ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXV, № 6, 1972 Механика

А. А. ХАЧАТРЯН

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ В РАЗНОМОДУЛЬНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

В своих исследованиях Р. Хилл [1, 2] указывает, что понятие выпуклой функции не только является основой единой трактовки теорем единственности и экстремальных принципов во многих существующих областях механики жидких и твердых тел, но также дает простой автоматический метод формулировки и доказательства таких теорем (там, где они возможны) во вновь возникающих областях. Эти вопросы освещены также у Гольденблата И. И. [3].

В настоящей работе доказывается, что удельная потенциальная энергия деформации упругого разномодульного тела является выпуклой функцией своих аргументов (компонентов деформации) и в связи с этим приводятся некоторые соображения, относящиеся к вопросу единственности решения задачи в разномодульной теории упругости.

1. Приведем вкратце основные уравнения и соотношения разномодульной теории упругости для областей второго рода [4—7]. Принимая, что знак одного из главных напряжений (скажем σ_β) отличен от знака двух других (σ_α, σ_γ), законы упругости в системе координат x_n ($n = 1, 2, 3$) можно представить в виде*

$$\varepsilon_{ij} = (a_{11} - a_{12})\sigma_{ij} + a_{12}\Theta\delta_{ij} + (a_{22} - a_{11}) m_i m_j \sigma_\beta \tag{1.1}$$

или

$$\sigma_{ij} = 2A\varepsilon_{ij} + B\theta\delta_{ij} - C(B\theta + 2A\varepsilon_\beta)(B\delta_{ij} + 2Am_im_j) \tag{1.2}$$

где

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \tag{1.3}$$

$$\begin{gathered} \Theta = \sigma_{ij}\delta_{ij} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_\alpha + \sigma_\beta + \sigma_\gamma \\ \theta = \varepsilon_{ij}\delta_{ij} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta + \varepsilon_\gamma \end{gathered} \tag{1.4}$$

$$\begin{gathered} A = \frac{1}{2(a_{11} - a_{12})}, \qquad B = -\frac{a_{12}}{(a_{11} - a_{12})(a_{11} + 2a_{12})} \\ C = \frac{a_{22} - a_{11}}{1 + (a_{22} - a_{11})(2A + B)} = \frac{(a_{22} - a_{11})(a_{11} - a_{12})(a_{11} + 2a_{12})}{a_{11}a_{22} + a_{12}a_{22} - 2a_{12}^2} \end{gathered} \tag{1.5}$$

---

* Все, относящееся непосредственно к главным направлениям, преднамеренно представлено в обычной форме.

$$a_{11} = \frac{1}{E^+}, \quad a_{22} = \frac{1}{E^-}, \quad a_{12} = -\frac{\nu^+}{E^+} = -\frac{\nu^-}{E^-} \quad (\text{при } \sigma_\beta < 0) \qquad (1.6)$$

Кроме того, σ_{ij} и ε_{ij} — компоненты тензора напряжения и деформации соответственно, u_i — компоненты вектора перемещения. А относительное расположение главных направлений (α, β, γ) напряжений и деформаций с осями координат (x_i) в данной точке определяется при помощи направляющих косинусов l_i, m_i, n_i (см. схему), связанных между собой следующими зависимостями:

	α	β	γ
x_1	l_1	m_1	n_1
x_2	l_2	m_2	n_2
x_3	l_3	m_3	n_3

$$l_i l_j + m_i m_j + n_i n_j = \delta_{ij}$$
$$l_i m_i = l_i n_i = m_i n_i = 0 \qquad (1.7)$$

Приведем также известные формулы преобразования компонентов тензора напряжения и деформации в данной точке при переходе от одной системы координат к другой, связанных между собой схемой (1.7) при условии, что α, β, γ — главные направления напряжений и деформаций

$$\sigma_{ij} = l_i l_j \sigma_\alpha + m_i m_j \sigma_\beta + n_i n_j \sigma_\gamma \qquad (1.8)$$

или

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= l_i l_j \sigma_{ij} & \tau_{\alpha\beta} &= l_i m_j \sigma_{ij} = 0 \\ \sigma_\beta &= m_i m_j \sigma_{ij} & \tau_{\alpha\gamma} &= l_i n_j \sigma_{ij} = 0 \\ \sigma_\gamma &= n_i n_j \sigma_{ij} & \tau_{\beta\gamma} &= m_i n_j \sigma_{ij} = 0 \end{aligned} \qquad (1.9)$$

В этих формулах, заменив σ на ε, получим соответствующие формулы преобразования для компонентов тензора деформации.

Как известно [5], удельная потенциальная энергия деформации определяется формулой

$$W = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\sigma_\alpha\varepsilon_\alpha + \sigma_\beta\varepsilon_\beta + \sigma_\gamma\varepsilon_\gamma) \qquad (1.10)$$

или только через компоненты тензора напряжения

$$W = \frac{1}{2}(a_{11} - a_{12})\sigma_{ij}\sigma_{ij} + \frac{1}{2}a_{12}\Theta^2 + \frac{1}{2}(a_{22} - a_{11})\sigma_\beta^2 \qquad (1.11)$$

или только через компоненты тензора деформации

$$W = A\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} + \frac{1}{2}B\theta^2 - \frac{1}{2}C(B\theta + 2A\varepsilon_\beta)^2 \qquad (1.12)$$

Отметим, что матрицы тензоров напряжения и деформации симметричные ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$) и фактически образованы из шести независимых компонентов σ_{pq} и ε_{pq} $(p \leqslant q)$. При необходимости этот факт здесь будет учтен.

Имеем уравнения равновесия и напряжения на поверхности

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i = 0, \qquad F_i = \sigma_{ij} l_j \tag{1.13}$$

где X_i — компоненты объемной силы, l_i — направляющие косинусы внешней нормали поверхности в данной точке.

Виртуальная работа поверхностных и объемных сил преобразуется к виду [1, 2]

$$\int_S F_i \delta u_i \, dS + \int_V X_i \delta u_i \, dV = \int_V \sigma_{ij} \delta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) dV \tag{1.14}$$

Подынтегральное выражение правой части равенства (1.14) можно преобразовать к виду

$$\sigma_{ij} \delta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (1 + \delta_{ij}) \sigma_{ij} \delta e_{ij} = \sigma_{pq} \delta e_{pq} \quad (p \leqslant q) \tag{1.15}$$

где

$$e_{ij} = \begin{cases} \varepsilon_{ij} & (i = j) \\ 2\varepsilon_{ij} & (i \neq j) \end{cases} \tag{1.16}$$

представляют собой компоненты деформации.

Для упругого тела выражение (1.15) представляет собой полный дифференциал, так как при деформировании такого тела работа внешних сил полностью переходит в потенциальную энергию деформации. Поэтому

$$\sigma_{pq} = \frac{\partial W}{\partial e_{pq}} \tag{1.17}$$

где W представляет собой удельную потенциальную энергию деформации.

Отметим, что в работе [6] непосредственным вычислением доказано, что выражение (1.15) для рассматриваемого здесь разномодульного материала представляет собой полный дифференциал.

С учетом (1.15)—(1.17), равенство (1.14) можно представить в виде

$$\int_S F_i \delta u_i \, dS + \int_V X_i \delta u_i \, dV = \int_V \frac{\partial W}{\partial e_{pq}} \delta e_{pq} \, dV \tag{1.18}$$

Формулы преобразования компонентов деформаций (e_{ij}) от системы направлений x_i к главным и наоборот имеют вид

$$\begin{aligned} e_{ii} &= l_i^2 e_1 + m_i^2 e_2 + n_i^2 e_3 \\ e_{ij} &= 2(l_i l_j e_1 + m_i m_j e_2 + n_i n_j e_3) \quad i \neq j \end{aligned} \tag{1.19}$$

$$e_x = \frac{1}{2}(1+\delta_{ij})l_i l_j e_{ij} = l_p l_q e_{pq} \qquad e_{xy} = (1+\delta_{ij})l_i m_j e_{ij} = 0$$

$$e_y = \frac{1}{2}(1+\delta_{ij})m_i m_j e_{ij} = m_p m_q e_{pq} \qquad e_{xz} = (1+\delta_{ij})l_i n_j e_{ij} = 0 \quad (1.20)$$

$$e_z = \frac{1}{2}(1+\delta_{ij})n_i n_j e_{ij} = n_p n_q e_{pq} \qquad e_{yz} = (1+\delta_{ij})m_i n_j e_{ij} = 0$$

Эти формулы будут использованы в последующем.

2. Приведем понятие выпуклой функции согласно изложенному в работах [1—3] и соответствующие необходимые и достаточные условия, при которых функция будет выпуклой.

Известно, что дифференцируемая непрерывная функция f от n переменных θ_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ называется строго выпуклой, если

$$\Delta f - \frac{\partial f}{\partial \theta_i}\Delta\theta_i > 0 \tag{2.1}$$

где Δ означает приращение соответствующей переменной.

Неравенство (2.1) можно представить еще в виде

$$\Delta\left(\frac{\partial f}{\partial \theta_i}\right)\Delta\theta_i > 0 \tag{2.2}$$

Известно также, что необходимым и достаточным условием строгой выпуклости функции f является положительная определенность гессиана

$$b_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial\theta_i \partial\theta_j} \tag{2.3}$$

для любых значений независимых переменных. Через соответствующую квадратичную форму это условие представляется в виде

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\theta_i \partial\theta_j}\xi_i\xi_j = b_{ij}\xi_i\xi_j > 0 \tag{2.4}$$

если не все ξ_i равны нулю.

А для квадратичной формы известно (теорема Сильвестра): чтобы действительная симметрическая $(b_{ij} = b_{ji})$ квадратичная форма была положительно определена, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры матрицы $[b_{ij}]$

$$\Delta_1 = b_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \Delta_n = \det[b_{ij}] \tag{2.5}$$

были положительными.

3. Здесь излагается доказательство выпуклости удельной потенциальной энергии деформации при плоском напряженном состоянии для разномодульного тела.

Приведем основные необходимые формулы и соотношения—законы упругости

$$
\begin{aligned}
e_x &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + (a_{22} - a_{11})\, m_1^2 \sigma_2 \\
e_y &= a_{12}\sigma_x + a_{11}\sigma_y + (a_{22} - a_{11})\, m_2^2 \sigma_2 \\
e_{xy} &= 2(a_{11} - a_{12})\,\tau_{xy} + 2(a_{22} - a_{11})\, m_1 m_2 \sigma_2
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{a_{11}e_x - a_{12}e_y}{a_{11}^2 - a_{12}^2} - (a_{22} - a_{11})\frac{(a_{11}m_1^2 - a_{12}m_2^2)(a_{11}e_2 - a_{12}e_1)}{(a_{11}^2 - a_{12}^2)(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)} \\
\sigma_y &= \frac{a_{11}e_y - a_{12}e_x}{a_{11}^2 - a_{12}^2} - (a_{22} - a_{11})\frac{(a_{11}m_2^2 - a_{12}m_1^2)(a_{11}e_2 - a_{12}e_1)}{(a_{11}^2 - a_{12}^2)(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)} \\
\tau_{xy} &= \frac{e_{xy}}{2(a_{11} - a_{12})} - (a_{22} - a_{11})\frac{m_1 m_2 (a_{11}e_2 - a_{12}e_1)}{(a_{11} - a_{12})(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)}
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

Формулы преобразования компонентов напряжения и деформации при переходе от одной системы координат к другой с учетом известных зависимостей между направляющими косинусами можно представить в виде

$$
\begin{aligned}
\sigma_x &= m_2^2\sigma_1 + m_1^2\sigma_2 & \sigma_1 &= m_2^2\sigma_x + m_1^2\sigma_y - 2m_1m_2\tau_{xy} \\
\sigma_y &= m_1^2\sigma_1 + m_2^2\sigma_2 & \sigma_2 &= m_1^2\sigma_x + m_2^2\sigma_y + 2m_1m_2\tau_{xy} \\
\tau_{xy} &= (\sigma_1 - \sigma_2)\, m_1m_2 & \tau_{12} &= (\sigma_x - \sigma_y)\, m_1m_2 + (m_2^2 - m_1^2)\,\tau_{xy} = 0
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

$$
\begin{aligned}
e_x &= m_2^2 e_1 + m_1^2 e_2 & e_1 &= m_2^2 e_x + m_1^2 e_y - m_1m_2e_{xy} \\
e_y &= m_1^2 e_1 + m_2^2 e_2 & e_2 &= m_1^2 e_x + m_2^2 e_y + m_1m_2e_{xy} \\
e_{xy} &= 2(e_1 - e_2)\, m_1m_2 & e_{12} &= 2(e_x - e_y)\, m_1m_2 + (m_2^2 - m_1^2)\, e_{xy} = 0
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

Как отмечалось в предыдущем пункте, для доказательства выпуклости функции (в данном случае W) необходимо вычислить коэффициенты b_{ij} (2.3) соответствующей квадратичной формы. С учетом (1.17) этими коэффициентами являются

$$
\begin{aligned}
b_{11} &= \frac{\partial^2 W}{\partial e_x^2} = \frac{\partial\sigma_x}{\partial e_x}, \quad b_{12} = b_{21} = \frac{\partial^2 W}{\partial e_x \partial e_y} = \frac{\partial\sigma_x}{\partial e_y} = \frac{\partial\sigma_y}{\partial e_x} \\
b_{13} &= b_{31} = \frac{\partial^2 W}{\partial e_x \partial e_{xy}} = \frac{\partial\sigma_x}{\partial e_{xy}} = \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial e_x}, \quad b_{22} = \frac{\partial^2 W}{\partial e_y^2} = \frac{\partial\sigma_y}{\partial e_y} \\
b_{23} &= b_{32} = \frac{\partial^2 W}{\partial e_y \partial e_{xy}} = \frac{\partial\sigma_y}{\partial e_{xy}} = \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial e_y}, \quad b_{33} = \frac{\partial^2 W}{\partial e_{xy}^2} = \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial e_{xy}}
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

Из (3.5) и (3.2) видно, что здесь, кроме всего, необходимы также выражения для производных направляющих косинусов по соответствующим компонентам деформации.

Для вычисления этих производных сначала продифференцируем тождество $m_1^2 + m_2^2 = 1$ по e_{ij}, в результате чего будем иметь

$$\frac{\partial m_2}{\partial e_{ij}} = -\frac{m_1}{m_2}\frac{\partial m_1}{\partial e_{ij}} \tag{3.6}$$

Далее дифференцируя тождество $e_{xy} = 0$ (3.4) по соответствующему компоненту e_{ij} и учитывая (3.6), получим следующие формулы для производных направляющих косинусов

$$\frac{\partial m_1}{\partial e_x} = -\frac{\partial m_1}{\partial e_y} = -\frac{m_2}{m_1}\frac{\partial m_2}{\partial e_x} = \frac{m_2}{m_1}\frac{\partial m_2}{\partial e_y} = \frac{m_1 m_2^2}{e_1 - e_2} \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial m_1}{\partial e_{xy}} = -\frac{m_2}{m_1}\frac{\partial m_2}{\partial e_{xy}} = -\frac{m_2}{2}\frac{m_1^2 - m_2^2}{e_1 - e_2}$$

Для дальнейшего необходимы также формулы

$$\frac{\partial e_1}{\partial e_x} = \frac{\partial e_2}{\partial e_y} = m_1^2, \quad \frac{\partial e_1}{\partial e_y} = \frac{\partial e_2}{\partial e_x} = m_2^2, \quad \frac{\partial e_1}{\partial e_{xy}} = -\frac{\partial e_2}{\partial e_{xy}} = m_1 m_2 \tag{3.8}$$

Отметим, что тем же путем при необходимости можно получить соответствующие формулы для производных направляющих косинусов по компонентам напряжения.

Вычисляя теперь коэффициенты соответствующей квадратичной формы b_{ik} (3.5), с учетом приведенных выше формул получим

$$b_{11} = \frac{(a_{22}e_1 - a_{11}e_2) - (a_{22} - a_{11})(m_1^4 e_1 + m_2^4 e_2)}{(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(e_1 - e_2)}$$

$$b_{12} = -\frac{a_{12}(e_1 - e_2) + (a_{22} - a_{11})(e_1 + e_2)m_1^2 m_2^2}{(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(e_1 - e_2)}$$

$$b_{13} = -\frac{(a_{22} - a_{11})(m_1^2 e_1 - m_2^2 e_2)\, m_1 m_2}{(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(e_1 - e_2)}$$

$$b_{22} = \frac{(a_{22}e_2 - a_{11}e_1) - (a_{22} - a_{11})(m_2^4 e_1 + m_1^4 e_2)}{(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(e_1 - e_2)} \tag{3.9}$$

$$b_{23} = -\frac{(a_{22} - a_{11})(m_2^2 e_1 - m_1^2 e_2)\, m_1 m_2}{(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(e_1 - e_2)}$$

$$b_{33} = \frac{(a_{22} + a_{12})e_1 - (a_{11} + a_{12})e_2 - 2(a_{22} - a_{11})(e_1 + e_2)m_1^2 m_2^2}{2(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(e_1 - e_2)}$$

Подставляя теперь значения b_{ik} из (3.9) в (2.5), получим

$$\Delta_1 = \frac{(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(e_1 - e_2) + 2(a_{22} - a_{11})[(a_{22} - a_{12})e_1 - (a_{11} - a_{12})e_2]m_1^2 m_2^2}{(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)^2(e_1 - e_2)}$$

$$\Delta_3 = \frac{(a_{22} + a_{12})e_1 - (a_{11} + a_{12})e_2}{2(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)^2(e_1 - e_2)} \tag{3.10}$$

Напомним, что все приводимые здесь выводы относятся к областям второго рода, для которых главные напряжения σ_1 и σ_2, а следовательно, и e_1 и e_2 имеют различные знаки. Учитывая это, из (3.10) легко заметить, что $\Delta_3 > 0$. Чтобы выяснить знаки $\Delta_1 = b_{11}$ и Δ_2, их числители (обозначим соответственно через Δ_1' и Δ_2), преобразуя, представим в виде

$$\Delta_1' = [a_{11}m_1^4 + a_{22}(1 - m_1^4)]e_1 - [a_{22}m_2^4 + a_{11}(1 - m_2^4)]e_2$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 = {} & [(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(m_1^2 - m_2^2)^2 + 2(a_{22} + a_{12})(a_{11} + a_{22} - 2a_{12})m_1^2m_2^2]\, e_1 - \\ & - [(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(m_1^2 - m_2^2)^2 + 2(a_{11} + a_{12})(a_{11} + a_{22} - 2a_{12})m_1^2m_2^2]\, e_2 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Отсюда уже нетрудно заметить, что $\Delta_1 > 0$ и $\Delta_2 > 0$.

Таким образом, доказано, что удельная потенциальная энергия деформации $W(e_x, e_y, e_{xy})$ является выпуклой функцией своих аргументов.

4. В случае трехмерного напряженного состояния доказательство выпуклости функции удельной потенциальной энергии усложняется тем, что, во-первых, коэффициенты b_{ik} соответствующей квадратичной формы получаются более громоздкими по сравнению с (3.9), и, во-вторых, необходимо вычислить определители, составленные из указанных коэффициентов, до шестого порядка включительно. Здесь мы на этом останавливаться не будем. Однако отметим, что для вычисления коэффициентов b_{ik} (и не только при этом) необходимо иметь формулы для вычисления производных направляющих косинусов по компонентам деформации.

Известно [5, 6], что частная производная направляющего косинуса (скажем l_i) по какому-то аргументу является линейной комбинацией других (m_i, n_i) направляющих косинусов

$$\begin{aligned} \frac{\partial l_i}{\partial e_{jk}} &= c_{jk}^{11} m_i + c_{jk}^{12} n_i \\ \frac{\partial m_i}{\partial e_{jk}} &= c_{jk}^{21} l_i + c_{jk}^{23} n_i \\ \frac{\partial n_i}{\partial e_{jk}} &= c_{jk}^{31} l_i + c_{jk}^{32} m_i \end{aligned} \tag{4.1}$$

где c_{jk}^{ts} — некоторые неизвестные пока коэффициенты.

Дифференцируя тождества $l_i m_i = l_i n_i = m_i n_i = 0$ из (1.7) по e_{jk}, с учетом (4.1) получим между коэффициентами c_{jk}^{ts} следующие зависимости:

$$\begin{aligned} c^{11}_{jk} &= -c^{21}_{jk} = c_{jk} \\ c^{12}_{jk} &= -c^{31}_{jk} = d_{jk} \\ c^{22}_{jk} &= -c^{32}_{jk} = h_{jk} \end{aligned} \tag{4.2}$$

В силу (4.2) соотношения (4.1) представятся в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial l_i}{\partial e_{jk}} &= c_{jk}\, m_i + d_{jk}\, n_i \\ \frac{\partial m_i}{\partial e_{jk}} &= -c_{jk}\, l_i + h_{jk}\, n_i \\ \frac{\partial n_i}{\partial e_{jk}} &= -d_{jk}\, l_i - h_{jk} m_i \end{aligned} \tag{4.3}$$

Продифференцировав теперь тождества $e_{\alpha\beta} = e_{\alpha\gamma} = e_{\beta\gamma} = 0$ из (1.20), с учетом формул (4.3) и (1.20) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_{\alpha\beta}}{\partial e_{pk}} &= l_p m_k + l_k m_p + 2c_{pk}(e_\beta - e_\alpha) + d_{pk} e_{\beta\gamma} + h_{pk} e_{\alpha\gamma} = 0 \\ \frac{\partial e_{\alpha\gamma}}{\partial e_{pk}} &= l_p n_k + l_k n_p + c_{pk} e_{\beta\gamma} + 2d_{pk}(e_\gamma - e_\alpha) - h_{pk} e_{\alpha\beta} = 0 \\ \frac{\partial e_{\beta\gamma}}{\partial e_{pk}} &= m_p n_k + m_k n_p + 2h_{pk}(e_\gamma - e_\beta) - c_{pk} e_{\alpha\gamma} - d_{pk} e_{\alpha\beta} = 0 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Отсюда найдем

$$c_{pk} = \frac{l_p m_k + l_k m_p}{2(e_\alpha - e_\beta)}, \qquad d_{pk} = \frac{l_p n_k + l_k n_p}{2(e_\alpha - e_\gamma)} \tag{4.5}$$

$$h_{pk} = \frac{m_p n_k + m_k n_p}{2(e_\beta - e_\gamma)}$$

В силу этого из (4.3) для производных направляющих косинусов окончательно будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial l_i}{\partial e_{pq}} &= \frac{l_p m_q + l_q m_p}{2(e_\alpha - e_\beta)}\, m_i + \frac{l_p n_q + l_q n_p}{2(e_\alpha - e_\gamma)}\, n_i \\ \frac{\partial m_i}{\partial e_{pq}} &= \frac{m_p n_q + m_q n_p}{2(e_\beta - e_\gamma)}\, n_i + \frac{l_p m_q + l_q m_p}{2(e_\beta - e_\alpha)}\, l_i \\ \frac{\partial n_i}{\partial e_{pq}} &= \frac{l_p n_q + l_q n_p}{2(e_\gamma - e_\alpha)}\, l_i + \frac{m_p n_q + m_q n_p}{2(e_\gamma - e_\beta)}\, m_i \end{aligned} \tag{4.6}$$

Отсюда при необходимости можно получить формулы для производных направляющих косинусов по компонентам тензора напряжения.

Для этого достаточно в формулах (4.6) от e_{ij} перейти к ε_{ij} согласно (1.16) и заменить ε_{ij} на σ_{ij}.

5. Рассмотрим теперь краевую задачу, когда на одной части поверхности (S_u) заданы перемещения, а на другой части (S_F) — внешние напряжения. Пусть u_i есть решение рассматриваемой задачи в предположении, что весь объем, занимаемый телом, является областью второго рода. Предположим теперь, что существует еще и второе решение u_i^*, при котором также весь рассматриваемый объем является областью второго рода. Обозначим разность этих двух решений через Δu_i. Тогда после некоторого преобразования, аналогичного преобразованию выражения для виртуальной работы и приводящего к равенству (1.18), можно получить следующее равенство:

$$\int \Delta F_i \Delta u_i \, dS = \int \Delta\left(\frac{\partial W}{\partial e_{pq}}\right) \Delta e_{pq} \, dV \tag{5.1}$$

Если теперь W будет строго выпуклой функцией компонентов деформации e_{pq}, то объемный интеграл правой части равенства (5.1), в силу (2.2), будет положительным при двух решениях, соответствующих различным деформациям. Однако подынтегральное выражение левой части равенства (5.1) тождественно равно нулю, так как $\Delta F_i = 0$ на S_F и $\Delta u_i = 0$ на S_u. Следовательно, предположение о существовании второго, отличного от первого, решения исключается. Значит $u_i = u_i^*$, если учесть, что принятые здесь граничные условия задачи исключают движение упругого тела как абсолютно твердого тела.

Напомним, что приведенное здесь доказательство о единственности решения имеет силу только в предположении, что все тело, при двух различных решениях, является областью второго рода.

При указанном предположении обозначим через u_i истинное перемещение, через u_i^* — любое геометрически возможное перемещение, а через $\Delta u_i = u_i^* - u_i$ — их разность. Тогда, в силу соотношения (2.1) и формулы преобразования (1.18), можно написать следующее неравенство:

$$\int \Delta W \, dV > \int \frac{\partial W}{\partial e_{pq}} \Delta e_{pq} \, dV = \int F_i \Delta u_i \, dS + \int X_i \Delta u_i \, dV \tag{5.2}$$

Из этого неравенства следует, что при переходе от истинных перемещения к любым другим, допускаемым связями, приращение потенциальной энергии деформации становится больше работы, совершаемой заданными поверхностными и объемными силами. Отсюда можно заключить, что деформированное под действием заданных поверхностных и объемных сил тело только при истинных перемещениях будет находиться в устойчивом равновесии.

Этот естественный вывод находится в полном соответствии с общими положениями механики сплошной среды.

Таким образом, изложенное в настоящем пункте еще раз (на этот раз для разномодульного тела) подтверждает оценку Р. Хилла о значении понятия выпуклой функции.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 11 II 1972

Ա. Ա. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

ՏԱՐԱՄՈԴՈՒԼ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԽՆԴՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՄԻԱԿՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Ցույց է տրված, որ դեֆորմացիայի պոտենցիալ էներգիան հանդիսանում է ուռուցիկ ֆունկցիա իր արգումենտների (դեֆորմացիայի կոմպոնենտների) նկատմամբ։ Հիմնվելով դրա վրա ապացուցված է տարամոդուլ առաձգականության տեսության խնդրի լուծման միակությունը այն ենթադրությամբ, որ դիտարկվող մարմնի ամբողջ ծավալում գլխավոր լարումներից մեկի նշանը տարբերվում է մյուս երկուսի նշանից։

ON THE UNIQUE SOLUTION OF THE PROBLEM IN THE HETEROMODULUS THEORY OF ELASTICITY

A. A. KHACHATRIAN

Summary

The specific potential energy of deformation of an elastic heteromodulus body is shown to be a convex function of its arguments. The unique solution of the problem in the heteromodulus theory of elasticity is proved on the basis of the above.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хилл Р.* Новые горизонты в механике твердых тел. Сб. Механика, ИЛ, № 4, 1957.
2. *Хилл Р.* О единственности и устойчивости в теории конечных упругих деформаций. Сб. Механика, ИЛ, № 3, 1958.
3. *Гольденблат И. И.* Нелинейные проблемы теории упругости. Изд. „Наука", М., 1969.
4. *Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А.* Основные уравнения теории упругости для материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию. Инж. ж. МТТ, № 2, 1966.
5. *Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А.* К разномодульной теории упругости. Инж. ж. МТТ, № 6, 1966.
6. *Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А.* К вопросу теории упругости разномодульного материала. Докл. АН Арм. ССР, т. XVIII, 4, 1969.
7. *Ambartsumian S. A.* Equations of the theory of thermal stresses in double-modulus materials. Proc. of the IUTAM Symposium East Kilbride, June 25—28, 1968.