

Р. Е. МКРТЧЯН

БОЛЬШИЕ УПРУГИЕ ДЕФОРМАЦИИ ИЗГИБА И
 УДЛИНЕНИЯ ЧАСТИ ТРУБЫ ИЗ МАТЕРИАЛА,
 РАЗНОСОПРОТИВЛЯЮЩЕГОСЯ ДЕФОРМАЦИЯМ
 РАСТЯЖЕНИЯ И СЖАТИЯ

Рассматривается задача симметричного изгиба и простого растяжения части круглой цилиндрической трубы из сжимаемого упругого материала, разносопротивляющегося деформациям растяжения и сжатия, при больших деформациях. Отдельно исследуется случай, когда часть трубы выпрямляется до прямоугольного параллелепипеда.

В качестве примера рассматривается задача выпрямления полной трубы до прямоугольного параллелепипеда, когда его деформации находятся в пределах справедливости соотношений теории упругости второго порядка.

Работа основывается на общей нелинейной теории упругости [1] и на соотношениях, выведенных в [2] для материала, разносопротивляющегося деформациям растяжения и сжатия. Эти соотношения выражают упругие свойства материала полнее, чем соответствующие соотношения, полученные из единой функции энергии деформаций для всех деформированных состояний.

Чистый изгиб прямоугольной пластинки и круглого стержня, изготовленных из разномодульного материала, в случае малых деформаций рассмотрен в работах [3, 4].

Принимается, что если материал деформированного тела растягивается (сжимается) по всем направлениям, то его упругие свойства по всем направлениям одинаковы и отличаются от упругих свойств того же тела при сжатии (растяжении) его со всех сторон. Тогда функция энергии деформации материала W зависит только от инвариантов деформации $W = W^+(I_1, I_2, I_3)$ и $W = W^-(I_1, I_2, I_3)$ при растяжении и сжатии материала со всех сторон соответственно.

Если в какой-то точке деформированного тела материал растягивается (сжимается) по главному направлению деформаций \bar{y}_s ($s=1, 2, 3$) и сжимается (растягивается) по всем перпендикулярным к нему направлениям, то W имеет вид [2]

$$W = W'_{(s)}(I_1, I_2, I_3, \gamma_{(s)}) \quad (1)$$

$$W = W^-_{(s)}(I_1, I_2, I_3, \gamma_{(s)})$$

где

$$\gamma_{(s)} = -\frac{\bar{\gamma}_{ss}}{g_{ss}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{G}_{ss}}{g_{ss}} - 1 \right) \quad (2)$$

(по индексу s не суммировать)

\bar{G}_{ij} и \bar{g}_{ij} — компоненты ковариантных метрических тензоров деформированного и недеформированного состояний относительно ортогональной системы координат \bar{y}_s , которая в каждой точке деформированного тела совпадает с главными направлениями деформаций \bar{y}_s .

Функциям W^+ , W^- , $W'_{(s)}$ и $W''_{(s)}$ соответствуют контрвариантные компоненты напряжений [2]

$$\tau_{ij}^+ = \Phi^+ g^{ij} + W^+ B^i + p^+ G^i \tag{3}$$

$$\tau_{(s)}^+ = \Phi_{(s)}^+ g^{ij} + W_{(s)}^+ B^{ij} + p_{(s)}^+ G^{ij} + \Theta_{(s)}^+ M_{(s)}^{ij}$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_{(s)}^+ &= \frac{2}{V I_3} \frac{\partial W_{(s)}}{\partial I_1}, & \Psi_{(s)}^- &= \frac{2}{V I_3} \frac{\partial W_{(s)}}{\partial I_2}, & p_{(s)}^- &= 2 V I_3 \frac{\partial W_{(s)}}{\partial I_3} \\ \Theta_{(s)}^+ &= \frac{1}{V I_3} \frac{\partial W_{(s)}}{\partial \sigma_{i(s)s}}, & M_{(s)}^{ij} &= \frac{\partial^2}{\partial \bar{y}^i \partial \bar{y}^j} \Big|_{\bar{y}_{(s)}} \end{aligned} \tag{4}$$

$$B^i = I_1 g^{ii} - g^{ir} g^{rk} G_{rk}$$

G_{ij} , G^i , g_{ij} , g^i — ковариантные и контрвариантные компоненты метрических тензоров деформированного и недеформированного состояний соответственно относительно подвижной системы координат \bar{y}^i ($i = 1, 2, 3$).

τ_{ij}^0 и $\tau_{(s)}^0$ определяются аналогичными выражениями.

Когда деформации тела находятся в пределах справедливости соотношений теории упругости второго порядка, функция энергии деформации определяется выражениями [2]

$$\begin{aligned} W^+ &= A_1 J_2 + A_2 J_1^2 + A_3^+ J_1 J_2 + A_4 J_1^3 + A_5 J_3 \\ W^- &= A_1 J_2 + A_2 J_1^2 + A_3 J_1 J_2 + A_4 J_1^3 + A_5 J_3 \\ W'_{(s)} &= W^+ + A_6 \bar{\gamma}_{(s)s}^2 + A_7 \bar{\gamma}_{(s)s} + A_8 J_1 \bar{\gamma}_{(s)s}^2 + A_9 J_2 \bar{\gamma}_{(s)s} \\ W''_{(s)} &= W^+ - A_6 \bar{\gamma}_{(s)s}^2 - A_7 \bar{\gamma}_{(s)s} - A_8 J_1 \bar{\gamma}_{(s)s}^2 - A_9 J_2 \bar{\gamma}_{(s)s} \end{aligned} \tag{5}$$

где A_1^+ , A_2^+ , ..., A_5^- — упругие постоянные

$$\begin{aligned} A_6 &= 4(A_2^+ - A_2^-) \\ A_7 &= 8(A_4^+ - A_4^-) + 4(A_3^+ - A_3^-) + 4(A_5^+ - A_5^-) \\ A_8 &= 2(A_3^+ - A_3^-) + 2(A_5^- - A_5^+) \\ A_9 &= 6(A_4^+ - A_4^-) + 3(A_3^+ - A_3^-) + A_3^+ - A_3^- \end{aligned} \tag{6}$$

причем

$$A_1^+ + 2A_2^+ = A_1^- + 2A_2^- \tag{7}$$

$$J_1 = I_3 - 3, \quad J_2 = I_2 - 2I_1 + 3, \quad J_3 = I_3 - I_2 + I_1 - 1 \tag{8}$$

В рамках линейной теории упругости

$$W^+ = -\frac{1}{2} \mu^+ J_2 + \frac{1}{8} (\lambda^+ + 2\mu^+), \quad W^- = -\frac{1}{2} \mu^- J_2 + \frac{1}{8} (\lambda^- + 2\mu^-) \quad (9)$$

$$W_{(1)} = W^+ + (\mu^+ - \mu^-) \gamma_{(ss)}^2, \quad W_{(1)}^* = W^- - (\mu^+ - \mu^-) \gamma_{(ss)}^2$$

где $\lambda^+ = \lambda^- = \lambda$ (10)

λ^+ , μ^+ , λ^- и μ^- — постоянные Ляме, соответствующие функциям W^+ и W^- соответственно.

1. Пусть часть круглой цилиндрической трубы из рассматриваемого материала в системе цилиндрических координат r, θ, x_3 в недеформированном состоянии ограничена цилиндрическими поверхностями $r = r_1, r = r_2$ и плоскостями $\theta = \pm \theta_0, x_3 = \pm L$.

Рассматриваемое тело испытывает простое растяжение и цилиндрический изгиб, определяемые соотношениями

$$r = r(\theta), \quad \theta = a\vartheta, \quad y_3 = bx_3 \quad (1.1)$$

где $(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = (r, \theta, y_3)$ — цилиндрические координаты, определяющие деформированное тело, a и b — постоянные.

Известным способом [1] определяем метрические тензоры относительно системы r, θ, y_3

$$G_{11} = G^{11} = G_{33} = G^{33} = 1, \quad G_{22} = r^2, \quad G^{22} = \frac{1}{r^2} \\ G_{ij} = G^{ij} = 0 \quad (i \neq j) \quad (1.2)$$

$$g_{11} = \frac{1}{r_0^2}, \quad g_{22} = \frac{\rho^2}{a^2}, \quad g_{33} = \frac{1}{b^2} \\ g^{11} = r^2, \quad g^{22} = \frac{a^2}{\rho^2}, \quad g^{33} = b^2 \quad (1.3) \\ g_{ij} = g^{ij} = 0 \quad (i \neq j)$$

Здесь $r_0 = \frac{dr}{d\vartheta}$.

Определяя по формуле $\gamma_{ij} = \frac{1}{2} (G_{ij} - g_{ij})$ ковариантные компоненты деформаций, убеждаемся, что система (r, θ, y_3) в каждой точке деформированного тела совпадает с главными направлениями деформации (так как $\gamma_{ij} = 0$ при $i \neq j$) и, следовательно, $g_{ij} = \bar{g}_{ij}$, $g^{ij} = \bar{g}^{ij}$, $G_{ii} = \bar{G}_{ii}$, $\gamma_{ij} = \bar{\gamma}_{ij}$ и т. д. Тогда из (2) находим

$$\gamma_{(11)} = \frac{1}{2} (r_0^2 - 1), \quad \gamma_{(22)} = \frac{1}{2} \left(\frac{a^2 r^2}{\rho^2} - 1 \right), \quad \gamma_{(33)} = \frac{1}{2} (b^2 - 1) \quad (1.4)$$

Если материал деформированного тела растягивается по направлению θ_1 ($\theta_1 = r, \theta_2 = \theta, \theta_3 = y_3$) и сжимается по перпендикулярным к нему направлениям, то из (3) с помощью (4), (1.2) и (1.3) определяем

$$\begin{aligned} \tau_{(s)}^{11} &= r_p^2 \Phi'_{(s)} + r_p^2 \left(\frac{a^2 r^2}{r^2} + b^2 \right) \Psi'_{(s)} + p'_{(s)} + r_c^2 H'_{(s)} \delta_{1s} \\ r^2 \tau_{(s)}^{22} &= \frac{a^2 r^2}{r^2} \Phi'_{(s)} + \left(\frac{a^2 r^2 r_c^2}{r^2} + \frac{a^2 b^2 r^2}{r^2} \right) \Psi'_{(s)} + p'_{(s)} + \frac{a^2 r^2}{r^2} H'_{(s)} \delta_{2s} \quad (1.5) \\ \tau_{(s)}^{33} &= b^2 \Phi'_{(s)} + \left(b^2 r_p^2 + \frac{a^2 b^2 r^2}{r^2} \right) \Psi'_{(s)} + p'_{(s)} + b^2 H'_{(s)} \delta_{3s} \end{aligned}$$

где δ_{ij} — символы Кронекера.

Аналогичные выражения могут быть получены и для случая, когда материал сжимается только по направлению θ_s . Тогда в выражениях (1.5) вместо величин с одним штрихом будут фигурировать аналогичные величины с двумя штрихами. Если материал растягивается или сжимается по всем направлениям, то вместо указанных величин будут аналогичные величины с индексом (·) или (—). В этом случае последние члены (1.5), содержащие функцию $H_{(s)}$, будут отсутствовать.

Уравнения равновесия в данном случае придутся к одному

$$\frac{d}{dr} (r \tau^{11}) = r^2 \tau^{22} \quad (1.6)$$

где τ^{11} и τ^{22} символизируют те напряжения, которые имеются в деформированном теле в каждом конкретном случае.

Для решения задачи принимаем, что известны: постоянные a и b , радиус одной из граничных цилиндрических поверхностей деформированного тела и нормальная равномерно распределенная нагрузка, действующая на этой поверхности, то есть

$$p = p_1, \quad r = r_1, \quad \tau^{11} = P_1 \quad (1.7)$$

или

$$p = p_2, \quad r = r_2, \quad \tau^{11} = P_2 \quad (1.8)$$

На основании (1.7) из (1.4) определяются $\tau_{(s)}^{33}$ для всего тела и $\tau_{(22)}$ на поверхности $r = r_1$.

Для определения вида напряженного состояния у граничной поверхности $r = r_1$ нужно определить также $\tau_{(11)}$ при $r = r_1$. Принимая $\tau_{(11)}|_{r=r_1} > 0$, подставляем в равенство $\tau^{11}|_{r=r_1} = P_1$ выражение τ^{11} , соответствующее знакам $\tau_{(s)}$, откуда определяем $r_c|_{r=r_1}$, а из (1.4) — $-\tau_{(11)}|_{r=r_1}$. Если $\tau_{(11)}|_{r=r_1} < 0$, повторяем указанные вычисления, подставляя вместо $\tau^{11}|_{r=r_1}$ выражение, соответствующее отрицательному $\tau_{(11)}$.

Таким образом, получаем необходимые граничные условия для решения (1.6), которое после подстановки выражений τ^{11} и τ^{22} , соответствующих определенным знакам $\tau_{(11)}$, $\tau_{(22)}$ и $\tau_{(33)}$, приводится к нелинейному дифференциальному уравнению второго порядка относительно функции $r(r)$

$$\rho = \rho_1; \quad r = r_2, \quad r_1 = r_2|_{\rho=\rho_1}$$

Уравнение (1.6) интегрируем в пределах всего тела и из (1.4) определяем функции $\gamma_{(11)}$ и $\gamma_{(22)}$ ($\gamma_{(33)} = \text{const}$). Если они в пределах тела не меняют своего знака, то найденное решение (функции $r(\rho)$ и r_ρ) будет искомым. Если $\gamma_{(11)}$ и $\gamma_{(22)}$ или один из них в пределах трубы меняет свой знак, то найденное решение справедливо только для участка, где $\gamma_{(11)}$ и $\gamma_{(22)}$ сохраняют свои знаки. Радиус разделяющей поверхности этого участка r_3 (соответствующий $\gamma_{(11)} = 0$) либо r_4 (соответствующий $\gamma_{(22)} = 0$) находим из полученных решений и из равенства $r_3^2|_{\rho=r_3} = 1$ либо $r_4^2 = \frac{\rho^2}{a^2}$.

Для следующего участка, начинающегося с разделяющей поверхности, интегрируем (1.6), заранее подставляя туда выражения γ^{11} и γ^{22} , соответствующие новым знакам $\gamma_{(33)}$, а граничные условия получаем из предыдущих решений. Затем продолжаем аналогичным образом.

Подставляя найденные значения $r(\rho)$ и r_ρ для каждого участка в соответствующие выражения напряжений σ^i_j , находим напряженное состояние рассматриваемого тела.

Заметим, что при нахождении разделяющих поверхностей указанных участков и для проверки может пригодиться также условие равенства соответствующих напряжений примыкающих участков на их разделяющей поверхности.

Из рассматриваемой задачи в частном случае, когда $\mu_0 = 0$ и $a = 1$, получаем случай растяжения и симметричного расширения круглой цилиндрической трубы, но изложенный метод не позволяет рассмотреть случай, когда часть трубы выпрямляется до прямоугольного параллелепипеда. Этот случай рассматривается отдельно в следующем пункте.

2. Пусть рассматриваемая часть трубы после деформации преобразуется в прямоугольный параллелепипед.

Для определения деформированного тела выберем прямоугольные декартовы координаты (y_1, y_2, y_3) так, что $y = y_1 = f(\varphi)$, $y_2 = c\varphi$; $y_3 = dx_3$.

Тогда координаты точки φ, ψ, x_3 недеформированного состояния выражаются соотношениями

$$\varphi = \varphi(y_1), \quad \psi = \frac{y_2}{c}, \quad x_3 = \frac{y_3}{d} \quad (2.1)$$

Тогда метрические тензоры определяются выражениями

$$G_{ij} = G'^{ij} = \delta_{ij}$$

$$g_{11} = \frac{1}{y_1^2}, \quad g_{22} = \frac{1}{c^2}, \quad g_{33} = \frac{1}{d^2} \quad (2.2)$$

$$g^{11} = y_r^2, \quad g^{22} = \frac{c^2}{\rho^2}, \quad g^{33} = d^2$$

$$g_{ij} = g^{ij} = 0 \quad (i \neq j), \quad \text{где } y_s = \frac{dy}{d\varphi}$$

Здесь направления системы (y_1, y_2, y_3) в каждой точке параллелепипеда совпадают с главными направлениями деформации (так как $\gamma_{ij} = 0$ при $i \neq j$). Компоненты $\tau_{(s)}$ будут

$$\tau_{(11)} = \frac{1}{2}(y_r^2 - 1), \quad \tau_{(22)} = \frac{1}{2}\left(\frac{c^2}{\rho^2} - 1\right), \quad \tau_{(33)} = \frac{1}{2}(d^2 - 1) \quad (2.3)$$

Когда материал параллелепипеда растягивается по одному из направлений y_s ($s = 1, 2, 3$), а по перпендикулярным к нему направлениям сжимается, из (3), (4) и (2.2) определяем физические компоненты напряжения $\sigma'_{(s)ij}$ которые в данном случае (в прямоугольных декартовых координатах) совпадают с тензором $\sigma'_{(s)ij}$

$$\sigma'_{(s)11} = y_r^2 \Phi'_{(s)} + y_r^2 \left(\frac{c^2}{\rho^2} + d^2 \right) \Psi'_{(s)} + p'_{(s)} + y_r^2 \Theta'_{(s)} \delta_{11}$$

$$\sigma'_{(s)22} = \frac{c^2}{\rho^2} \Phi'_{(s)} + \left(\frac{y_r^2 c^2}{\rho^2} + \frac{c^2 d^2}{\rho^2} \right) \Psi'_{(s)} + p'_{(s)} + \frac{c^2}{\rho^2} \Theta'_{(s)} \delta_{22} \quad (2.4)$$

$$\sigma'_{(s)33} = d^2 \Phi'_{(s)} + \left(y_r^2 d^2 + \frac{c^2 d^2}{\rho^2} \right) \Psi'_{(s)} + p'_{(s)} + d^2 \Theta'_{(s)} \delta_{33}$$

$$\sigma'_{(s)ij} = 0 \quad (i \neq j)$$

Если материал параллелепипеда сжимается по направлению y_s и растягивается по перпендикулярным к нему направлениям, то $\sigma'_{(s)11}$ определяются аналогичными (2.4) выражениями, где величины с одним штрихом заменяются соответствующими величинами с двумя штрихами. В выражения σ'_{ij} или σ''_{ij} (соответствующие растяжению или сжатию материала по всем направлениям) вместо указанных величин должны входить соответствующие величины с индексом (+) или (-).

Как видно из полученных уравнений, деформированное и напряженное состояния зависят от постоянных c, d и от y_r (от y непосредственно не зависят). Следовательно, начало координат системы (y_1, y_2, y_3) можно выбрать в любой точке линии $(y_2 = 0, y_3 = 0)$. Для простоты его возьмем на грани параллелепипеда, соответствующей граничной цилиндрической поверхности $\rho = \rho_1$ недеформированного состояния, то есть $y = Y_1 = 0$ при $\varphi = \varphi_1$.

Уравнения равновесия в данном случае приводятся

$$\frac{d\sigma_{11}}{dy} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d\sigma_{11}}{d\varphi} = 0 \quad (2.5)$$

откуда следует

$$\varepsilon_{11} = \text{const} = P \quad (2.6)$$

Здесь ε_{11} символизирует то напряжение $(\varepsilon_{(111)}, \varepsilon_{(112)}, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{11})$, которое соответствует знакам $\gamma_{(11)}, \gamma_{(12)}$ и $\gamma_{(33)}$.

Предположим, известны постоянные c , d и равномерно распределенная нормальная нагрузка P на одной из граней $y = Y_1 = 0$ или $y = Y_2$ (соответствующей цилиндрической поверхности ρ_1 или ρ_2).

Из (2.3) определяем $\gamma_{(12)}$ и $\gamma_{(33)} = \text{const}$. Затем из (6), подставляя туда выражение ε_{11} , соответствующее знакам $\gamma_{(12)}, \gamma_{(33)}$ при $\rho = \rho_1$ и интуитивно выбранному знаку $\gamma_{(11)}$, получим алгебраическое уравнение относительно функции y . Из этого уравнения и из (2.3) определяем значения y и $\gamma_{(11)}$ при $\rho = \rho_1$. Если знак полученного $\gamma_{(11)}$ не совпадает с выбранным знаком $\gamma_{(11)}$, то повторяем указанные действия для уточненного знака $\gamma_{(11)}$.

Из указанного алгебраического уравнения для зоны, начинающейся из грани $y = Y_1 = 0$, где $\gamma_{(11)}$ и $\gamma_{(33)}$ не меняют своего знака, получаем

$$y_2 = f(\rho) \quad (2.7)$$

откуда

$$y = \int_{\rho_1}^{\rho} f(\rho) d\rho \quad (2.8)$$

где ρ_k совпадает с ρ_2 , если $\gamma_{(11)}$ и $\gamma_{(22)}$ в пределах параллелепипеда сохраняют свой знак. В противном случае ρ_k совпадает с радиусом ρ_2 соответствующей разделяющей плоскости $y = Y_2$, где $\gamma_{(11)} = 0$, или с радиусом ρ_1 соответствующей плоскости $y = Y_1$, где $\gamma_{(22)} = 0$.

Радиус $\rho_k = c$ определяем из (2.3), принимая $\gamma_{(22)} = 0$, а ρ_1 — из уравнения (2.6), подставляя туда $y = 1$.

Указанным способом для каждой зоны определяем функции y и $y(\rho)$, которые подставляя в (2.4), определяем напряжения.

Более подробно этот случай рассматривается в следующем пункте на примере.

3. Предположим, рассматриваемая часть трубы изготовлена из материала, для которого упругие постоянные теории упругости второго порядка, входящие в выражения W (5), определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{1}{2} \nu^{-1} & A_1^- &= -\frac{1}{2} \nu^{-1} \\ A_2^+ &= \frac{1}{8} (\lambda + 2\mu^{-1}) & A_2^- &= \frac{1}{8} (\lambda + 2\mu^{-1}) \end{aligned}$$

$$A_3^+ = -\frac{3}{8}(\lambda + 3\mu^+) \quad A_3^- = -\frac{3}{8}(\lambda + 3\mu^-) \quad (3.1)$$

$$A_4^+ = \frac{3}{16}(\lambda + 2\mu^+) \quad A_4^- = \frac{3}{16}(\lambda + 2\mu^-)$$

$$A_5^+ = \frac{9}{8}\mu^+ \quad A_5^- = \frac{9}{8}\mu^-$$

где λ , μ^+ и μ^- — постоянные Ляме (см. (9) и (10)).

Приведенные постоянные выбраны по результатам работы [5].

Из (6) и (3.1) определяем

$$A_6 = \mu^+ - \mu^-, \quad A_7 = 3(\mu^+ - \mu^-) \quad (3.2)$$

Тогда для случая, когда материал тела растягивается по всем направлениям, из (4), (2.4) и (3.1), произведя предварительно соответствующие изменения в (2.4), получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^+ &= \frac{y_1^2}{4cd} \left(4.5\lambda y_1^4 + 9\mu^+ y_1^4 - 19\lambda y_2^2 - 32\mu^+ y_2^2 + 3\lambda d^2 y_2^2 + \right. \\ &+ 3\lambda \frac{c^2 y_1^2}{\rho^2} + 59\mu^+ + 25.5\lambda - 10\lambda d^2 - 18\mu^+ d^2 + 1.5\lambda d^4 + \\ &\left. + 1.5\lambda \frac{c^2}{\rho^4} - 10\lambda \frac{c^2}{\rho^2} - 18\mu^+ \frac{c^2}{\rho^2} \right) = P \\ \sigma_{22}^+ &= \frac{c}{4y_1 \rho d} \left(1.5\lambda y_1^4 - 10\lambda y_2^2 - 18\mu^+ y_2^2 + 3\lambda \frac{y_1^2 c^2}{\rho^2} + 59\mu^+ + \right. \\ &+ 25.5\lambda - 19\lambda \frac{c^2}{\rho^2} - 32\mu^+ \frac{c^2}{\rho^2} - 10\lambda d^2 - 18\mu^+ d^2 + \\ &\left. + 3\lambda \frac{c^2 d^2}{\rho^2} + 4.5\lambda \frac{c^4}{\rho^4} + 9\mu^+ \frac{c^4}{\rho^4} + 1.5\lambda d^4 \right) \\ \sigma_{33}^+ &= \frac{y_1 d}{4y_2 \rho c} \left(1.5\lambda y_1^4 - 10\lambda y_2^2 - 18\mu^+ y_2^2 + 3\lambda d^2 y_2^2 + 59\mu^+ + \right. \\ &+ 25.5\lambda - 10\lambda \frac{c^2}{\rho^2} - 18\mu^+ \frac{c^2}{\rho^2} - 19\lambda d^2 - 32\mu^+ d^2 + \\ &\left. + 3\lambda \frac{c^2 d^2}{\rho^2} + 1.5\lambda \frac{c^4}{\rho^4} + 4.5\lambda d^4 + 9\mu^+ d^4 \right) \\ \sigma_{ij}^+ &= 0 \quad (i \neq j) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Когда материал сжимается по всем направлениям, для σ_{ij}^- получаем аналогичные выражения, где вместо μ^+ фигурирует μ^- . Для остальных случаев деформированного состояния имеем

$$\sigma_{(000)} = \sigma_{kk}^- + \nu_{(0)} \sigma_{kk}^- \quad (3.4)$$

$$\sigma_{(s)kk} = \sigma_{kk} - \tau_{(k)s} \tau_{ks} \quad (k = 1, 2, 3) \quad (3.5)$$

(по индексам k и s не суммировать)

Здесь

$$\begin{aligned} \tau_{(1)} &= \frac{H_0 \rho}{4bc} (9y^4 - 14y^2 + 5)(\mu^+ - \mu^-) \\ \tau_{(2)} &= \frac{c}{4y_1 \rho^2 b} \left(9 \frac{c^4}{\rho^4} - 14 \frac{c^2}{\rho^2} + 5 \right) (\mu^+ - \mu^-) \\ \tau_{(3)} &= \frac{d^2}{4y_1 bc} (9d^4 - 14d^2 + 5)(\mu^+ - \mu^-) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Пусть круглая цилиндрическая труба из рассматриваемого материала, для которого $k_1 = 3100 \text{ кг/см}^2$, $\mu^+ = 776 \text{ кг/см}^2$, $\mu^- = 345 \text{ кг/см}^2$, в системе цилиндрических координат ρ , θ , x_3 определяется цилиндрическими поверхностями $\rho_1 = 20 \text{ см}$, $\rho_2 = 24 \text{ см}$ и плоскостями $x_3 = \pm 15 \text{ см}$, $\theta = \pm \pi$ (в этом месте стенка трубы разрезана). Труба деформируется в прямоугольный параллелепипед так, что $c = 23$, $d = 0.952$, а его грани $y = Y_1 = 0$ и $y = Y_2$ свободны от напряжений ($P = 0$), то есть $\tau_{11} = 0$.

Из (2.3) определяем

$$\tau_{(22)} = \frac{264.5}{\rho^2} - \frac{1}{2}, \quad \tau_{(33)} = -0.041$$

Принимая $\tau_{(11)} < 0$ и подставляя в $\sigma_{11} = 0$ выражение $\sigma'_{(211)}$ из (3.4), соответствующее $\tau_{(22)} > 0$, $\tau_{(33)} < 0$, для $\rho = 20 \text{ см}$ находим $r_1 = 0.8952$. Следовательно, у грани $y = Y_1 = 0$ действительно $\tau_{(11)} < 0$, и напряжения $\sigma'_{(211)}$ определяем из (3.4).

Из уравнения $\sigma'_{(331)} = 0$, подставляя туда значение $y_1 = 1$ (соответствующее $\tau_{(11)} = 0$), получаем $\rho_3 = 22 \text{ см}$, а из равенства $\tau_{(22)} = 0$ определяем радиус $\rho_4 = 23 \text{ см}$.

Таким образом, в параллелепипеде получаем три зоны: в зоне $20 \leq \rho \leq 22$ $\tau_{(11)} < 0$, $\tau_{(22)} > 0$, $\tau_{(33)} < 0$ и $\sigma_{ij} = \sigma_{(211)j}$, в зоне $22 \leq \rho \leq 23$ имеем $\tau_{(11)} > 0$, $\tau_{(22)} > 0$, $\tau_{(33)} < 0$ и $\sigma_{ij} = \sigma_{(33)j}$, в зоне $23 \leq \rho \leq 24$ $\tau_{(11)} > 0$, $\tau_{(22)} \leq 0$, $\tau_{(33)} < 0$ и $\sigma_{ij} = \sigma_{(11)j}$.

Из уравнений $\sigma'_{(211)} = 0$, $\sigma'_{(331)} = 0$ и $\sigma'_{(111)} = 0$, подставляя туда соответствующие выражения σ_{11} из (3.4), (3.5) и значения постоянных, получаем

$$y_1 = \sqrt{1.803 - 144 \frac{1}{\rho^2}} - \sqrt{634 \frac{1}{\rho^2} - 55530 \frac{1}{\rho^4}} - 0.827$$

где $20 \leq \rho \leq 22$

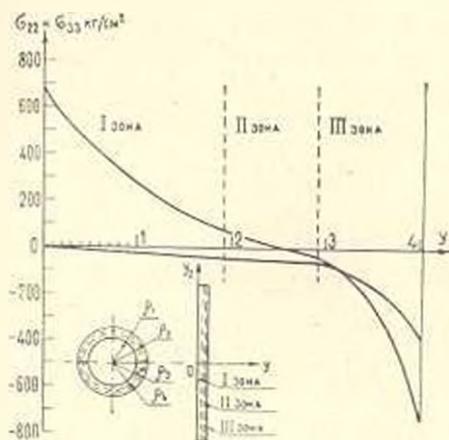
$$y_1 = \sqrt{1.803 - 117 \frac{1}{\rho^2}} - \sqrt{713 \frac{1}{\rho^2} - 48360 \frac{1}{\rho^4}} - 0.950$$

где $22 \leq \rho \leq 23$

$$y_2 = \sqrt{1.614 - 117 \frac{1}{\rho^2}} - \sqrt{561 \frac{1}{\rho^4} - 48360 \frac{1}{\rho^4} - 0.827}$$

где $23 \leq \rho \leq 24$

Из этих уравнений определяем функции y , для каждой зоны. Затем из (3.4) и (3.5) с помощью (3.6) определяем напряжения каждой зоны. Результаты вычислений приведены на фиг. 1.



Фиг. 1

Нормальные нагрузки, действующие на гранях параллелепипеда, $y_2 = \pm x\theta_0 = \pm 72.2$ см и $y_3 = \pm dL = \pm 14.3$ см эквивалентны результирующим силам $N_2 = 9180$ кг и $N_3 = 9230$ кг и результирующим моментам $M_2 = 366$ кгм и $M_3 = 90$ кгм относительно осей y_1 и y_2 соответственно.

Институт механики АН Армянской ССР

Поступил 31 V 1971

Ռ. Ե. ՄԿՐՏՅԱՆ

ԶՂՄԱՆ ԵՎ ՍԵՂՄՄԱՆ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻԱՆԵՐԻՆ, ՏԱՐԲԵՐ ԴԵՄԱԳՐՈՎ ՆՅՈՒԹԻՅ
ՊԱՏՐԱՍՏՎԱԾ ԽՈՂՈՎԱԿԻ ՄԱՍԻ ԾՌՄԱՆ ԵՎ ԻՐԿԱՐԱՅՄԱՆ ՄԵԾ
ԱՌԱՋԳԱՎԱՆ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻԱՆԵՐԸ

Ո. Վ Մ Ի Ն Վ Ի Ն Վ

Մեծ դեֆորմացիաների առկայության դեպքում դիտարկվում է ձգման և սեղմման դեֆորմացիաներն տարբեր դիմադրությունն ցույց տվող առաձգական սեղմելի նյութից պատրաստված կլոր խողովակի զլանային սեկտորի տեսքով մասի սիմետրիկ ծոման խնդիրը: Լեյն զեպրը, էրր խողովակի մասը

ուղղվում է մինչև ուղղանկյուն գուրահեռանիստ դառնալը, ուսումնասիրվում է առանձին:

Որպես օրինակ դիտարկվում է լրիվ խողովակի մինչև ուղղանկյուն գուրահեռանիստի վիճակը ուղղվելու խնդիրը, երբ դեֆորմացիաները գտնվում են երկրորդ կարգի առաձգականության տեսության սահմաններին կիրառելիության սահմաններում:

LARGE ELASTIC DEFORMATIONS OF FLEXURE AND EXTENSION OF A TUBE SECTION HETERORESISTANT TO TENSION AND COMPRESSION

R. E. MKRTCHIAN

S u m m a r y

The problem on symmetric flexure and extension of a tube section in the form of a cylindrical sector of compressible elastic material heteroresistant to tension and compression under large deformations is considered. The case of a tube section, straightened to a cuboid, is examined separately.

The problem of straightening the whole tube to a cuboid, where its deformations are within the limits of correctness of the elasticity theory relations of the second order, is presented as an example.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Грик А., Аджис Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. Изд. „Мир“, М., 1965.
2. Мкртчян Р. Е. Об одной модели материала, разносопротивляющегося деформациям растяжения и сжатия. Изв. АН Арм.ССР, Механика, т. XXIII, № 5, 1970.
3. Хачатрян А. А. Чистый изгиб прямоугольной пластинки, изготовленной из разномодульного материала. Изв. АН Арм.ССР, Механика, т. XXV, № 1, 1972.
4. Мкртчян Дж. Э. Чистый изгиб круглого стержня, изготовленного из разномодульного материала. Изв. АН Арм.ССР, Механика, т. XXII, № 4, 1969.
5. Зволинский Н. В., Рус П. П. О некоторых задачах нелинейной теории упругости. ПММ, т. II, вып. 4, 1939.