{\partial \tau} - \\ - \frac{a_0^2}{c} \gamma Y \frac{\partial Y}{\partial \tau} - a_0^2 \gamma \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{2K\gamma_1}{3\gamma_0 c} \gamma Y \frac{\partial Y}{\partial \tau} - a_0^2 \frac{\gamma_1}{c} \frac{\partial^2 Y}{\partial \tau^2} + \\ + \frac{a_1^2}{c} \gamma Y \frac{\partial X}{\partial \tau} - a_1^2 \gamma \frac{\partial X}{\partial z} + \frac{a_1^2}{c} \gamma X \frac{\partial X}{\partial \tau} \end{aligned} \tag{1.16}$$

В порядке  $\gamma^0 = 1$  из (1.16), (1.14) и (1.15) получится

$$F - \frac{a_0^2}{c} Y - \frac{a_1^2}{c} X = 0, \quad Y + \frac{1}{c} F = 0, \quad X - \frac{1}{c} F = 0$$

откуда  $X = \frac{F}{c}$ ;  $Y = -\frac{F}{c}$ , что дает условия совместности на волне. Эти условия можно подставить в слагаемые, имеющие порядок  $\gamma$ . Тогда из (1.14) получится

$$\frac{\partial Y}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial F}{\partial z} = \gamma \frac{\partial F}{\partial z} \quad (1.17)$$

то есть нелинейный эффект исчез из уравнения.

Из уравнения (1.15)

$$\frac{\partial X}{\partial z} = \frac{1}{c} \frac{\partial F}{\partial z} - \gamma \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\gamma}{c^2} \frac{\partial F^2}{\partial z} + \frac{\gamma}{c^3} \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \quad (1.18)$$

Из уравнения (1.16)

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial z} + \frac{a_0^2}{c} \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{a_1^2}{c} \frac{\partial X}{\partial z} &= \frac{\gamma}{c} F \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{a_0^2}{c^3} \gamma F \frac{\partial F}{\partial z} - \\ &- \frac{2K\gamma_1}{3\gamma_0 c^3} \gamma F \frac{\partial F}{\partial z} - a_0^2 \frac{\gamma}{c} \frac{\partial F}{\partial z} - a_1^2 \frac{\gamma}{c} \frac{\partial F}{\partial z} + a_0^2 \frac{\alpha}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \end{aligned}$$

Подставляя  $\frac{\partial Y}{\partial z}$ ,  $\frac{\partial X}{\partial z}$  из (1.17), (1.18) в это уравнение, можно найти

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial F}{\partial z} - a_1^2 \frac{2F}{c^4} \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\gamma_1}{\gamma} \frac{a_1^2}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} &= \frac{1}{c^3} F \frac{\partial F}{\partial z} - \\ &- \frac{a_0^2}{c^3} F \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{2K\gamma_1}{3\gamma_0 c^3} F \frac{\partial F}{\partial z} - a_0^2 \frac{\alpha}{c^3 \gamma} \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (1.19)$$

Из (1.19) окончательно получится

$$\frac{\partial F}{\partial z} = kF \frac{\partial F}{\partial z} = \lambda \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \quad (1.20)$$

где

$$k = \frac{-3a_1^2}{c^4} + \frac{2K\gamma_1}{3\gamma_0 c^3}; \quad \lambda = \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma_1}{\gamma} \frac{a_1^2}{c^5} + \frac{\alpha}{\gamma} \frac{a_0^2}{c^3} \right)$$

Для жидкости и газа  $\gamma_1 < 0$ , для твердого тела  $\gamma_1 > 0$  [3, 7, 10]. Из (1.20) видно, что магнитное поле увеличит „жидкие“ свойства среды, то есть наличие ударных волн сжатия, а не разгрузки (см. далее).

В газовой динамике [4]

$$s = -(P - P_0)$$

где  $\frac{P}{P_0} = \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma = \left( \frac{1}{1+\varepsilon} \right)^\gamma \approx 1 - \gamma\varepsilon + \frac{\gamma(1+\gamma)}{2} \varepsilon^2$

откуда

$$s = P_0 \gamma \varepsilon - P_0 \frac{\gamma(1+\gamma)}{2} \varepsilon^2$$

но

$$a_1^2 = \frac{1}{\gamma} P_0, \quad P_0 = \frac{\gamma_0 a_0^2}{\lambda}$$

Отсюда можно получить

$$z = \gamma_0 a_1^2 t - \gamma_0 a_1^2 \frac{1 + \gamma}{2} z^2$$

и, сравнивая с (1.3), при  $x = 0, z = 0$  можно получить

$$\gamma_0 a_1^2 = K + \frac{4}{3} G; \quad -\gamma_0 a_1^2 \frac{1 + \gamma}{2\gamma_1} = \frac{K}{3}$$

Полагая в (1.20)  $\lambda = 0$ , можно найти уравнения нелинейной задачи для идеальной среды

$$\frac{\partial F}{\partial z} + k\gamma \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \tag{1.21}$$

Решение (1.21) имеет вид

$$z = \gamma_1 x, \quad k\gamma_1 x F = \tau + \psi(F) \tag{1.22}$$

где  $\psi(F)$  — произвольная функция, определяемая по условию (1.9) и в виде: при  $x = 0, \tau = t; \psi(F) = -t, F = \gamma^{-1}(-t)$  или  $F = V(t)$ , откуда  $\psi^{-1}(-\tau) = V(\tau)$  и (1.22) примет вид

$$F = V(z - k\gamma_1 x F) \tag{1.23}$$

Полученное решение отличается от линейного (1.10) лишь для больших  $x$  и  $t$  и в окрестности волны, где  $\tau \approx 0$ .

Условие на ударной волне получается из (1.21), если искать стационарное решение (1.21) в виде  $F = u, u = u(\xi), \xi = x - V_0 t$ , где  $V_0$  — скорость фронта ударной волны, причем в первом порядке по  $\gamma$  получится

$$V_0 = c - \frac{kc^2 \gamma}{2} F \tag{1.24}$$

Обозначая  $Y_1 = \psi(F)$ , (1.23) можно записать в виде

$$t - \frac{x}{c} - k\gamma_1 x F(Y_1) = Y_1 \tag{1.25}$$

Подставляя (1.25) в (1.24), можно найти, интегрируя вдоль ударной волны [11]

$$F^2 u = - \frac{2}{k\gamma_1 x} \int_{Y_1}^{Y_2} F dY_1 \tag{1.26}$$

Пусть площадь под кривой  $F = F(Y_1)$  конечна, причем граничное значение  $F(t)$  имеет вид, показанный на фиг. 1.

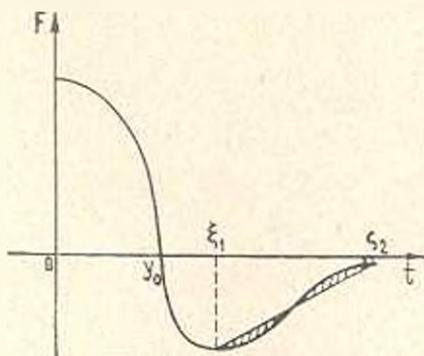
При  $x \rightarrow \infty, F \rightarrow 0$ , поэтому  $Y_1 = Y_0$ , где  $Y_0$  — корень уравнения  $F = 0$ , и в верхнем пределе в (1.26) можно полагать  $Y_1 = Y_0$ .

В случае  $k < 0$  должно быть  $F > 0$ , то есть

$$F = \sqrt{-\frac{2}{k\gamma x} \int_0^x F(Y_1) dY_1} \quad (1.27)$$

По (1.12)  $\gamma F(Y_1) = V(Y_1)$  и из (1.27) видно, что ударная волна образуется при  $V(Y_1) > 0$ , соответствующему нагружению стержня, причем в некоторый момент  $Y_1 = Y_0$ ,  $V(Y_0) = 0$  (фиг. 1).

Если же  $V(Y_1) \leq 0$ , что соответствует разгрузке, то  $F(Y_1) \leq 0$ . Тогда, согласно (1.27), должно быть  $F = 0$ , то есть ударная волна отсутствует и имеется непрерывный переход через волну  $x = ct$  к невозмущенной среде [10].



Фиг. 1

Таким образом,  $k < 0$  соответствует ударным волнам газовой динамики.

Если  $k > 0$ , то будет ударная волна разгрузки, поскольку в силу (1.27) должно быть  $V \leq 0$ . В этом случае можно рассмотреть и задачу о нагружении с убывающей скоростью  $V(t)$ . Тогда по первоначально непрерывной волне нагрузки [1] будет идти ударная волна разгрузки, в которой скачок скорости дается более общим уравнением по сравнению с (1.27) [4], а именно уравнением (2.9).

§ 2. Уравнение (1.20) путем замены [4]

$$F = -\frac{2\alpha}{k} \frac{\partial V}{\partial z} \quad (2.1)$$

приводится к виду

$$\frac{\partial V}{\partial z} = z \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \quad (2.2)$$

причем начальное условие для (2.2) при  $z = 0$  имеет вид

$$V(0, t) = e^{-\frac{k}{2\alpha} \int_0^t V(t) dt} \quad (2.3)$$

где  $F(0, t) = V(t)$  дается (1.9) и фиг. 1.

Решение (2.2), (2.3) имеет вид [4]

$$V(z, t) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l e^{ik(z-t)} dz \quad (2.4)$$

где

$$\Phi(\xi, \tau, z) = -\frac{k}{2\delta} \int_0^{\tau} V(\xi) d\tau - \frac{(\tau - \xi)^2}{2\delta z} \quad (2.5)$$

Тогда по (2.1) можно получить

$$F = \frac{2\delta}{k} \frac{\int_{-l}^l \frac{(\tau - \xi)}{2\delta z} e^{ik(z-t)} dz}{\int_{-l}^l e^{ik(z-t)} dz} = \frac{\int_{-l}^l V(\xi) e^{\delta} d\xi}{\int_{-l}^l e^{\delta} d\xi} \quad (2.6)$$

При  $\delta \approx 0$  метод стационарной фазы в применении к интегралам п (2.6) дает в стационарных точках  $\xi_0$  функции  $\Phi$

$$F = V(\xi_0) - \frac{k}{2\delta} V(\xi_0) - \frac{\xi_0 - \tau}{2\delta z} = 0 \quad (2.7)$$

Отсюда  $\tau - zkV(\xi_0) = \xi_0$ ;  $F = V(\tau - zkF)$ , что совпадает с решением (1.23), полученным для  $\delta = 0$ .

Пусть будут два максимума  $\xi_0 = \xi_{1,2}$  в (2.7), причем для этих максимумов фазы  $\Phi$  одинаковы. Тогда [4] при  $\delta = 0$  образуется многозначное решение и для устранения многозначности нужно ввести ударную волну [11]. Условия на ударной волне, разделяющей два переменных движения, могут быть получены непосредственно из решения уравнения (1.21) подобно получению условия (1.27).

Однако более общий подход заключается в применении метода стационарной фазы к (2.6) при малых  $\delta$ .

Аналогично (2.7), тогда можно найти в стационарных точках  $\xi_{1,2}$  [4]

$$\Phi(\xi_1) = \Phi(\xi_2); \quad F_1 = V(\xi_1); \quad F_2 = V(\xi_2) \quad (2.8)$$

где  $\xi_{1,2}$  и  $V(\xi_{1,2})$  связаны (2.7).

Здесь использовано условие совпадения значения  $\Phi$  в точках максимума, то есть на ударной волне возмущения позади нее догоняют возмущения впереди нее. Из (2.8) и (2.5) получается условие на ударной волне, разделяющей решения  $F_1$  и  $F_2$

$$F_1 = V(\xi_1); \quad F_2 = V(\xi_2) - k \int_{\xi_1}^{\xi_2} V(\xi') d\xi' = \frac{(\tau - \xi_1) + (\tau - \xi_2)}{2z} (\xi_2 - \xi_1) \quad (2.9)$$

или по (2.7)

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} V(\xi) d\xi = \frac{V(\xi_2) + V(\xi_1)}{2} (\xi_2 - \xi_1) \quad (2.10)$$

что выражает условие равенства заштрихованных площадей фиг. 1 между секущей и кривой  $F = V(\xi)$  [11], причем на фиг. 1 показано положение заднего скачка, а положение передней ударной волны, движущейся по невозмущенной среде, дается (1.27), что можно получить из (2.10), полагая

$$F_1 = 0, \quad \xi_2 = Y_1, \quad F_2 = F, \quad \xi_1 = \tau, \quad \xi_2 - \xi_1 = -kFz$$

Можно искать квазистационарное решение уравнения (1.20), где

$$F = F(\tau), \quad F \frac{\partial F}{\partial \tau} = \xi_1 \frac{\partial F}{\partial \xi^2}; \quad \xi_1 = \frac{\delta}{k}$$

которое имеет вид

$$F = -F_0 \operatorname{th} \frac{F_0 \tau}{2 \xi_1}; \quad F_0 = \text{const} \quad (2.11)$$

Из идеального решения (1.25) (то есть при  $\delta = 0$ ), учитывая, что для больших  $t$  имеет место  $Y_1 \rightarrow Y_0$ , где  $V(Y_0) = 0$ , можно приближенно получить, обозначая  $t - \frac{x}{a} = \tau$ ,

$$\tau - kzF = Y_0$$

откуда

$$F = \frac{\tau - Y_0}{b}, \quad b = kz \quad (2.12)$$

Решение уравнения (1.20) можно взять в виде [12]

$$F = \frac{1}{b} \left( \tau - Y_0 \operatorname{th} \frac{Y_0 \tau}{2 \delta b} \right) \quad (2.13)$$

где в решение (2.12) добавлена структура в форме (2.11), причем

$$F_0 = \frac{Y_0}{b}$$

Подставляя в (2.13)  $b = kz$ , получим

$$F = \frac{1}{zk} \left( \tau - Y_0 \operatorname{th} \frac{Y_0 \tau}{2 \delta z} \right) \quad (2.14)$$

Можно проверить, что при  $\delta = \text{const}$  (2.14) есть решение (1.20).

Для более общей задачи, где  $\delta = \text{const}$ , подставляя в (1.20) решение (2.14), можно убедиться, что все слагаемые сократятся, кроме выражения

$$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 \frac{Y_0 \tau}{2 \delta}} \frac{d \delta}{dz} \frac{Y_0^2 \tau}{2 \delta^2 z^2}, \quad \text{но им можно пренебречь при условии}$$

$$|\tau| \ll Y_0$$

Решение (2.14) при  $\tau \rightarrow -\infty$  переходит в (2.12), то есть в идеальное решение, давая структуру ударной волны для больших  $x$ . Можно исследовать ряд задач для частных видов условий (1.9) и получить решение для всего диапазона  $x$  и  $t$  [5].

§ 3. Следует отметить, что в силу уравнений (1.1), (1.4), учитывая малость  $\varepsilon = \frac{\gamma_0}{\gamma} \ll 1$ , можно в основном порядке записать уравнения движения (1.1) в переменных Лагранжа  $X = x - u(X, t)$ , где  $u$  — перемещение частиц,  $v = \frac{\partial u}{\partial X}$  [3] во втором порядке.

Уравнения имеют вид

$$\frac{\partial z}{\partial X} = \gamma_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{B_0^2}{4\pi} \frac{\partial h_y}{\partial X} + \frac{B_0^2}{4\pi} h_y \frac{\partial h_y}{\partial X}$$

$$\rho = \left( K + \frac{4}{3} G \right) \frac{\partial v}{\partial X} + \frac{K \varepsilon_0}{3} \left( \frac{\partial u}{\partial X} \right)^2 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial h_y}{\partial t} = - \frac{\partial^2 u}{\partial X \partial t} - \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial u}{\partial t} h_y \right) + \gamma_m \frac{\partial^2 h_y}{\partial X^2}$$

откуда, повторяя выкладки § 1, можно снова получить соотношения (1.14), (1.20) в лагранжевых координатах, где  $v = \frac{\partial u}{\partial t}$ .

В (3.1) учтено, что  $\frac{\partial x}{\partial X} = \frac{\gamma_0}{\gamma}$ , а в членах порядка  $\gamma \sim \gamma_m$  положено  $x = X$ .

Тот же вывод относится не только к плоской задаче, но и к задаче при наличии цилиндрической симметрии, где все величины зависят лишь от  $t$  и радиальной координаты  $r$ .

Предполагается, что начальное магнитное поле постоянно и имеет лишь кольцевую составляющую  $(H_z)_{t=0} = B_0$ .

В цилиндрических координатах  $r, \varphi, z$  уравнения движения имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = \gamma_0 \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} + \frac{1}{4\pi r} H_z \frac{\partial}{\partial r} (r H_z)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial r} \left( r H_z \frac{\partial u_r}{\partial t} \right) + \frac{c_0^2}{4\pi \gamma_0} \Delta H_z \quad (3.2)$$

где осуществлен переход к лагранжевым координатам  $z, \varphi$  и предположено, что решение не зависит от  $\varphi$  и  $z$ , причем  $\Delta H_z = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2}$ ,

$v_m = \frac{c_0^2}{4\pi \gamma_0}$  и, поскольку в начальный момент напряжения в среде должны уравновешивать напряжение  $\frac{B_0^2}{4\pi r}$ , можно полагать

$$\frac{\partial z_r}{\partial r} + \frac{z_r - z_0}{r} = \frac{\partial z_r}{\partial r} + \frac{z_r - z_0}{r} + \frac{B_0^2}{4\pi r} \quad (3.3)$$

где  $z_r$  и  $z_0$  находятся из соотношений [7].

$$\begin{aligned} z_r &= 3K(1 + \nu_1 \varepsilon_0) \varepsilon_0 + 2G(\varepsilon_r - \varepsilon_0) \\ z_0 &= 3K(1 + \nu_1 \varepsilon_0) \varepsilon_0 + 2G(\varepsilon_r - \varepsilon_0) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_0 = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_z = \frac{1}{3}(\varepsilon_r + \varepsilon_z) \quad (3.5)$$

Из (3.2) можно найти с учетом (3.3), полагая  $H_r = B_0(1 + h_r)$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial z_r}{\partial r} + \frac{z_r - z_0}{r} + \frac{B_0^2}{4\pi r} &= \nu_0 \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{B_0^2}{4\pi r} (1 + h_r)^2 + \frac{B_0^2}{4\pi} (1 + h_r) \frac{\partial h_r}{\partial r} \\ \frac{\partial h_r}{\partial t} &= -\frac{\partial h_r}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial t} - (1 + h_r) \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial t} + \nu_0 \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 h_r}{\partial r^2} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Подставляя (3.4), (3.5) в (3.6), можно получить

$$\begin{aligned} \left(K + \frac{4}{3}G\right) \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \left(K + \frac{4}{3}G\right) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_r}{r}\right) + \frac{2K\nu_1}{3} \frac{\partial u_r}{\partial r} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} &= \\ = \nu_0 \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{B_0^2}{4\pi r} (2h_r + h_r^2) + \frac{B_0^2}{4\pi} (1 + h_r) \frac{\partial h_r}{\partial r} & \quad (3.7) \\ \frac{\partial h_r}{\partial t} = -\frac{\partial h_r}{\partial r} \frac{\partial u_r}{\partial t} - (1 + h_r) \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial t} + \frac{\nu_0}{r^2} \frac{\partial^2 h_r}{\partial r^2} \end{aligned}$$

Решение системы уравнений (3.7) будем искать в виде

$$u_r = \gamma w(\tau, z); \quad z = \gamma r, \quad \tau = t - \frac{r}{c}; \quad h_r = \gamma \xi(\tau, z)$$

Вычисляя производные подобно §1 и упрощая уравнения, можно получить в порядке  $\gamma^2$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\alpha^2}{c^2} - 1\right) \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} - 2 \frac{\alpha^2}{c} \frac{\partial^2 w}{\partial \tau \partial z} - \frac{2}{3} \frac{K\nu_1}{\nu_0 c^2} \frac{\partial w}{\partial \tau} \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} - \frac{\alpha^2 \nu_1}{c z} \frac{\partial w}{\partial \tau} &= \\ = \frac{2\alpha_1^2}{c z} \frac{\partial w}{\partial \tau} + \frac{\alpha_1^2}{\gamma} \left(1 + \frac{1}{c} \frac{\partial u_r}{\partial \tau}\right) \left(\gamma \frac{\partial h_r}{\partial z} - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial h_r}{\partial \tau}\right) & \quad (3.8) \end{aligned}$$

$$h_r = \frac{1}{c} \frac{\partial w}{\partial \tau} - \gamma \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\gamma^2}{c^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \tau}\right)^2 + \frac{\nu_0}{c^2} \gamma \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2}, \quad h_z = \gamma \xi$$

Отсюда получится

$$\begin{aligned} \frac{2\alpha^2}{c} - 2\alpha_1^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \tau \partial z} + \frac{\alpha^2 + 2\alpha_1^2}{z} \frac{1}{c} \frac{\partial w}{\partial \tau} &= \\ = \left(\frac{2K\nu_1}{3\nu_0 c^2} - \frac{3\alpha_1^2}{c^2}\right) \frac{\partial w}{\partial \tau} \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} - \frac{\nu_0}{c^2} \alpha_1^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = 0 \end{aligned}$$

или вводя обозначения

$$F' = \frac{du_r}{dz}, \quad \gamma = \frac{a^2 + 2a_1^2}{2c^2}, \quad k = \frac{\frac{2}{3}K\gamma_1 - 3a_1^2}{2c^4}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} + \gamma \frac{F}{z} + kF \frac{\partial F}{\partial z} = \delta \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \quad (3.9)$$

Здесь

$$c^2 = a^2 + a_1^2, \quad a^2 = \frac{K + \frac{4}{3}G}{\gamma_0}, \quad a_1^2 = \frac{B_0^2}{4\pi\gamma_0}, \quad \delta = \frac{\gamma_0}{2c^2}$$

В линейной задаче для идеальной среды, где  $a_0 = \infty$ , получится из второго уравнения (3.6)

$$h_z = -\frac{\partial u_r}{\partial r}$$

причем для  $u$  получится уравнение

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{a^2 + 2a_1^2}{a^2 + a_1^2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \quad (3.10)$$

Уравнение (3.9) лишь слагаемым  $\gamma \frac{F}{z}$  отличается от плоской задачи.

Уравнение (3.9) заменой  $F = \frac{U}{z^{\lambda}}$ ,  $x_1 = z^{1-\lambda}$  приводится к виду

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} + 2HU \frac{\partial U}{\partial z} = 2\gamma_0 x_1^{\frac{\lambda}{1-\lambda}} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad (3.11)$$

где

$$H = \frac{k}{2(1-\lambda)}, \quad \lambda_1 = \frac{\delta}{2(1-\lambda)}$$

Пусть  $\delta = 0$ , тогда

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} + 2HU \frac{\partial U}{\partial z} = 0$$

решением которого будет

$$z = 2HUx_1 + f(U), \quad U = Fz' \quad (3.12)$$

где  $f(U)$  находится из граничных условий на поршне: при  $r = \gamma R(t)$   $u_r = \gamma R'(t)$  или из условия перехода (3.12) в линейное решение на выходе из волновой области.

Обозначим  $f(Fz') = Y_1$ , тогда  $Fz' = \Phi(Y_1)$ , где  $\Phi$  — функция, обратная к  $f$ . Из (3.12) получится

$$z = 2HFz' + Y_1 \quad (3.13)$$

или

$$t - \frac{x}{c} - 2Hz^{1-\lambda} \Phi(Y_1) = Y_1 \quad (3.14)$$

Из (1.27) на ударной волне имеем

$$\Phi(Y_1) = \sqrt{\frac{2 \int_0^{Y_1} \Phi(Y_2) dY_2}{2Hz^{1-\lambda}}} \cdot F = \Phi(Y_1)z^{-\lambda} \quad (3.15)$$

что дает закон затухания ударной волны в предположении  $\Phi > 0$ . График  $\Phi(Y_1)$  дается для специального вида граничных условий на фиг. 1, причем при  $z \rightarrow \infty$ ,  $\Phi(Y_1) \rightarrow 0$  по (3.15), а корень уравнения  $\Phi(Y_1) = 0$  по-прежнему обозначим  $Y_1 = Y_0$ . Для больших  $z$  в (3.14) можно считать  $Y_1 \approx Y_0$ , тогда

$$z = 2Hz^{1-\lambda} \Phi(Y_1) + Y_0$$

откуда

$$F = \frac{z - Y_0}{2Hz}$$

то есть имеет тот же вид, что для плоской задачи, или

$$U = \frac{z - Y_0}{2Hx_1} \quad (3.16)$$

Уравнение (3.11) при  $\delta = 0$  в квазистационарной задаче

$$HU \frac{\partial U}{\partial z} = \delta_1 x_1^{\frac{\lambda}{1-\lambda}} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

имеет решение

$$U = -U_0 \operatorname{th} \frac{z - U_0 H}{2 \delta_1 x_1^{\frac{\lambda}{1-\lambda}}}, \quad U_0 = \text{const} \quad (3.17)$$

Квазистационарное решение имеет место при условии

$$\left| \frac{\partial U}{\partial x_1} \right| \ll \left| 2HU \frac{\partial U}{\partial z} \right|, \quad U \sim |U_0|$$

или

$$|z| \ll |2Hx_1 U_0| \quad (3.18)$$

Из (3.16) и (3.17) можно построить приближенное решение, в котором

$$U_c = \frac{Y_0}{2Hx_1}$$

тогда по (3.18) при выполнении условия

$$|z| \ll |Y_0|$$

решение

$$U = \frac{Y_0 \operatorname{th} \frac{Y_0 x_1 \sqrt{\lambda}}{4G_0}}{2Hx_1}$$

должно приближенно удовлетворять (3.11), что можно проверить непосредственной подстановкой.

Институт механики АН Армянской ССР  
Кировоградский педагогический институт

Поступило 17 III 1972

Ֆ. Հ. ՀԱԽԻՆԻԱՆ, Ա. Գ. ԲԱԳԴՈՎԵՎ

ՄԱԳՆԵՏԻԿԱՆ ԳՈՇՏՈՒԻ ՇՈՐՈՎԱՄՅԻՆ ԲՆՈՒ ԱՉԻՆՅՈՒԹՅԱՆ ՏԱԿ ԱՌՈՂՊՈՒՄԻ ԱՆՉՈՒՎՅՐԻ ՇԵՐՔՄԱՆ ՎԵՐԱՐԵՐՅԱԼ ԿՆՊՄԻ ԼՈՍՈՒՄԸ

Ա մ փ ո ւ ր ո ս մ

Հոդվածում դիտարկված են մագնիսական դաշտում տված բնի ազդեցության տակ հոծ միջավայրի շարժման վերաբերյալ խնդիրները:

Ենթադրելով գրգռման փոքրությունը, ստացված է ոչ-դժային խնդրի լուծումը մածուցիկության և վերջավոր էլեկտրահաղորդականության հաշվառումով:

Արտածված են ոչ-զժային հավասարումները և ստացված են նրանց լուծումները ինչպես հարթ ալիքների համար, այնպես էլ այն դեպքում, եթե խնդրի համար տեղի ունի գլանային սիմետրիկության պայմանը:

## SOLUTION OF ELASTIC MEDIUM MOTION PROBLEMS IN A MAGNETIC FIELD UNDER PERCUSSION LOAD

Zh. H. HAKHINIAN, A. G. BAGDOEV

### S u m m a r y

Continuous medium motion problems in a magnetic field under a specified load are considered.

Assuming the smallness of disturbances, a non-linear solution is obtained, taking into account viscosity and finite electroconductivity.

Non-linear equations are derived and their solution is presented both for plane wave and for a cylindrical symmetric problem.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Радматуллин Х. А., Соломонов А. Я., Бунимович А. И., Зверев И. Н. „Газовая динамика“, М., 1965.
2. Кольский Г. Волны напряжения в твердых телах. М., ИЛ, 1965.
3. Курант Р., Фридрихс К. Сверхзвуковое течение и ударные волны. ИЛ, М, 1950.
4. Lighthill M. Y. Viscosity effects in Sound waves of finite amplitude. *Surveys in mechanics*, 1956.
5. Рижов О. С. О нелинейной акустике химически-активных сред. ПММ, т. 35, № 6, 1971.
6. Солуян С. И., Холмова Г. Б. Распространение акустических волн. Вестник МГУ, сер. физ., № 3, 1961.
7. Коудерер Г. Нелинейная механика. М., 1961.
8. Багдасарян Г. Е., Давоян Э. Н. Распространение волн в анизотропной упругой среде в магнитном поле. Известия АН АрмССР, механика, т. XXV, № 1, 1972.
9. Фримен Э. А., Карлсруд Р. М. Проблемы магнитогидродинамики. „Проблемы механики“ под редакцией Х. Драйдена и Т. Кормана, т. 3, ИЛ, М., 1961.
10. Багдоев А. Г., Мовсисян А. А. К вопросу определения ударной волны в нелинейных задачах теории упругости. Известия АН АрмССР, механика, т. 21, № 3, 1968.
11. Whitham G. B. The behaviour of supersonic flow past a body of revolution far from axis. *Proceed. of Royal Soc.*, A 201, 89, 1951.
12. Багдоев А. Г. Определение волновой области в одномерной задаче и близкая особая линия. Докл. АН АрмССР, механика, т. XLVII, № 3, 1968.