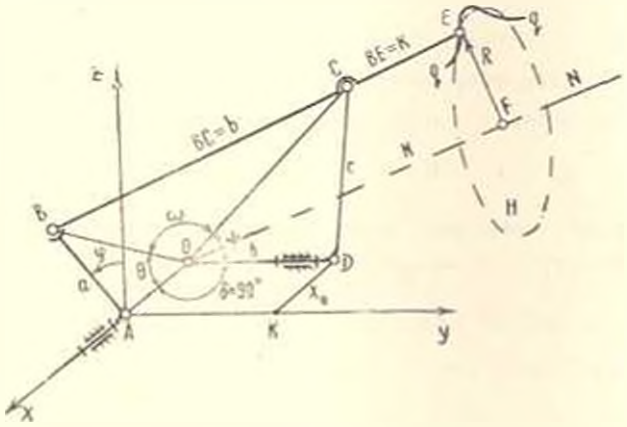
ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXV, № 5, 1972 Механика

Ю. А. САРКИСЯН, Г. А. САРКИСЯН

СИНТЕЗ СФЕРИЧЕСКОГО КРУГОВОГО НАПРАВЛЯЮЩЕГО ЧЕТЫРЕХЗВЕННИКА ПРИ ЗАДАННОМ ЗНАЧЕНИИ ВХОДНОГО УГЛА

Пространственные направляющие механизмы находят растущее применение в современных машинах-автоматах, системах ориентации, автомобильных подвесках, биомеханических устройствах и т. д. Однако, только недавно некоторые исследователи обратили внимание на большие возможности применения пространственных направляющих механизмов в качестве генераторов периодического движения [1], [2], [3]. В работе [4] предложен аналитический метод синтеза сферического четырехзвенника по заданной траектории точки шатуна. В настоящей статье этот метод применяется к задаче проектирования сферического кругового направляющего четырехзвенника при заданном значении угла поворота ведущего кривошипа, соответствующем окружному участку шатунной кривой. Присоединяя к данному четырехзвеннику пространственную двухповодковую группу, можно получить шестизвенный механизм с заданной продолжительностью выстоя ведомого звена.



Фиг. 1

Постановка задачи и анализ исходного четырехзвенника. Рассматриваемая задача формулируется следующим образом. Даны размеры сферического четырехзвенника $ABCD$ и требуется найти на продольной оси шатуна точку, траектория которой при повороте не-

дущего звена на заданный угол мало отличается от окружности (фиг. 1).

Для простоты совместим ось вращения звена AB исходного четырехзвенника с осью абсцисс, поместим точку A в начале координат, а ось вращения звена CD расположим в координатной плоскости xoy, направляя ее параллельно оси ординат. Все точки оси шатуна описывают шатунные кривые, лежащие на сферах с общим центром 0. Но для того, чтобы сферическая траектория qq точки E мало отличалась от окружности, точки ее должны располагаться достаточно близко к некоторой плоскости H. Расстояние точки E от этой плоскости определяется следующим выражением:

$$\delta = \frac{Mx_E + Ny_E + Lz_E + 1}{\pm\sqrt{M^2 + N^2 + L^2}} \tag{1}$$

где M, N, L—коэффициенты уравнения плоскости в отрезках. Следовательно, величину $BE = b$, определяющую положение искомой точки E на оси шатуна и коэффициенты M, N, L необходимо определить из условий минимума отклонения δ.

Принимая обозначения

$$\lambda = \frac{k}{b}, \quad x' = x_C - x_B, \quad y' = y_C - y_B, \quad z' = z_C - z_B \tag{2}$$

координаты точки E можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} x_E &= x_B + \lambda x' \\ y_E &= y_B + \lambda y' \\ z_E &= z_B + \lambda z' \end{aligned} \tag{3}$$

Чтобы связать координаты x_E, y_E, z_E со входным углом φ, следует выразить через φ координаты точек B и C. Из фиг. 1 следует:

$$x_B = x_A = 0, \quad y_B = -a\sin\varphi, \quad z_B = a\cos\varphi \tag{4}$$

Подставляя в условие постоянства расстояния BC соотношения (4) и обозначая $y_C = h$, получаем:

$$x_C^2 + (h + a\sin\varphi)^2 + (z_C - a\cos\varphi)^2 = b^2 \tag{5}$$

В соответствии с фиг. 1 имеем

$$z_C = \pm\sqrt{c^2 - (x_C - x_0)^2} \tag{6}$$

Преобразуя выражение (5) с учетом формулы (6), получаем квадратное уравнение относительно x_C, решение которого имеет вид

$$x_C = \frac{-V \pm \sqrt{V^2 - 4WQ}}{2W} \tag{7}$$

где

$$W = x_0^2 + a^2\cos^2\varphi$$

$$V = x_0(e - 2a^2\cos\varphi)$$

$$Q = \frac{e^2}{4} + (x_0^2 - c^2)\,a^2\cos^2\varphi$$

а

$$e = (h + a\sin\varphi)^2 + a^2\cos^2\varphi + c^2 - b^2 - x_0^2$$

Таким образом, при заданном значении φ координаты искомой точки E выражаются в виде известных линейных функций (3) от неизвестного параметра λ.

Вычисление неизвестных параметров. Для минимизации в заданном интервале переменного расстояния λ целесообразно применять метод квадратического приближения. При этом неизвестные параметры находятся из условия минимума суммы

$$S = \sum_{i=0}^{m} \delta_i^2 = G\sum_{i=0}^{m}[Mf_0(x_i) + Nf_1(x_i) + Lf_2(x_i) + f_3(x_i)]^2 \qquad (8)$$

где приняты обозначения

$$G = \frac{1}{M^2 + N^2 + L^2},\quad f_0(x_i) = x_{C_i},\quad f_1(x_i) = y_{C_i},\quad f_2(x_i) = z_{C_i},\quad f_3(x_i) = 1 \qquad (9)$$

а $m+1$ — число выбранных положений в заданном интервале $[\varphi_0, \varphi_m]$ входного угла.

Необходимые условия минимума суммы (8) сводятся к уравнениям

$$\frac{\partial S}{\partial M} = 0,\quad \frac{\partial S}{\partial N} = 0,\quad \frac{\partial S}{\partial L} = 0,\quad \frac{\partial S}{\partial \lambda} = 0 \qquad (10)$$

Последнее из условий (10) с учетом соотношений (3) принимает вид

$$\sum_{i=0}^{m}(Mx_i' + Ny_i' + Lz_i')\,\delta_i =$$

$$= \sum_{i=0}^{m}(Mx_i' + Ny_i' + Lz_i')(Mx_{C_i} + Ny_{C_i} + Lz_{C_i} + 1) = 0$$

Если первый множитель под знаком суммы в интервале приближения $[\varphi_0, \varphi_m]$ не меняет знака, то на основании теоремы о среднем значении получаем

$$(Mx_k' + Ny_k' + Lz_k')\sum_{i=0}^{m}(Mx_{C_i} + Ny_{C_i} + Lz_{C_i} + 1) = 0,$$

где $0 \leqslant k \leqslant m$.

Отсюда следует

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda} = \sum_{i=0}^{m}\delta_i = \sum_{i=0}^{m}(Mx_{C_i} + Ny_{C_i} + Lz_{C_i} + 1) = 0 \qquad (11)$$

Как показывает анализ, величина $Mx_i + Ny_i + Lz_i$, пропорциональная косинусу угла между отрезком BC и нормалью к плоскости движения звена CD, обычно сохраняет знак при повороте ведущего звена на заданный угол. Поэтому принимая в некотором приближении равенство (11) и учитывая выражения (8), (9), условия (10) можно свести к следующей линейной системе:

$$\begin{aligned} Ma_{00} + Na_{01} + La_{02} + a_{03} &= 0 \\ Ma_{10} + Na_{11} + La_{12} + a_{13} &= 0 \\ Ma_{20} + Na_{21} + La_{22} + a_{23} &= 0 \\ Ma_{30} + Na_{31} + La_{32} + a_{33} &= 0 \end{aligned} \tag{12}$$

где

$$a_{kl} = \sum_{i=0}^{m} f_k(x_i) f_l(x_i) \qquad \begin{matrix} k = 0, 1, 2, 3 \\ l = 0, 1, 2, 3 \end{matrix} \tag{13}$$

Система (10) совместна, если детерминант ее расширенной матрицы равен нулю. Учитывая выражения (3), (9), (11), это уравнение можно преобразовать к виду

$$\begin{vmatrix} A_0\lambda^3 + 0 & A_0\lambda^2 + A_5\lambda - 0 & A_{10}\lambda^3 + A_6\lambda + 0 & A_6\lambda + 0 \\ A_5\lambda^3 + A_1\lambda & A_{11}\lambda^3 + 2A_{15}\lambda^2 + A_6 & A_{15}\lambda^3 + A_{16}\lambda^2 + A_7 & A_{16}\lambda^2 + A_7 \\ A_{10}\lambda^3 + A_6\lambda & A_{15}\lambda^3 + A_{16}\lambda^2 + A_7 & A_{12}\lambda^3 + 2A_{15}\lambda^2 + A_8 & A_{16}\lambda + A_8 \\ 0 + A_8\lambda & 0 + A_{16}\lambda^2 + A_7 & 0 + A_{16}\lambda^2 + A_8 & 0 + A_{10} \end{vmatrix} = 0 \tag{14}$$

где

$$\begin{aligned} A_0 &= \sum_{i=0}^{m} y_{B_i}^2, & A_1 &= \sum_{i=0}^{m} y_{B_i}, & A_2 &= \sum_{i=0}^{m} y_{B_i} z_{B_i}, & A_3 &= \sum_{i=0}^{m} z_{B_i}^2, \\ A_4 &= \sum_{i=0}^{m} z_{B_i}, & A_5 &= \sum_{i=0}^{m} x_i y_{B_i}, & A_6 &= \sum_{i=0}^{m} x_i z_{B_i}, & A_7 &= \sum_{i=0}^{m} x_i^2, \\ A_8 &= \sum_{i=0}^{m} x_i, & A_9 &= \sum_{i=0}^{m} x_i y_i, & A_{10} &= \sum_{i=0}^{m} x_i z_i, & A_{11} &= \sum_{i=0}^{m} y_i^2 \\ A_{12} &= \sum_{i=0}^{m} y_i, & A_{13} &= \sum_{i=0}^{m} z_i^2, & A_{14} &= \sum_{i=0}^{m} z_i, & A_{15} &= \sum_{i=0}^{m} y_i z_i \\ A_{16} &= \sum_{i=0}^{m} (z_{B_i} y_i + y_{B_i} z_i), & A_{17} &= \sum_{i=0}^{m} y_{B_i} y_i, & A_{18} &= \sum_{i=0}^{m} z_{B_i} z_i, & A_{19} &= m + 1 \end{aligned} \tag{15}$$

Прежде чем перейти к преобразованиям, обозначим через D_{ijkl} детерминант, образованный из известных коэффициентов i-ых слагаемых первого, j-ых слагаемых второго, k-ых слагаемых третьего и l-ых слагаемых четвертого столбцов детерминанта (14), причем $i = 1, 2;$

$j = 1, 2, 3$; $k = 1, 2, 3$; $l = 1, 2$. Определитель (14) можно представить в виде суммы двух новых определителей по первому столбцу. Многократно повторяя эту операцию относительно новых определителей и далее группируя полученное выражение по степеням λ, получаем

$$B_7\lambda^7 + B_6\lambda^6 + B_5\lambda^5 + B_4\lambda^4 + B_3\lambda^3 + B_2\lambda^2 + B_1\lambda = 0 \qquad (16)$$

где

$$B_7 = D_{1111}, \quad B_6 = D_{1112} + D_{1121} + D_{1211}, \quad B_5 = D_{1122} + D_{1131} + D_{1212} + D_{1221} + D_{1311} + D_{2112} + D_{2121} + D_{2211}, \quad B_4 = D_{1123} + D_{1132} + D_{1231} + D_{1213} + D_{1321} + D_{2113} + D_{2131} + D_{2311} + D_{2221}, \quad B_3 = D_{1133} + D_{1223} + D_{1331} + D_{2123} + D_{2132} + D_{2231} + D_{2312} + D_{2321} + D_{3112} + D_{3121} + D_{3211}, \quad B_2 = D_{1233} + D_{2233} + D_{3223} + D_{3232}, \quad B_1 = D_{2332} \qquad (17)$$

Так как коэффициенты B_2 и B_1 равны нулю, равенство (16) принимает вид

$$B_7\lambda^4 + B_6\lambda^3 + B_5\lambda^2 + B_4\lambda + B_3 = 0 \qquad (18)$$

Таким образом, условие совместности системы (12) сводится к уравнению четвертой степени (18). Для действительных корней этого уравнения по соотношениям, входящим в левую часть равенства (14), вычисляем коэффициенты a_{ij} системы (12). Неизвестные M, N, L находим по любым трем уравнениям системы (12). Четвертое уравнение в силу равенства (18) удовлетворяется тождественно.

Точку D находим как проекцию точки пересечения 0 осей вращательных пар на найденную плоскость H. С этой целью решаем уравнение прямой, проходящей через 0 и перпендикулярной к плоскости H, с уравнением этой плоскости

$$\frac{x - x_0}{M} = \frac{y}{N} = \frac{z}{L}$$
$$Mx + Ny + Lz + 1 = 0 \qquad (19)$$

Решая систему (19) относительно x, y, z, получаем

$$x_D = x_0 + Mt, \quad y_D = Nt, \quad z_D = Lt \qquad (20)$$

где

$$t = -\frac{(1 + Mx_0)}{M^2 + N^2 + L^2}$$

Направляющие косинусы оси вращения звена CD равны

$$\cos\alpha = \mu M, \quad \cos\beta = \mu N, \quad \cos\gamma = \mu L \qquad (21)$$

где μ — нормирующий множитель

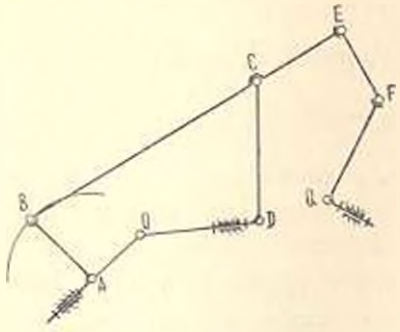
$$\mu = -\frac{1}{\sqrt{M^2 + N^2 + L^2}}$$

Длину звена EF находим по одному из выражений

$$R_i = \sqrt{(x_{E_i} - x_F)^2 + (y_{E_i} - y_F)^2 + (z_{E_i} - z_F)^2} \quad i = 1, 2, \cdots, m \tag{22}$$

Величину отклонения шатунной кривой точки E от окружности подсчитываем по формуле (1).

Дополнительные условия синтеза. Для образования механизма с остановкой к найденному круговому направляющему четырехзвеннику присоединяется двухповодковая группа EFQ с двумя сферическими и одной вращательной парами (фиг. 2). При повороте звена AB на угол $\varphi_m - \varphi_0$ точка F, очевидно, остается неподвижной, обеспечивая требуемый выстой рычага FG.



Фиг. 2

К исходному четырехзвеннику $ABCD$ предъявляются некоторые конструктивные требования. Согласно первому из них размеры a, b, c, x_0, h должны быть выбраны так, чтобы обеспечить возможность полного поворота ведущего звена AB. Анализируя обобщенную теорему Грасгофа [5] для рассматриваемого нами частного случая сферического четырехзвенника, получаем следующие условия существования кривошипа AB:

$$\begin{gathered} \gamma_{\min} \neq \omega \\ \gamma_{\min} \leqslant \frac{\theta + \omega + \psi}{2} - \frac{\pi}{4} \end{gathered} \tag{23}$$

где $\gamma_{\min}$ — минимальный из углов θ, ψ, ω.

Формулы для определения межосевых углов θ, ψ, ω непосредственно следуют из фиг. 1

$$\begin{aligned} \theta &= \arccos \frac{x_0}{\sqrt{a^2 + x_0^2}} \\ \psi &= \arccos \frac{b}{\sqrt{c^2 + b^2}} \end{aligned} \tag{24}$$

$$\omega = \arccos \left| \frac{a^2 + x_0^2 + h^2 + c^2 - k^2}{2\sqrt{(h^2 + c^2)(a^2 + x_0^2)}} \right| \tag{24}$$

Легко видеть, что выражениями (24) определяются острые межосевые углы, входящие в условия (23).

Исходя из соображений конструктивного оформления и размещения механизма, будем требовать, чтобы длины звеньев были подобраны в определенных пределах

$$\begin{gathered} k_1 \leqslant a \leqslant k_1', \quad -k_2 \leqslant x_0 \leqslant k_2', \quad k_3 \leqslant c \leqslant k_3' \\ -k_4 \leqslant h \leqslant k_4', \qquad k_5 \leqslant b \leqslant k_5', \quad k_6 \leqslant R \leqslant k_6' \end{gathered} \tag{25}$$

Если первые пять неравенств учитываются при выборе размеров исходного четырехзвенника, то последнее неравенство проверяется уже после синтеза. Значения корней уравнения (18) $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$ ведут к тривиальным механизмам, поскольку при этом чертящая точка E совпадает соответственно с точками B и C. Следовательно, чтобы получить конструктивно приемлемый механизм, точка E не должна располагаться в окрестности точек B и C. Это условие выражается неравенствами

$$-k_0 \leqslant \lambda \leqslant -\Delta, \quad \Delta \leqslant \lambda \leqslant 1 - \Delta, \quad 1 + \Delta \leqslant \lambda \leqslant k_0 \tag{26}$$

где $-k_0$, k_0 — предельные значения параметра λ, а Δ — величина, определяющая недопустимые зоны на оси шатуна.

Наконец, для обеспечения требуемой точности выстоя ведомого звена FG шестизвенника накладывается следующее ограничение:

$$\delta_{max} \leqslant \delta_{доп}. \tag{27}$$

где δ_{max} — максимальное отклонение приближающей шатунной кривой qq от окружности, а $\delta_{доп}$ — допускаемое значение отклонения δ.

На основе полученных уравнений для машины „Раздан—2" составлена универсальная программа синтеза сферического кругового направляющего механизма по заданному значению входного угла при наложенных ограничениях (23—27). В настоящее время ведется работа по разработке справочных данных.

Примеры.

1. Проектировать сферический четырехзвенник, воспроизводящий при повороте ведущего звена от $\varphi_0 = 210°$ до $\varphi_m = 270°$ дугу окружности при условии, что отклонение δ не должно превышать величину $\delta_{доп.} = \pm 0.001$.

Размеры исходного четырехзвенника $ABCD$, полученные варьированием в соответствии с условиями (23), (24), равны

$$x_0 = 0.5, \quad h = 0.45, \quad c = 1.2, \quad a = 0.25, \quad b = 1.4$$

Значения координат x_{C_i} вычисляются при отрицательном знаке перед корнем в выражении (7), причем число выбранных положений в интервале $[\varphi_0, \varphi_m]$ равно 21.

В данном примере уравнение (18) имеет следующие действительные корни:

$$\lambda_1 = 0.2377346, \qquad \lambda_2 = 0.222063$$

После решения системы (12) по формулам (20—22) находятся соответственно при λ_1 и λ_2 следующие параметры присоединяемого звена EF:

$$x_F = 0.2019831, \quad y_F = -0.036105, \quad z_F = 0.266386, \quad R = 0.33515$$

$$x_{F'} = 0.18425, \quad y_{F'} = -0.028742, \quad z_{F'} = 0.266386, \quad R' = 0.32201$$

Величины неувязки неиспользованного четвертого уравнения совместной системы (12) при λ_1 и λ_2 соответственно равны

$$\varepsilon = 0.000011, \qquad \varepsilon' = 0.000065$$

Максимальные значения отклонений δ_i, подсчитанных по формуле (1), равны

$$\delta_{max} = 0.000151, \qquad \delta'_{max} = 0.000149$$

2. Проектировать сферический круговой направляющий механизм, если задан следующий интервал приближения: $\varphi_0 = 210^\circ$, $\varphi_m = 300^\circ$.

Искомый механизм получен при следующих размерах исходного четырехзвенника:

$$x_0 = -0.2, \quad h = 0.25, \quad c = 0.45, \quad a = 0.55, \quad k = 0.7$$

Только один из корней уравнения (18) $\lambda = -0.502648$ приводит к конструктивно приемлемому механизму. Размеры присоединяемого звена равны

$$x_F = 0.318654, \quad y_F = -0.00032, \quad z_F = -0.00207, \quad c = 0.6981.$$

Анализ отклонений δ показывает, что механизм обеспечивает достаточную точность воспроизведения окружности, причем $\delta_{max} = 0.00201$.

Ереванский политехнический институт

Поступила 25 VI 1971

ՅՈՒ. Լ. ՍԱՐԳՍՅԱՆ, Գ. Ա. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

ՍՖԵՐԻԿ ՇՐՋԱՆԱԳԾԱՅԻՆ ՈՒՂՂՈՐԴ ՔԱՌՕՂԱԿԻ ՍԻՆԹԵԶԸ ՄՈՒՏՔԻ ԱՆԿՅԱՆ ՏՐՎԱԾ ԱՐԺԵՔԻ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ամփոփում

Հոդվածը նվիրված է այնպիսի սֆերիկ քառօղակի սինթեզին, որի շարժաթևի երկայնական առանցքի որոշակի կետի հետագիծը տանող օղակի տվյալ պտույտի ընթացքում մոտենում է շրջանագծի։

Որոնելի չափերը որոշվում են պտտագծող կետի շրջանագծից շեղման միջին քառակուսային մեծության մինիմումի պայմաններից։ Սինթեզի ընթաց-

քում հաշվի են առնվում որոշ կոնստրուկտիվ սահմանափակող պայմաններ, որոնք ներկայացվում են անհավասարությունների տեսքով։ «Հրազդան—2» հաշվիչ մեքենայի վրա կատարված հաշվարկները ցույց են տվել մոտարկման բարձր ճշտություն։

SYNTHESIS OF A SPHERICAL FOUR-BAR CIRCLE-GENERATING MECHANISM WITH A GIVEN VALUE OF THE INPUT ANGLE

Y. L. SARKISYAN, G. A SARKISSIAN

Summary

The paper considers the problem of synthesis of a spherical four-bar linkage compelling the point on the axis of the connecting rod to move approximately in a circle while the driving link turns through a given angle. The sought-for parameters are found from the conditions for a minimum of the mean-square sum of the deviation from the circle. When synthesizing the mechanism some inequality-constraints are also imposed. The calculations carried out on the „Razdan—2" computer show a high accuracy of approximation.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hunt K. H.* Dwell-linkages in Space. „Engineering", vol. 187, № 4859, 1959.
2. *Росс Б.* Теория конечных положений и применении к синтезу механизмов. Прикладная механика, № 4, 1967.
3. *Монашко Н. Т.* К синтезу пространственного рычажного механизма с остановкой. Республиканский межведомственный научно-технический сборник „Теория механизмов и машин". Изд-во Харьковского ун-та, вып. 8, 1970.
4. *Саркисян Ю. Л.* Синтез сферического четырехзвенника по заданной траектории. Машиноведение, № 5, 1971.
5. *Дудица Ф.* К теореме Грасгофа для четырехзвенных пространственных механизмов. „Анализ и синтез механизмов". Изд-во „Машиностроение", 1969.