ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXV, № 4, 1972 Механика

А. Н. АНДРЕЕВ, Ю. В. НЕМИРОВСКИЙ

О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ ДЕФОРМИРОВАНИЯ УПРУГИХ И ВЯЗКО-УПРУГИХ БЕЗМОМЕНТНЫХ АРМИРОВАННЫХ И ОСЛАБЛЕННЫХ ОБОЛОЧЕК

Особенностью армированных материалов является анизотропия их деформативных свойств. Последнее обстоятельство влечет за собой появление ряда специфических особенностей в напряженном состоянии и характере смещений, возникающих в безмоментных оболочках из таких материалов [1]. Поскольку армированные материалы допускают возможность регулирования анизотропных свойств, то целесообразно исследовать характер особенностей поведения конструкции (при известных свойствах элементов армированного материала) еще до ее реализации с тем, чтобы реализовать наиболее рациональную с точки зрения эксплуатации конструкцию.

В настоящей работе исследованы некоторые специфические особенности характера деформирования армированных безмоментных оболочек, когда элементы композитного материала обладают упругими и вязко-упругими свойствами.

1. В качестве модели армированного материала используется модель, предложенная в [2, 3]. Тогда усилия T_{ij} в рассматриваемой безмоментной оболочке связаны с напряжениями $\sigma_{(n)}$ в арматурных элементах и напряжениями σ^0_{ij}, $\sigma^0_{(n)}$ в связующем следующими зависимостями:

$$T_{ij} = a\sigma^0_{ij} + \sum_{n=1}^{N} (\omega_n \sigma_{(n)} + \omega'_n \sigma^0_{(n)})\, l_{in} l_{jn} \quad (i,\ j = 1,\ 2) \tag{1.1}$$

$$\omega'_n = \delta_n - \omega_n, \quad a = h - \omega_*, \quad \omega_* = \sum_{n=1}^{N} \delta_n$$

$$l_{1n} = \cos\alpha_n, \quad l_{2n} = \sin\alpha_n, \quad 0 \leqslant \alpha_n \leqslant \pi$$

Здесь δ_n—толщина арматурного слоя, содержащего семейство армирующих элементов с номером n, ω_n—интенсивность армирования в этом слое, α_n—угол между касательной к арматуре семейства n и направлением x_1 ортогональной системы координат x_1, x_2, x_3, связанной с оболочкой, h—толщина оболочки, N—общее число семейств армирующих элементов.

Предполагая, что проскальзывание между арматурой и связующим отсутствует, получим следующие зависимости между деформациями $\varepsilon_{(n)}$ армирующих элементов, деформациями $\varepsilon^0_{(n)}$ прослоек связующего в пределах арматурного слоя и деформациями ε_{ij} связующего

$$\varepsilon^0_{(n)} = \varepsilon_{(n)} = \varepsilon_{11} l^2_{1n} + \varepsilon_{22} l^2_{2n} + 2\varepsilon_{12} l_{1n} l_{2n} \tag{1.2}$$

Допустим, что все материалы композиции в общем случае обладают вязко-упругими свойствами и в пределах каждого арматурного слоя ведут себя как одномерные элементы. Тогда зависимости между напряжениями и деформациями в связующем материале и в армирующих элементах имеют вид [4]

$$\sigma^0_{ii} = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\varepsilon_i - \int_0^t \Gamma^0_i(t-\tau)\,\varepsilon_i(\tau)\,d\tau\right] + \frac{\nu E}{1-\nu^2}\left[\varepsilon_j - \int_0^t \Gamma^0_j(t-\tau)\,\varepsilon_j(\tau)\,d\tau\right] \tag{1.3}$$

$$(i,\ j = 1,\ 2,\quad i \neq j)$$

$$\sigma^0_{12} = 2G\left[\varepsilon_{12} - \int_0^t \Gamma^0_3(t-\tau)\,\varepsilon_{12}(\tau)\,d\tau\right]$$

$$\sigma_{(n)} = E_n\left[\varepsilon_{(n)} - \int_0^t \Gamma_{(n)}(t-\tau)\,\varepsilon_{(n)}(\tau)\,d\tau\right] \tag{1.4}$$

$$\sigma^0_{(n)} = E^0_n\left[\varepsilon_{(n)} - \int_0^t \Gamma^0_{(n)}(t-\tau)\,\varepsilon_{(n)}(\tau)\,d\tau\right]$$

Здесь E, G, ν — модули Юнга, сдвига и коэффициент Пуассона материала связующего; E_n — модули Юнга материалов армирующих элементов; $E^0_n = E$, когда жесткость связующего имеет тот же порядок, что и жесткость армирующих элементов или выше; $E^0_n = 0$, когда жесткость связующего в пределах арматурного слоя намного меньше жесткости армирующих элементов. Ядра релаксации Γ^0_i, Γ^0_3, $\Gamma_{(n)}$, $\Gamma^0_{(n)}$ определяются для исходных материалов обычным образом [4].

Подставляя выражения (1.3) и (1.4) в равенства (1.1), получим следующие зависимости между усилиями и деформациями в рассматриваемых безмоментных оболочках

$$T = \|\bar{a}_{km}\|\,\varepsilon,\quad \varepsilon = \|\bar{b}_{km}\|\,T,\quad \|\bar{b}_{km}\| = \|\bar{a}_{km}\|^{-1}$$

$$T = \|T_{11},\ T_{22},\ T_{12}\|',\quad \varepsilon = \|\varepsilon_{11},\ \varepsilon_{22},\ 2\varepsilon_{12}\|',\quad k,\ m = 1,\ 2,\ 3 \tag{1.5}$$

$$\bar{a}_{ii} = \frac{aE}{1-\nu^2}(1-\bar{\Gamma}^0_i) + \sum_{n=1}^{N} \bar{P}_n l^4_{in}$$

$$\tilde{a}_{12} = \bar{a}_{21} = \frac{a\nu E}{1-\nu^2}\left(1-\bar{\Gamma}_2^0\right) + \sum_{n=1}^{N} \bar{P}_n l_{1n}^2 l_{2n}^2$$

$$\bar{a}_{i3} = \bar{a}_{3i} = \sum_{n=1}^{N} \bar{P}_n l_{in}^3 l_{jn} \tag{1.6}$$

$$\tilde{a}_{33} = aG\left(1-\bar{\Gamma}_3^0\right) + \sum_{n=1}^{N} \bar{P}_n l_{1n}^2 l_{2n}^2$$

$$\tilde{P}_n = \omega_n E_n\left(1-\bar{\Gamma}_{(n)}\right) + \omega_n^{*} E_n^0\left(1-\tilde{\Gamma}_{(n)}^0\right)$$

Здесь $\bar{\Gamma}$ — интегральные операторы, такие, что

$$\bar{\Gamma} f = \int_0^t \Gamma(t-\tau) f(\tau)\, d\tau \tag{1.7}$$

штрих при матрице обозначает операцию транспонирования.

Отметим, что, если принять в (1.6) $E_{(n)} = 0$, то соотношения (1.5) будут верны также для оболочек с высверленными непрерывными каналами. Будем называть такие оболочки ослабленными.

Если принять $\bar{\Gamma}_{(n)} \equiv 0$, то уравнения (1.5), (1.6) определяют связь между усилиями и деформациями для армированных оболочек с упругой арматурой и вязко-упругим связующим. При $\bar{\Gamma}_1^0 = \bar{\Gamma}_2^0 = \bar{\Gamma}_3^0 = \tilde{\Gamma}_{(n)}^0 \equiv 0$ получим уравнения для оболочек с упругим заполнителем и вязко-упругой арматурой. И, наконец, при $\bar{\Gamma}_1^0 = \bar{\Gamma}_2^0 = \bar{\Gamma}_3^0 = \bar{\Gamma}_{(n)}^0 = \bar{\Gamma}_{(n)} = 0$ получим уравнения для армированных оболочек из упругого материала.

Уравнения (1.5)—(1.7) в совокупности с (1.2)—(1.4) позволяют не только выяснить характерные особенности деформирования армированных оболочек, но также и ответить на вопрос, какими причинами вызваны эти особенности.

С помощью преобразования Лапласа [4] соотношения (1.5) приведем к виду

$$T = p\,\| a_{km}^{*} \|\, \varepsilon^{*}(p), \quad p\,\varepsilon^{*}(p) = \| b_{km}^{*} \|\, T, \quad \| b_{km}^{*} \| = \| a_{km}^{*} \|^{-1} \tag{1.8}$$

где звездочкой отмечены трансформации соответствующих функций, p — параметр преобразования. Применяя преобразование Лапласа также к уравнениям равновесия и граничным условиям, приведем задачу о вязко-упругих оболочках к упругой задаче для трансформант. При известном решении упругой задачи оригиналы отыскиваются затем путем обращения интеграла Лапласа [4].

2. Рассматривая оболочки вращения, в качестве направлений x_1, x_2, x_3 выберем меридианальное, окружное и нормальное и предположим, что оболочка нагружена симметричными поверхностными и контурными усилиями. Если на каком-либо контуре существует закрепление, то его также считаем симметричным. Тогда [1]

$$T_{ii} = \frac{(-1)^i}{R_j \cos^2\theta}\left[\int_{s_0}^{s} r\,(X_1 \cos\theta + X_3 \sin\theta)\,ds - U_0\right] +$$

$$+ \frac{1+(-1)^i}{2} R_2 X_3, \quad (i,\ j = 1,\ 2;\ i \neq j) \tag{2.1}$$

$$T_{12} = -\frac{1}{R_2^2 \cos^2\theta}\left(\int_{s_0}^{s} r^2 X_2\,ds - V_0\right)$$

$$pu_1^* = \cos\theta\left\{\int_{s_0}^{s}\left[\left(b_{11}^* - 2b_{12}^*\frac{R_2}{R_1} + b_{22}^*\frac{R_2^2}{R_1^2}\right)\frac{R_2}{r}T_{11} +\right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(b_{13}^* - b_{23}^*\frac{R_2}{R_1}\right)\frac{R_2}{r}T_{12} + \left(b_{12}^* - b_{22}^*\frac{R_2}{R_1}\right)\frac{R_2^2}{r}X_3\right]ds\right\} + \varphi_0^*\cos\theta$$

$$pu_2^* = r\left\{\int_{s_0}^{s}\left[\left(b_{13}^* - b_{23}^*\frac{R_2}{R_1}\right)\frac{T_{11}}{r} + b_{33}^*\frac{T_{12}}{r} + b_{23}^*\frac{R_2}{r}X_3\right]ds\right\} + \psi_0^* r$$

$$pu_3^* = \sin\theta\left\{\int_{s_0}^{s}\left[\left(b_{11}^* - 2b_{12}^*\frac{R_2}{R_1} + b_{22}^*\frac{R_2^2}{R_1^2}\right)\frac{R_2}{r}T_{11} +\right.\right. \tag{2.2}$$

$$\left.\left. + \left(b_{13}^* - b_{23}^*\frac{R_2}{R_1}\right)\frac{R_2}{r}T_{12} + \left(b_{12}^* - b_{22}^*\frac{R_2}{R_1}\right)\frac{R_2^2}{r}X_3\right]ds\right\} +$$

$$+ R_2\left[\left(b_{12}^* - b_{22}^*\frac{R_2}{R_1}\right)T_{11} + b_{23}^* T_{12} + b_{22}^* R_2 X_3\right] + \varphi_0^*\sin\theta$$

В этих выражениях $R_i\,(i = 1,\ 2)$ — главные радиусы кривизны поверхности; r — радиус круга в сечении, перпендикулярном к оси вращения; s — длина дуги меридиана; θ — угол между касательной к меридиану и осью вращения оболочки z; $X_1(s)$, $X_3(s)$ — компоненты нагрузки в направлениях x_1, x_3; u_1^*, u_3^* — трансформанты смещений в направлениях x_1, x_3; U_0, V_0, φ_0^*, ψ_0^* — константы интегрирования.

Сравнивая выражения (2.2) с соответствующими выражениями для смещений упругой ортотропной оболочки [1], нетрудно видеть, что армированная оболочка будет деформироваться как ортотропная, если $b_{13}^* = b_{31}^* = b_{23}^* = b_{32}^* = 0$, следовательно, $\bar{a}_{13} = \bar{a}_{31} = \bar{a}_{23} = \bar{a}_{32} = 0$.

Как видно из (1.6), это справедливо, либо когда $l_{1n}=0$, $l_{2n}=0$, то есть арматура расположена в направлении меридиана и параллелей, либо когда расположенная в неглавных направлениях арматура состоит из пар одинаковых семейств нитей, расположенных так, что в каждой точке меридиана нити такой пары отклонены по обе стороны меридиана на одинаковый угол.

В случае $N=2$ для материала связующего с ядром

$$\Gamma(t-\tau)=\frac{\varkappa}{\beta}\exp\left(-\frac{t-\tau}{\beta}\right)$$

при упругом изменении объема и для упругих армирующих элементов коэффициенты $b^{*}_{km}(p)$ равны

$$b^{*}_{km}(p)=\frac{c_{km}(p\beta)^3+d_{km}(p\beta)^2+f_{km}p\beta+g_{km}}{A(p\beta+1-\varkappa)(p\beta-\lambda_1)(p\beta-\lambda_2)};\quad (k,\ m=1,\ 2,\ 3)$$

$$A=aE\left\{aE\left(aE+\sum_{r=1}^{2}\omega_r E_r\right)+\right. \tag{2.3}$$

$$\left.+(1+\nu)\sin^2(\alpha_1-\alpha_2)\left[(1-\nu)\sin^2(\alpha_1-\alpha_2)+2\cos^2(\alpha_1-\alpha_2)\right]\prod_{r=1}^{2}\omega_r E_r\right\}$$

α_1, α_2—соответственно первый и второй углы армирования; λ_1, λ_2—корни многочлена второй степени относительно $(p\beta)$

$$(p\beta)^2+B(p\beta)+C=0$$

$$B=\frac{aE}{A}\left\{aE\left[(2-\varkappa)\sum_{r=1}^{2}\omega_r E_r+2(1-\varkappa)aE\right]+(1+\nu)\sin^2(\alpha_1-\alpha_2)\times\right.$$

$$\left.\times\left[(1-\nu)(a_1+b)\sin^2(\alpha_1-\alpha_2)+2(a_1+1)\cos^2(\alpha_1-\alpha_2)\right]\prod_{r=1}^{2}\omega_r E_r\right\}$$

$$C=\frac{aE}{A}\left\{(1-\varkappa)aE\left[(1-\varkappa)aE+\sum_{r=1}^{2}\omega_r E_r\right]+(1+\nu)\sin^2(\alpha_1-\alpha_2)\times\right.$$

$$\left.\times\left[(1-\nu)a_1 b\sin^2(\alpha_1-\alpha_2)+2a_1\cos^2(\alpha_1-\alpha_2)\right]\prod_{r=1}^{2}\omega_r E_r\right\}$$

Здесь

$$a_1=1+\varkappa\frac{1-2\nu}{2(1+\nu)},\qquad b=1-\frac{\varkappa(1-2\nu)}{2(1-\nu)}$$

$$c_{ii}=(aE)^2+aE(1+\nu)\sum_{r=1}^{2}(m_r+n_{ri})+l_i$$

$$d_{ii}=(3-2\varkappa)(aE)^2+aE(1+\nu)\sum_{r=1}^{2}\left[(a_1+2-\varkappa)m_r+\right.$$

$$+ (a_1 + b + 1 - \varkappa)\, n_{rj} \big] + (2a_1 + b)\, l_j \tag{2.4}$$

$$f_{ii} = (1-\varkappa)(3-\varkappa)(aE)^2 + aE\,(1+\nu) \sum_{r=1}^{2} \big[(1 - \varkappa + a_1 (2-\varkappa))\, m_r +$$

$$+ (a_1 (b + 1 - \varkappa) + b\,(1-\varkappa))\, n_{rj} \big] + a_1 (a_1 + 2b)\, l_j$$

$$g_{ii} = (1-\varkappa)^2 (aE)^2 + aE\,(1+\nu)\, a_1 (1-\varkappa) \sum_{r=1}^{2} (m_r + b n_{rj}) + a_1^2 b l_j$$

$$m_r = 2\omega_r E_r \cos^2 \alpha_r \sin^2 \alpha_r, \quad n_{rj} = (1-\nu)\, \omega_r E_r l_{jr}^4$$

$$l_j = 2\,(1+\nu)(1-\nu^2) \sin^2 (\alpha_1 - \alpha_2) \prod_{r=1}^{2} \omega_r E_r l_{jr}^2 \qquad (i,\ j,\ r = 1,\ 2;\ \ i \neq j)$$

$$c_{33} = (1+\nu) \left\{ 2\,(aE)^2 + aE \sum_{r=1}^{2} (m_{r3} + n_{r3}) + l_3 \right\}$$

$$d_{33} = (1+\nu) \Big\{ 2\,(a_1 + 2 - 2\varkappa)\,(aE)^2 + aE \sum_{r=1}^{2} \big[(a_1 + 2 - \varkappa)\, m_{r3} +$$

$$+ (a_1 + b + 1 - \varkappa)\, n_{r3} \big] + (2a_1 + b)\, l_3 \Big\} \tag{2.5}$$

$$f_{33} = (1+\nu) \Big\{ 2\,(1-\varkappa)(1 - \varkappa + 2a_1)\,(aE)^2 + aE \sum_{r=1}^{2} \big[(1 - \varkappa + a_1 (2-\varkappa))\, m_{r3} +$$

$$+ (b\,(1-\varkappa) + a_1 (b + 1 - \varkappa))\, n_{r3} \big] + a_1 (a_1 + 2b)\, l_3 \Big\}$$

$$g_{33} = (1+\nu) \Big\{ 2a_1 (1-\varkappa)^2 (aE)^2 +$$

$$+ aE a_1 (1-\varkappa) \sum_{r=1}^{2} (m_{r3} + b n_{r3}) + a_1^2 b l_3 \Big\}$$

$$m_{r3} = 2\omega_r E_r \cos^2 2\alpha_r, \quad n_{r3} = (1-\nu)\, \omega_r E_r \sin^2 2\alpha_r$$

$$l_3 = 2\,(1-\nu^2) \sin^2 (\alpha_1 - \alpha_2) \sin^2 (\alpha_1 + \alpha_2) \prod_{r=1}^{2} \omega_r E_r$$

$$c_{12} = -\nu\,(aE)^2 - (1+\nu)^2 aE \sum_{r=1}^{2} \omega_r E_r l_{1r}^2 l_{2r}^2 + l \tag{2.6}$$

$$d_{12} = -\left[\frac{\varkappa}{2} + 3\nu\,(1-\varkappa) \right] (aE)^2 -$$

$$-(1+\nu)^2 aE\,(2a_1+1-\varkappa)\sum_{r=1}^{2}\omega_r E_r l_{1r}^2 l_{2r}^2+(2a_1+b)\,l$$

$$f_{12}=-(1-\varkappa)(\varkappa-3\varkappa\nu-3\nu)(aE)^2-$$

$$-(1+\nu)^2 a_1(a_1+2-2\varkappa)\,aE\sum_{r=1}^{2}\omega_r E_r l_{1r}^2 l_{2r}^2+a_1(a_1+2b)\,l$$

$$g_{12}=-(1-\varkappa)^2\left[\nu+\frac{\varkappa(1-2\nu)}{2}\right](aE)^2-$$

$$-(1+\nu)^2(1-\varkappa)\,a_1^2 aE\sum_{r=1}^{2}\omega_r E_r l_{1r}^2 l_{2r}^2+a_1^2 bl$$

$$l=\frac{(1+\nu)(1-\nu^2)}{2}\sin^2(\alpha_1-\alpha_2)\prod_{r=1}^{2}\omega_r E_r\sin 2\alpha_r$$

$$c_{i3}=(1+\nu)\left\{aE\left[\sum_{r=1}^{2}\omega_r E_r\left((-1)^i\frac{\sin 4\alpha_r}{2}-(1-\nu)\sin 2\alpha_r l_{jr}^2\right)\right]-f_j\right\}$$

$$d_{i3}=(1+\nu)\left\{aE\left[\sum_{r=1}^{2}\omega_r E_r\left((-1)^i\frac{a_1+2-\varkappa}{2}\sin 4\alpha_r-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-(1-\nu)(a_1+b+1-\varkappa)\sin 2\alpha_r l_{jr}^2\right)\right]-(2a_1+b)f_j\right\}$$

$$f_{i3}=(1+\nu)\left\{aE\left[\sum_{r=1}^{2}\omega_r E_r\left((-1)^i\frac{1-\varkappa+a_1(2-\varkappa)}{2}\sin 4\alpha_r-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-(1-\nu)[a_1(b+1-\varkappa)+b(1-\varkappa)]\sin 2\alpha_r l_{jr}^2\right)\right]-a_1(a_1+2b)f_j\right\}$$

$$g_{i3}=(1+\nu)\left\{aEa_1(1-\varkappa)\left[\sum_{r=1}^{2}\omega_r E_r\left((-1)^i\frac{\sin 4\alpha_r}{2}-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-(1-\nu)\,b\sin 2\alpha_r l_{jr}^2\right)\right]-a_1^2 bf_j\right\}$$

$$f_j=2(1-\nu^2)\sin^2(\alpha_1-\alpha_2)\sin(\alpha_1+\alpha_2)\prod_{r=1}^{2}\omega_r E_r l_{jr}$$

$$i,\ j,\ r=1,\ 2;\quad i\neq j$$

Здесь при вычислениях для простоты было принято $E_i^0=0$, то есть прослойки связующего в пределах арматурного слоя не принимались во внимание.

В случае $N=1$ соответствующие выражения для $b^{*}_{km}(p)$ получим из (2.3)—(2.7), принимая $\omega_2 E_2 = 0$.

Чтобы определить далее зависимость перемещений u, v, w от времени, необходимо воспользоваться, учитывая выражение (2.3)—(2.7), обратным преобразованием Лапласа.

3. Рассмотрим теперь некоторые простые конкретные примеры, чтобы исследовать особенности деформирования армированных оболочек.

Пусть замкнутая цилиндрическая оболочка радиуса R при $N=1$ нагружена равномерно распределенным по поверхности внешним давлением интенсивности q. Причем один из торцов ее закреплен, а другой свободен. Тогда после интегрирования (2.1), (2.2) с учетом краевых условий

$$u|_{s=s_0=0} = v|_{s=s_0=0} = 0$$

$$T_{12}|_{s=L} = T_{12}|_{s=L} = 0$$

и вычисления оригиналов искомых функций получим

$$T_{11} = T_{12} = 0, \qquad T_{22} = Rq$$

$$u = F_{12}(t)\, Rqs, \quad v = F_{21}(t)\, Rqs, \quad w = F_{22}(t)\, R^2 q \tag{3.1}$$

где

$$F_{km}(t) = \frac{g_{km}}{A(1-\varkappa)\lambda_1\lambda_2} +$$

$$+ \frac{c_{km}(\varkappa-1)^3 + d_{km}(\varkappa-1)^2 + f_{km}(\varkappa-1) + g_{km}}{A(\varkappa-1)(\varkappa-1-\lambda_1)(\varkappa-1-\lambda_2)}\, e^{\frac{\varkappa-1}{\beta}t} +$$

$$+ \frac{c_{km}\lambda_1^3 + d_{km}\lambda_1^2 + f_{km}\lambda_1 + g_{km}}{A\lambda_1(\lambda_1-\varkappa+1)(\lambda_1-\lambda_2)}\, e^{\frac{\lambda_1}{\beta}t} +$$

$$+ \frac{c_{km}\lambda_2^3 + d_{km}\lambda_2^2 + f_{km}\lambda_2 + g_{km}}{A\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\varkappa+1)}\, e^{\frac{\lambda_2}{\beta}t} \tag{3.2}$$

При $t=0$ и $t\to\infty$ из (3.1), (3.2) имеем соответственно

$$u = -\frac{qR}{aE}\,\frac{aE\nu + (1+\nu)^2\omega_1 E_1 \cos^2\alpha \sin^2\alpha}{\omega_1 E_1 + aE}\, s$$

$$v = \frac{qR(1+\nu)\,\omega_1 E_1}{aE(aE+\omega_1 E_1)}\, v_0 s \tag{3.3}$$

$$w = \frac{R^2 q}{aE}\,\frac{aE + (1+\nu)\,\omega_1 E_1[2\cos^2\alpha\sin^2\alpha + (1-\nu)\cos^4\alpha]}{\omega_1 E_1 + aE}$$

$$v_0 = \sin 2\alpha\,(\nu\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$$

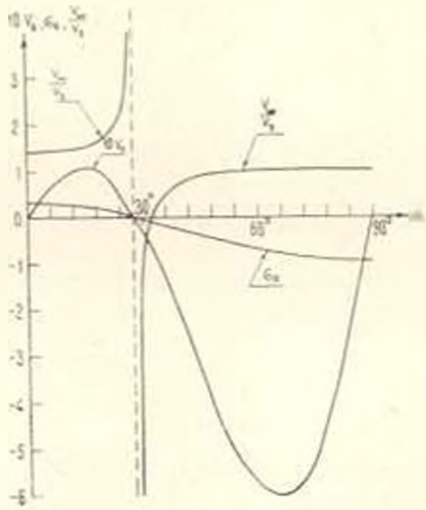
$$u = -\frac{qR}{aE}\,\frac{aE(1-x)[b(1-\nu)-1]+a_1\omega_1 E_1[b(1-\nu)-2]\cos^2\alpha\sin^2\alpha}{(1-x)[\omega_1 E_1+aE(1-x)]}\,s$$

$$v = \frac{qR(1+\nu)\omega_1 E_1 a_1}{aE(1-x)[\omega_1 E_1+aE(1-x)]}\,v_0\,s \qquad (3.4)$$

$$w = \frac{R^2 q}{aE}\,\frac{aE(1-x)+a_1(1+\nu)\omega_1 E_1\cos^2\alpha[2\sin^2\alpha+b(1-\nu)\cos^2\alpha]}{(1-x)[\omega_1 E_1+aE(1-x)]}$$

$$v_0 = \sin 2\alpha[\cos 2\alpha-(1-\nu)b\cos^2\alpha]$$

На фиг. 1 приведена зависимость величины v_0 от угла армирования α при значениях параметров $\nu = 0.3$, $\frac{aE}{\omega_1 E_1} = 0.5$. Из этих графиков и из выражений (3.3) видно, например, что $\varepsilon|_{t=0} = 0$ не только при $\alpha = 0$, $\frac{\pi}{2}$ или $\omega_1 E_1 = 0$, но также и при $\alpha = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\nu}$. Причем в последнем случае получаем наибольшее смещение w. Пользуясь выражением



Фиг. 1

(1.2), получим следующее значение для напряжения в арматуре при $t = 0$

$$\sigma = E_1\varepsilon = -\frac{E_1 qR}{\omega_1 E_1+aE}(\nu\cos^2\alpha-\sin^2\alpha) = -\frac{E_1 qR}{\omega_1 E_1+aE}\,\sigma_0 \qquad (3.5)$$

График зависимости σ_0 от α изображен на фиг. 1. Как видно из этого графика и из выражения (3.5), при значении угла армирования, равном $\alpha = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\nu}$, напряжение в арматуре равно нулю. И оболочка в этом случае ведет себя, как изотропная.

Обращаясь к выражениям (1.6), нетрудно видеть, что в случае ослабленных упругих оболочек получим те же выражения (3.3) и (3.5).

для смещений и напряжений в перегородках, если $\omega_1 E_1$ заменить на $\omega_1' E$.

На фиг. 1 приведен также график зависимости величины $\frac{v_\infty}{v_0}$ от угла армирования α, который наглядно показывает, что с течением времени происходит перераспределение напряжений между элементами армированной оболочки. В результате, как видно из выражения (3.4), при $t \to \infty$ напряжение в арматуре отсутствует, когда

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\nu + \frac{\varkappa(1-2\nu)}{2}}$$

Если замкнутая круговая цилиндрическая оболочка при $N = 1$ на одном из торцов $s_0 = 0$ закреплена полностью, а другое торцевое сечение $s = L$ несет равномерно распределенное сдвигающее усилие интенсивностью T_3^*, то пользуясь граничными условиями

$$u|_{s=0} = v|_{s=0} = 0, \qquad T_{11}|_{s=L} = 0, \qquad T_{12}|_{s=L} = T_3^*$$

и полагая $q_1 = q_2 = q_3 = 0$, из (2.1)–(2.3), (3.2) получим

$$u = F_{13}(t)\, T_3^* s, \quad v = F_{33}(t)\, T_3^* s, \quad w = F_{23}(t)\, R T_3^* \tag{3.6}$$

где $F_{km}(t)$ определяются выражениями (3.2). При $t = 0$ и $t \to \infty$ из (3.6) получим, соответственно

$$u = -\frac{(1+\nu)\,\omega_1 E_1 T_3^*}{aE(\omega_1 E_1 + aE)}\, s u_0, \quad v = \frac{2(1+\nu)\,\omega_1 E_1 T_3^* s}{aE(\omega_1 E_1 + aE)}\, v_0$$

$$w = -\frac{(1+\nu)\,\omega_1 E_1 R T_3^*}{aE(aE + \omega_1 E_1)}\, w_0$$

$$u_0 = \sin 2\alpha\,(\cos^2\alpha - \nu \sin^2\alpha)$$

$$v_0 = \left[\frac{aE}{\omega_1 E_1} + \cos^2 2\alpha + 2(1-\nu)\cos^2\alpha \sin^2\alpha\right]$$

$$w_0 = -\sin 2\alpha\,(\nu\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$$

$$u = -\frac{\omega_1 E_1 (1+\nu)\, a_1 T_3^* s}{aE[\omega_1 E_1 + (1-\varkappa)\, aE](1-\varkappa)}\, u_\infty$$

$$v = \frac{2(1+\nu)\, a_1 T_3^* \omega_1 E_1 s}{aE[\omega_1 E_1 + aE(1-\varkappa)]}\, v_\infty (1-\varkappa)^{-1}$$

$$w = -\frac{\omega_1 E_1 a_1 R T_3^* (1+\nu)}{aE(1-\varkappa)[\omega_1 E_1 + aE(1-\varkappa)]}\, w_\infty$$

$$u_\infty = \sin 2\alpha\,[\cos 2\alpha + (1-\nu)\, b \sin^2\alpha]$$

$$v_\infty = (1-\varkappa)\frac{aE}{\omega_1 E_1} + \cos^2 2\alpha + 2(1-\nu)\, b\cos^2\alpha \sin^2\alpha$$

$$w_\infty = \sin 2\alpha\,[(1-\nu)\, b\cos^2\alpha - \cos 2\alpha]$$

Графики величин u_0, v_0, w_0 и u_∞, v_∞, w_∞ в зависимости от угла армирования α при значениях параметров

$$\frac{aE}{\omega_1 E_1} = 0.5, \quad \nu = 0.3, \quad \varkappa = 0.6$$

приведены на фиг. 2 сплошными и штрихованными кривыми, соответственно. Отметим следующие особенности:

$$u|_{t=0} = 0 \qquad \text{при} \qquad \alpha = \operatorname{arc\,ctg} \sqrt{\nu}$$

$$w|_{t=0} = 0 \qquad \text{при} \qquad \alpha = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\nu}$$

$$u|_{t=\infty} = 0 \qquad \text{при} \qquad \alpha = \operatorname{arc\,ctg} \sqrt{\nu + \frac{\varkappa(1-2\nu)}{2}}$$

$$w|_{t=\infty} = 0 \qquad \text{при} \qquad \alpha = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\nu + \frac{\varkappa(1-2\nu)}{2}}$$

При $t = 0$ напряжение в арматуре в соответствии с зависимостью (1.2) равно

$$\sigma = E_1 \varepsilon = \frac{E_1(1+\nu)T_2^*}{aE + \omega_1 E_1} \sin 2\alpha$$

достигает наибольшего значения при $\alpha = \frac{\pi}{4}$ и равно нулю при $\alpha = 0$, $\frac{\pi}{2}$. Величины u, w и σ являются нечетными функциями от α и в интервале $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant 0$ будут иметь те же числовые значения, но с обратными знаками.

Рассмотрим теперь круговую цилиндрическую оболочку при $N = 2$ $\omega_1 E_1 = \omega_2 E_2$, $\alpha_2 = -\alpha_1$, $\alpha_1 = \alpha$, нагруженную всесторонним гидростатическим давлением P. После интегрирования уравнений равновесия находим

$$T_{11} = -\frac{PR}{2}, \quad T_{22} = -PR, \quad T_{12} = 0$$

Для перемещений имеем следующие выражения:

$$u(s, t) = -\frac{PR}{2}[F_{11}(t) + 2F_{12}(t)]\, s$$

$$v(s, t) = 0 \tag{3.7}$$

$$w(t) = -\frac{R^2 P}{2}[F_{12}(t) + 2F_{22}(t)]$$

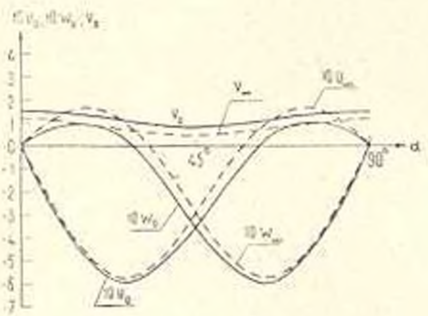
При $t = 0$ из (3.7) получим

$$
\begin{gathered}
u(s,\ 0) = -\frac{RP(1-\nu^2)s}{aE}u_0, \quad v = 0 \\
w(s,\ 0) = -\frac{R^2P(1-\nu^2)}{aE}w_0
\end{gathered}
\tag{3.8}
$$

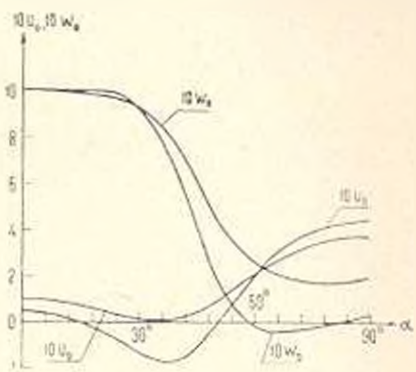
$$
u_0 = \frac{2(1-\nu^2)\omega_1 E_1 \sin^2\alpha[3\sin^2\alpha - 2] + (1-2\nu)aE}{2(1-\nu^2)[(2-(1+\nu)\sin^2 2\alpha)\omega_1 E_1 + aE]}
$$

$$
w_0 = \frac{2(1-\nu^2)\omega_1 E_1 \cos^2\alpha[3\cos^2\alpha - 1] + (2-\nu)aE}{2(1-\nu^2)[(2-(1+\nu)\sin^2 2\alpha)\omega_1 E_1 + aE]}
$$

Из выражений (3.8) следует, что при выполнении неравенства $1 \geqslant \frac{3}{2}\frac{(1-2\nu)aE}{(1-\nu^2)\omega_1 E_1}$ существуют углы армирования, при которых $u(s,\ 0) = 0$, а при выполнении неравенства $1 \geqslant \frac{6(2-\nu)aE}{(1-\nu^2)\omega_1 E_1}$ существуют углы армирования, при которых $w(0) = 0$. На фиг. 3 приведе-



Фиг. 2



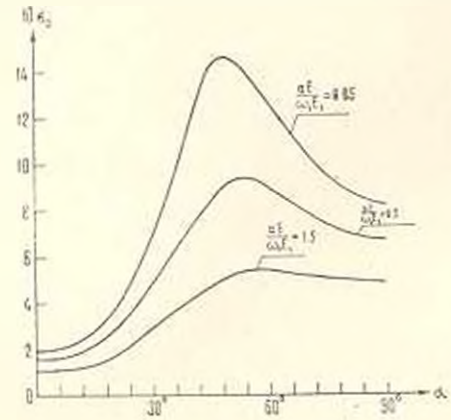
Фиг. 3

ны графики величин u_0, w_0 в зависимости от угла армирования α при значениях параметров $\nu = 0.3$, $\frac{aE}{\omega_1 E_1} = 0.5;\ 1.5;\ 0.05$. Напряжение в арматуре при $t = 0$, вычисленное с помощью формулы (1.2), в данном случае равно

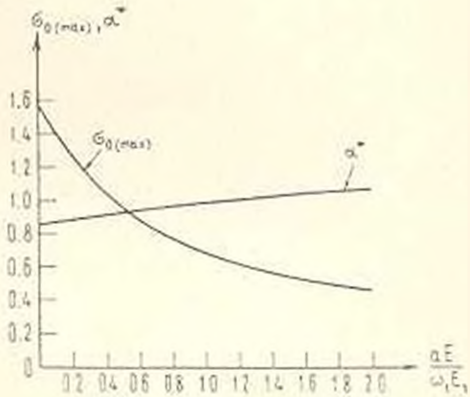
$$
\sigma = -\frac{PR}{2\omega_1}\,\frac{1-2\nu+(1+\nu)\sin^2\alpha}{2+\dfrac{aE}{\omega_1 E_1}-(1+\nu)\sin^2 2\alpha} = -\frac{PR}{2\omega_1}\sigma_0
$$

Графики величины σ_0 в зависимости от угла армирования α при значениях параметров $\nu = 0.3$, $\frac{aE}{\omega_1 E_1} = 0.5;\ 1.5;\ 0.05$ приведены на фиг. 4. На фиг. 5 приведены графики величин $\sigma_{0(max)}$ в зависимости от отношения $\frac{\alpha E}{\omega_1 E_1}$ и α^* — угла армирования, при котором этот max достигается ($\nu = 0.3$).

Пусть теперь усеченная коническая оболочка с углом раствора 2θ при $N = 2$ или $N = 1$ несет равномерно распределенную нормально приложенную поверхностную нагрузку интенсивностью q. Один из тор-



Фиг. 4



Фиг. 5

цов $s_0 = 0$ полностью закреплен, а другой торец $s = L$ свободен. После интегрирования уравнений (2.1)—(2.2) с учетом краевых условий

$$u|_{s=0} = v|_{s=0} = 0, \quad T_{11}|_{s=L} = T_{12}|_{s=L} = 0$$

получим следующие выражения:

$$u(s,\ t) = \left\{F_{11}(t)\left[s's - \frac{s^2}{2} + (s'-L)^2 \ln\left(1 - \frac{s}{s'}\right)\right] + \right.$$

$$\left. + 2f_{12}(t)\left(s's - \frac{s^2}{2}\right)\right\}\frac{\operatorname{tg}\theta}{2}q$$

$$v(s,\ t) = \left\{\frac{F_{13}(t)}{2}\left[s - \frac{(s'-L)^2 s}{s'(s'-s)}\right] + F_{23}(t)\,s\right\} q\,(s'-s)\operatorname{tg}\theta$$

$$w(s,\ t) = \left\{\left[F_{12}(t)\frac{s^2 - L^2 + 2(L-s)s'}{s'-s} + 2F_{22}(t)(s'-s)\right](s'-s) + \right.$$

$$+ F_{11}(t)\left[s's - \frac{s^2}{2} + (s'-L)^2\ln\left(1 - \frac{s}{s'}\right)\right] + \tag{3.9}$$

$$\left. + 2F_{12}(t)\left(s's - \frac{s^2}{2}\right)\right\}\frac{\operatorname{tg}^2\theta}{2}q$$

где функции $F_{km}(t)$ определяются выражениями (3.2). Из этих выражений, учитывая (3.2), видно, что $v = 0$ только при изменяющемся по определенному закону вдоль меридиана угле армирования.

Если замкнутый сферический пояс при $N=1$ одним из торцов $s_0=0$ закреплен полностью, а другое его торцевое сечение $s=L$ несет равномерно распределенное тангенциальное усилие интенсивности T^*, то после интегрирования уравнений (2.1)—(2.2) с учетом краевых условий

$$u|_{s=0}=v|_{s=0}=0$$

$$T_{21}|_{s=L}=T^*, \quad T_{12}|_{s=L}=0$$

получим следующие выражения:

$$u(s,\ t)=\frac{RT^*}{2}\left[F_{11}(t)-2F_{12}(t)+F_{22}(t)\right]\Bigg|\operatorname{tg}\frac{s}{R}+ \\ +\cos\left(\frac{s}{R}\right)\ln\operatorname{tg}\left(\frac{s}{2R}+\frac{\pi}{4}\right)\Bigg|\cos^2\frac{L}{R} \tag{3.10}$$

$$v(s,\ t)=\frac{RT^*}{2}\left[F_{13}(t)-F_{23}(t)\right]\Bigg|\cos\left(\frac{s}{R}\right)\ln\operatorname{tg}\left(\frac{s}{R}+\frac{\pi}{4}\right)+ \\ +\operatorname{tg}\frac{s}{R}\Bigg|\cos^2\frac{L}{R} \tag{3.11}$$

$$w(s,\ t)=\frac{RT^*}{2}F_{12}(t)-F_{22}(t)]\ \frac{\cos^2\dfrac{L}{R}}{\cos^2\dfrac{s}{R}}+ \\ +\frac{RT^*}{2}\left[F_{11}(t)-2F_{12}(t)+F_{22}(t)\right]\Bigg|\sin\left(\frac{s}{R}\right)\ln\operatorname{tg}\left(\frac{s}{2R}+\pi/4\right)+ \\ +\operatorname{tg}^2\frac{s}{R}\Bigg|\cos^2\frac{L}{R} \tag{3.12}$$

Подставляя в (3.11) функции $F_{13}(t)$, $F_{23}(t)$, определяемые при $N=1$ по формулам (3.2), получим

$$v(s,\ t)=-\frac{RT^*(1+\nu)\,\omega_1E_1}{2aE}\sin 4\alpha\Bigg\{-\frac{a_1}{(1-\varkappa)[(1-\varkappa)\,aE+\omega_1E_1]}+ \\ +\frac{\varkappa-1+a_1}{(\varkappa-1)\,\omega_1E_1}e^{\frac{\varkappa-1}{\beta}t}+ \\ +\frac{aE[aE(a_1+\varkappa-1)+\omega_1E_1(a_1-1)]}{\omega_1E_1[(1-\varkappa)\,aE+\omega_1E_1](aE+\omega_1E_1)}e^{-\frac{(1-\varkappa)aE+\omega_1E_1}{\beta(aE+\omega_1E_1)}t}\Bigg\}\times \tag{3.13}$$

$$\times\left[\cos\left(\frac{s}{R}\right)\ln\operatorname{tg}\left(\frac{s}{R}+\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{tg}\frac{s}{R}\right]\cos^2\frac{L}{R}$$

Формула (3.13) показывает, что при углах армирования $\alpha = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ $v(s, t) = 0$ при всех t.

Институт гидродинамики
СО АН СССР

Поступило 26 IV 1971

Ա. Ն. ԱՆԴՐԵԵՎ, ՅՈՒ. Վ. ՆԵՄԻՐՈՎՍԿԻ

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԵՎ ՄԱԾՈՒՑԻԿ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ, ԱՄՐԱՎՈՐՎԱԾ ԵՎ ԹՈՒԼԱՑՎԱԾ ԱՆՄՈՄԵՆՏ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ԴԵՖՈՐՄԱՑՄԱՆ ՄԻ ՔԱՆԻ ԱՌԱՆՁՆԱՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Ներկա աշխատանքում հետազոտված են ամրավորված անմոմենտ թաղանթների դեֆորմացման բնույթի մի քանի յուրահատուկ առանձնահատկությունները, երբ կոմպոզիցիոն նյութի էլեմենտներն օժտված են առաձգական և մածուցիկ առաձգական հատկություններով։

ON CERTAIN PECULIARITIES IN DEFORMATION OF VISCOUS ELASTIC MOMENTLESS REINFORCED AND WEAKENED SHELLS

A. N. ANDREEV, Yu. V. NEMIROVSKY

S u m m a r y

Certain peculiarities in mode of deformation of reinforced momentless shells, where the components of composite material have elastic and viscous-elastic properties, are investigated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных оболочек. Физматгиз, М., 1961.
2. *Немировский Ю. В.* Об упруго-пластическом деформировании армированного слоя. Журнал прикл. механики и техн. физики (ПМТФ), 6, 1969.
3. *Немировский Ю. В.* Уравнения изгиба и устойчивости армированных оболочек и пластин из вязко-упругого материала. Сб. Динамика сплошной среды, в. IV, СО АН СССР, Новосибирск, 1970.
4. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. Изд. „Наука“, М., 1966.