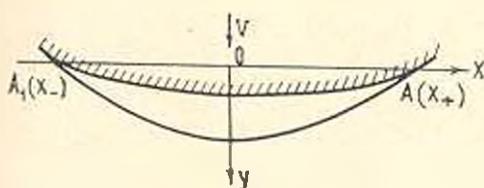


М. М. МИНАСЯН

ПРОНИКАНИЕ ТЕЛА В ПОЛУПРОСТРАНСТВО СЖИМАЕМОЙ  
 ЖИДКОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

В работе рассматривается плоская нестационарная задача о движении полупространства проводящей сжимаемой жидкости. Движение жидкости происходит от проникания твердого непроводящего тела в полупространство через свободную поверхность. Внешнее магнитное поле однородно и параллельно поверхности. В среде отсутствуют вязкость и теплопроводность, а электропроводность считается бесконечной. Выбор координатной системы указан на фиг. 1 (начало системы  $O$  берем в точке соприкосновения тела со средой, что соответствует



Фиг. 1.

времени  $t=0$ ). Скорость проникания  $V$  направлена по оси  $Oy$ . Контур тела задается кусочно-гладкой непрерывной функцией  $y=f(x)+Vt$ , выпуклой в сторону движения тела. Линия  $y=0$  при  $t>0$  пересекает контур в двух точках, скорости перемещения которых по поверхности среды суть  $R_+ = -\frac{V}{f'(x_+)}$  и  $R_- = \frac{V}{f'(x_-)}$ , где  $x_+(t)$  и  $x_-(t)$  находятся из уравнения  $f(x)+Vt=0$ . Будем считать, что  $\max|R_+, R_-| > a_0$  и  $N = \frac{a_0}{b_0} > 1$ , где  $a_0$  — скорость звука, а  $b_0$  — скорость Альфвена в невозмущенной среде.

Уравнения, описывающие движение жидкости, следующие [1]:

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{m_c}{\rho} (\nabla \times \bar{H} \times \bar{H})$$

$$\frac{d\bar{H}}{dt} = (\bar{H} \nabla) \bar{u} - \bar{H} (\nabla \bar{u})$$

$$\frac{d\bar{u}}{dt} + \nu \nabla \bar{u} = 0, \quad \frac{dS}{dt} = 0 \quad (1.1)$$

$\bar{u}(u_x, u_y)$  — вектор скорости,  $\bar{H}(H_x, H_y)$  — вектор напряжений магнитного поля,  $S$  — энтропия,  $p$  — давление,  $\rho$  — плотность.

Будем считать, что на поверхности жидкости отсутствуют поверхностные токи и заряды. На  $y=0$  граничные условия выражают непрерывность полного давления и компоненты магнитного поля  $H_y$ . Область возмущенного движения заключена между фронтом волны  $AA_1$  и частью контура тела  $C_0$ .

1. Рассмотрим линейную задачу. Примем  $V$  и  $\max|f'(x)|$  достаточно малыми, так, чтобы параметры возмущенного движения мало отличались от параметров покоя, а условия на поверхности тела перенесли на линию  $y=0$ . Для всех параметров примем  $Q = Q_0 + Q'$ , где  $Q_0$  — начальные значения, а  $Q'$  — возмущения этих параметров ( $\bar{u}_0 = 0, \rho_0 = 0$ ), и в дальнейшем отбросим индексы у  $Q'$ . Отбросив в (1.1) члены второго и более высокого порядка малости и исключив из системы все переменные  $Q$ , кроме  $u_y$ , получим уравнение

$$\begin{aligned} L[u_y] = 0, \quad L = \frac{\partial^4}{\partial t^4} - (a_0^2 + b_0^2) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \\ + a_0^2 b_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \\ a^2 = \left( \frac{dp}{d\rho} \right)_s, \quad b^2 = \nu_c \frac{H^2}{\rho} \end{aligned} \quad (1.2)$$

На  $y=0$  имеем условие

$$u_y = u_y^0(x, t) = \begin{cases} V\eta(\tau_+(t) - x), & x > 0 \\ V\eta(x - \tau_-(t)), & x < 0 \end{cases} \quad t > 0 \quad (1.3)$$

$\eta(t)$  — функция Хевисайда.

Найдем решение уравнения (1.2) для приложенного единичного импульса, сосредоточенного на  $y=0$  и во времени. Если  $u_y^0$  — обобщенное решение в этом случае, то  $u_y^0(x, 0, t) = \delta(x)\delta(t)$  есть граничное условие. Допустим, что  $u_y^0(x, y, t)$  порождается кусочно-непрерывной функцией  $\Phi(x, y, t)$  следующим образом:

$$u_y^0(x, y, t) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial t} \quad (1.4)$$

$\Phi$  — элементарный потенциал и  $L[\Phi] = 0$ .

Если  $\varphi(x, y, t) = \text{const}$  — фронт волны, порожденной от импульса, то

$$F[\varphi_x, \varphi_y, \varphi_t] = \varphi_t^4 - (a_0^2 + b_0^2) \varphi_x^2 (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) + a_0^2 b_0^2 \varphi_x^2 (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) \quad (1.5)$$

— характеристическое уравнение. Если в (1.5)  $\text{grad } \varphi$  заменить вектором  $(k, \beta)$ , а  $\varphi_t$  — через  $-\omega$ , то получим уравнение конуса нормалей  $F[-\omega, k, \beta] = 0$ , или, в силу однородности  $F$ ,  $F[-1, \lambda\mu] = 0$ , где  $\lambda = \frac{k}{\omega}$ ,  $\mu = \frac{\beta}{\omega}$ , (фронт волны  $\varphi = \psi(x, y) - t$ ), откуда имеем:

$$\mu = \sqrt{\frac{(a_0^2 \lambda^2 - 1)(b_0^2 \lambda^2 - 1)}{a_0^2 + b_0^2 - a_0^2 b_0^2 \lambda^4}} \quad (1.6)$$

Нормальная скорость поверхности  $\psi(x, y) - t$  (фазовая скорость) есть вектор  $c_0$ , ортогональный к поверхности  $F[-1, \lambda, \mu] = 0$ . Если ввести двумерный вектор  $(\cos \theta_0, \sin \theta_0)$ , имеющий направление нормали к фронту  $\psi(x, y) = \text{const}$ , то  $\cos \theta_0 = \lambda c_0$  и  $\sin \theta_0 = \mu c_0$ , и в силу однородности  $F$  для  $C_0$  получим дисперсионное уравнение  $F[-c_0, \cos \theta_0, \sin \theta_0] = 0$  или

$$c_0^4 - (a_0^2 + b_0^2) c_0^2 + a_0^2 b_0^2 \cos^2 \theta_0 = 0 \quad (1.7)$$

Тогда уравнение

$$x \cos \theta_0 + y \sin \theta_0 - c_0 t = 0$$

или

$$x\lambda + y\mu - t = 0 \quad (1.8)$$

представляет „плоский фронт волны“.

Бихарактеристические лучи, образующие локальный конус лучей (конус Молжа), описываются уравнениями

$$x = \frac{-\mu' t}{\mu - \lambda \mu'}, \quad y = \frac{t}{\mu - \lambda \mu'} \quad (1.9)$$

Как известно, конус лучей является двойственным по отношению к поверхности нормалей (то есть ставит в соответствие точкам поверхности нормалей геометрическое место полюсов плоскостей к ней).

Соотношения (1.9) описывают элементарную волну (групповую поляру) от точечного источника, введенную Фридрихсом [1]. При  $N \gg 1$  эта волна состоит из овала, соответствующего ускоренной магнитогазодинамической волне, и двух криволинейных треугольников, соответствующих медленным волнам.

Носитель функции  $u$  есть область, заключенная между быстрыми и медленными полярами. Области внутри треугольников в общем случае лакуны. В нашей задаче будем считать, что все возмущения распространяются с быстрой групповой скоростью.

В силу однородности можно ввести автомодельные координаты

$$\xi = \frac{x}{t}, \quad \eta = \frac{y}{t}$$

Тогда уравнения

$$\lambda \xi + \mu \eta - 1 = 0 \quad (1.10)$$

и

$$\xi = \frac{-\mu'}{\mu - \lambda\mu'}, \quad \eta = \frac{1}{\mu - \lambda\mu'} \quad (1.11)$$

описывают „плоский фронт“ и лучи в плоскости  $(\xi, \eta)$ . Уравнение (1.10) или (1.11) приводит в соответствие лучам комплексные значения плоскости  $\lambda$  с разрезом  $(-1/a_0, +1/a_0)$  вдоль вещественной оси.

Нетрудно видеть, что фронт волны описывается точками разреза, центр возмущения  $(\xi = 0, \eta = 0)$  — бесконечно удаленной точкой. Часть оси  $\eta = 0$ , находящейся в области возмущения, переходит в часть вещественной оси вне разреза, а ось  $\xi = 0$  переходит в мнимую ось (нас интересует полу плоскость  $\eta > 0$ ).

Имеет место теорема (аналог теоремы Смирнова-Соболева 2):

*Если в некоторой области  $G$  пространства  $(x, y, t)$ , (1.10) определяет  $t$  как комплексную функцию переменных  $x, y, t$ , то вещественная и мнимая части любой аналитической функции  $g(t)$  дают решение уравнения  $L[\Phi] = 0$ .*

Теорема доказывается непосредственной проверкой.

Итак,

$$u'_t = \operatorname{Re} \left[ \frac{\partial^2 g(\lambda)}{\partial x \partial t} \right]$$

или учитывая (1.8)

$$u'_t = \operatorname{Re} \left[ -\frac{\lambda}{\Delta} g'' + \frac{\Delta - \lambda\mu''}{\Delta^2} g' \right] = \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\Delta} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{\lambda}{\Delta} g' \right) \right] \quad (1.12)$$

$$\Delta = x - \mu' y$$

На вещественной оси плоскости  $\lambda$  вне разрезов из (1.12) получаем условие

$$\operatorname{Re} \left[ \frac{\partial}{\partial \lambda} (\lambda g') \right] = 0$$

Отбрасывая при интегрировании мнимые аддитивные постоянные, имеем

$$g(\lambda) = i C \ln \lambda \quad (1.13)$$

Здесь  $C$  — вещественная постоянная, которая находится из условия

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u'_t dx dt = 1$$

Из (1.13) на  $y=0$  имеем

$$\operatorname{Re}[iC \ln \lambda] = C \left[ 1 - \eta \left( \frac{t}{x} \right) \right] = -C \pi [1 - \eta(t) \eta(x) - \eta(-t) \eta(-x)],$$

откуда

$$u_y^0 = 2\pi C \delta(x) \delta(t)$$

то есть

$$C = \frac{1}{2\pi}$$

Таким образом,

$$g(t) = \frac{i}{2\pi} \ln \lambda$$

Полученная функция регулярна в плоскости  $\lambda$  с разрезом, имеет особенность на бесконечности и удовлетворяет предельному условию на вещественной оси.

Окончательно

$$u_y^0 = \operatorname{Re} \left\{ \frac{i}{2\pi} \frac{\partial^2 \ln \lambda}{\partial x \partial t} \right\}$$

или учитывая (1.8)

$$u_y^0 = \operatorname{Re} \left\{ \frac{-i}{2\pi} \frac{\mu''(i)}{[x + \mu'(i)y]^2} \right\} \quad (1.13')$$

Решение линейной задачи представится в виде свертки

$$u_y = u_y^0 * u_y^1$$

то есть

$$u_y(x, y, t) = -\frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \int_{\Gamma} \int_{\bar{\Gamma}} \frac{i u_y^0(\bar{x}, \bar{t}) \mu''(\bar{\lambda}) y}{[(x-\bar{x}) + \mu'(\bar{\lambda})y]^2} d\bar{x} d\bar{t} \quad (1.14)$$

Здесь  $\bar{\lambda}$  определяется из уравнения

$$(x - \bar{x})\bar{\lambda} + \mu(\bar{\lambda})y - (t - \bar{t}) = 0 \quad (1.15)$$

При выходе на свободную поверхность граничное условие представляет условие регуляризации функции  $u_y^0(x, t)$ . Действительно, на  $y=0$   $u_y^0 = \delta(x) \delta(t)$  и имеем

$$u_y(x, 0, t) = u_y^0 * \delta(x) \delta(t) = u_y^0(x, t)$$

Область интегрирования показана на фиг. 2.

Кривая  $\Gamma$  задается уравнениями

$$\begin{cases} (x - \bar{x})\bar{\lambda} + \mu(\bar{\lambda})y - (t - \bar{t}) = 0 \\ x - \bar{x} + \mu'(\bar{\lambda})y = 0 \end{cases} \quad (1.16)$$

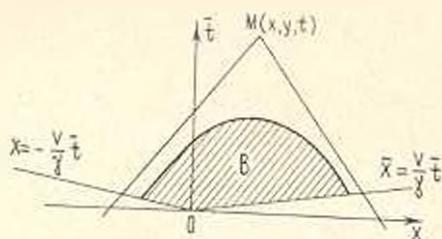
При вычислении интеграла (1.14) берутся главные значения по Адамару.

Рассмотрим частную задачу, когда тело представляет клин раствором  $\gamma = 2\gamma_1$ , ( $\gamma \ll 1$ ). Тогда  $u_y^0(x, t) = V$  и  $\bar{x}_+ = \frac{V}{\gamma} \bar{t}$ ,  $\bar{x}_- = -\frac{V}{\gamma} \bar{t}$ .

Вычисляя интеграл (1.14) для этого случая, имеем

$$u_y = \frac{V}{\pi} \text{Im} \ln \frac{\gamma + \lambda V}{\gamma - \lambda V} \quad (1.17)$$

причем, на фронте волны  $|\lambda V| < \gamma$  и  $u_y = 0$ , а на поверхности (на клине)  $|\lambda V| > \gamma$  и  $u_y = V$ .



Фиг. 2

2. Найдем решение нелинейной задачи вблизи фронта волны ( $BB_1$ ). Линейный фронт задан соотношениями (1.11) при  $\lambda = \lambda_0 = \frac{\cos \theta_0}{C_0}$ . Линию же, близкую к ней, определим соотношениями

$$\xi = \frac{-\mu'}{-\lambda \mu' + \mu} (1 - \alpha), \quad \eta = \frac{1}{-\lambda \mu' + \mu} (1 - \alpha) \quad (2.1)$$

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_1, \quad |\lambda_1| \ll 1, \quad \alpha \ll 1$$

Разлагая  $\xi$  и  $\eta$  в ряд по степеням  $\lambda_1$ , учитывая (1.11), оставляя члены первого порядка малости и принимая  $\xi(\lambda) = \xi(\lambda_0)$ , находим

$$\lambda_1 = \frac{-\lambda_0 \mu_0' + \mu_0}{\mu_0 \mu_0'} \mu_0' x, \quad \mu_0 = \mu(\lambda_0) \quad (2.2)$$

Подставляя (2.2) в (2.1), имеем уравнение кривой ( $CC_1$ )

$$\xi = \frac{-\mu_0'}{-\lambda_0 \mu_0' + \mu_0}, \quad \eta = \frac{1}{-\lambda_0 \mu_0' + \mu_0} - \frac{\alpha}{\mu_0} \quad (2.3)$$

Комплексное значение  $\lambda = \lambda_0 + \lambda_1$  на линии ( $CC_1$ ) находим из уравнения

$$(\lambda_0 + \lambda_1) \xi + \mu(\lambda_0 + \lambda_1) \left( \eta_0 - \frac{\alpha}{\mu_0} \right) - 1 = 0$$

Удерживая члены первого порядка малости, имеем

$$\lambda' = \sqrt{\frac{2\alpha}{\mu_0^2 \gamma_0}}$$

или, так как

$$\mu_0^2 < 0, \quad \lambda' = f \sqrt{\frac{-2\alpha}{\mu_0^2 \gamma_0}} \quad (2.4)$$

Подставляя (2.4) в линейное решение (1.17), учитывая, что  $\arctg z \approx \alpha$  при малых  $\alpha$  (исключаем из рассмотрения окрестности точек  $C$  и  $C_1$ , ибо там  $\alpha \gg 1$ ) имеем

$$u_y = \frac{V^2}{\pi \gamma \left(1 - \frac{\lambda_0^2 V^2}{\gamma^2}\right)} \sqrt{\frac{-2\alpha}{\mu^2(\lambda_0) \gamma_0}} = f(\lambda_0) V^{-2} \quad (2.5)$$

Производные  $u_y$  по  $\lambda$ , („внутренние“ вдоль линии  $CC_1$ ) имеют порядок  $V^{-2}$ , а производные  $u_y$  по  $\alpha$ , („выводящие“), — порядок  $(V^{-2})^{-1}$ . Это обстоятельство указывает на то, что решение (2.5) вблизи фронта — типа „пограничного слоя“. Если в качестве координатной системы (вместо  $\xi, \eta$ ) вблизи фронта выбрать криволинейную систему  $(\lambda, \alpha)$ , то следует ожидать, что для всех функций их производные по  $\lambda$  пренебрежимо малы по сравнению с производными по  $\alpha$ , в силу чего коэффициенты при производных по  $\lambda$  можно линеаризировать. Замена переменных осуществляется формулами (2.1), причем

$$\frac{D(\xi, \eta)}{D(\lambda, \alpha)} = \frac{-\mu^2}{(-\lambda \mu' + \mu)^2} (1 - \alpha) \neq 0, \quad \alpha$$

Если в системе (1.1) сначала перейти к переменным  $(\xi, \eta)$ , а затем к  $\lambda, \alpha$  и учитывать вышеописанные соображения об оценках величин, входящих в эти уравнения, получим систему

$$\begin{aligned} A \frac{\partial u_x}{\partial \alpha} + \mu_0 \frac{H_y}{\rho} \left( \lambda \frac{\partial H_y}{\partial \alpha} - \mu \frac{\partial H_x}{\partial \alpha} \right) + \frac{\lambda}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \alpha} &= - \frac{m}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial \lambda} \\ A \frac{\partial u_y}{\partial \alpha} + \mu_0 \frac{H_x}{\rho} \left( \mu \frac{\partial H_x}{\partial \alpha} - \lambda \frac{\partial H_y}{\partial \alpha} \right) + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \alpha} &= \\ = - m \left[ \frac{\mu_0 H_0}{\rho_0} \left( \frac{\partial H_x}{\partial \lambda} \mu' - \frac{\partial H_y}{\partial \lambda} \right) + \frac{\mu'}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial \lambda} \right] & \quad (2.6) \\ A \frac{\partial \sigma}{\partial \alpha} + \rho \left( \lambda \frac{\partial u_x}{\partial \alpha} + \mu \frac{\partial u_y}{\partial \alpha} \right) &= - m \left[ \rho_0 \left( \frac{\partial u_x}{\partial \lambda} + \mu' \frac{\partial u_y}{\partial \lambda} \right) \right] \\ A \frac{\partial H_x}{\partial \alpha} - H_y \mu \frac{\partial u_x}{\partial \alpha} + \mu H_x \frac{\partial u_y}{\partial \alpha} &= - m H_0 \mu' \frac{\partial u_y}{\partial \lambda} \\ A \frac{\partial H_y}{\partial \alpha} - H_x \lambda \frac{\partial u_y}{\partial \alpha} + H_y \lambda \frac{\partial u_x}{\partial \alpha} &= m H_0 \frac{\partial u_y}{\partial \lambda} \end{aligned}$$

где

$$A = i u_x + \mu u_y - (1 - \alpha), \quad m = \frac{-i \mu' + \mu}{\mu^n (1 - \alpha)}$$

Из (2.6) получаем одно уравнение, разрешенное относительно  $\frac{\partial u_x}{\partial z}$

$$\begin{aligned} & \left[ \left( A^2 - \frac{\mu_c H_x^2}{\rho C_0^2} - \mu^2 a^2 \right) \left( A^2 - \frac{\mu_c H_y^2}{\rho C_0^2} - \lambda^2 a^2 \right) - \left( \frac{\mu_c H_x H_y}{\rho C_0^2} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \lambda \mu a^2 \right)^2 \right] \frac{\partial u_y}{\partial z} = m \left[ \frac{\mu_c H_0}{\rho_0} \left( \frac{\partial H_x}{\partial \lambda} \mu' - \frac{\partial H_y}{\partial \lambda} \right) + \frac{\mu' a_0^2}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial i} + \right. \\ & \left. + b_0^2 \frac{\partial u_y}{\partial i} (\lambda + \mu \mu') + \mu a_0^2 \left( \frac{\partial u_x}{\partial i} + \mu' \frac{\partial u_y}{\partial i} \right) \right] (1 - \lambda^2 a_0^2) + \\ & + m \left[ \frac{a_0^2}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial i} + i a_0^2 \left( \frac{\partial u_x}{\partial i} + \mu' \frac{\partial u_y}{\partial i} \right) \right] i \mu a_0^2 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Линейная часть в квадратных скобках при  $\frac{\partial u_x}{\partial z}$  равна нулю и все члены в (2.7) имеют одинаковый порядок. В правой части все функции выразим через  $u_x$  по условиям совместимости на характеристике [3]

$$\begin{aligned} & -c^2 H + H \delta u_n - H_n \delta u = 0 \\ & -c \rho \delta u + a^2 n \delta \rho + u_n \delta (H^2 H) - \mu_c H \delta H = 0 \\ & -c \delta \rho + \rho \delta u_n = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Уравнение политропы берем в виде

$$p = B \left[ \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^n - 1 \right] \quad (2.9)$$

где  $\frac{\rho}{B}$  считается малым.

Из (2.7) для  $u_y$  получаем уравнение

$$(K u_y + 2x) \frac{\partial u_y}{\partial z} - u_y = 0 \quad (2.10)$$

где

$$K(i_0) = \frac{1 - 2 \frac{b_0^2 \lambda_0^2}{c_0^2} + n \left( 1 - \frac{b_0^2}{c_0^2} \right) \left( 1 - b_0^2 i_0^2 \right) - \frac{b_0^2}{a_0^2} + 3 \frac{b_0^2}{c_0^2} + \frac{b_0^4}{a_0^2 c_0^2}}{c_0 \rho_0 \left( 1 - \frac{a_0^2 b_0^2 \lambda_0^2}{c_0^2} \right)}$$

Интегрируя (2.10), имеем

$$z = -Ku_v + C_1(t) u_y^2 \quad (2.11)$$

$C_1(t)$  определяется из условия на выходе из области „пограничного слоя“ вблизи фронта, где существенным является нелинейное решение. На выходе же решение переходит в линейное.

Окончательно

$$z = -Ku_v + \frac{u_y^2}{[f(\lambda_0)]^2} \quad (2.12)$$

Уравнение характеристической поверхности в переменных  $(t, z)$  имеет вид [4]

$$c + u_n = \frac{1 - \frac{\partial z}{\partial t}}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 - 2 \frac{\partial z}{\partial t} \left[ \frac{-\lambda \mu' + \mu}{\mu''(t-z)} \right] (\lambda + \mu \mu')}} \quad (2.13)$$

$z = zf$

где  $c$  — скорость характеристики,  $u_n$  — нормальная составляющая скорости частиц на характеристике. Скорость  $c$  удовлетворяет дисперсионному уравнению

$$c^4 - c^2 \left[ a^2 + \mu_c \frac{H_x^2 + H_y}{\rho} \right] + \frac{a^2}{\rho} \mu_c H_x^2 = 0 \quad (2.14)$$

Если  $\theta$  — угол наклона нормали нелинейной характеристики, то  $\theta = \theta_0 + \theta'$ ,  $\theta'$  мало и

$$\operatorname{ctg} \theta = \frac{i_0}{\mu_0} - \frac{\mu_0^2 + \lambda_0^2}{i_0^2} \theta' \quad (2.15)$$

Тогда, учитывая (2.1), получим

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\mu''(t-z)(\lambda^2 + \mu^2)}{(-\lambda \mu' + \mu)^2} \theta' \quad (2.16)$$

Пусть  $c = c_0 + c'$ , тогда из (2.14) и (2.9) имеем

$$c' = \frac{(n-1)(c_0^2 - b_0^2) - (n-2)b_0^2 c_0^{-2}(c_0^2 - b_0^2) \cos^2 \theta_0 - b_0^2 a_0^{-2}(c_0^2 - b_0^2)}{2 \sin \theta_0 (2c_0^2 - a_0^2 - b_0^2)} u_y + \frac{b_0^2 \sin^2 \theta_0}{\sin \theta_0 (2c_0^2 - a_0^2 - b_0^2)} u_y + \frac{a_0^2 b_0^2 \cos \theta_0 \sin \theta_0}{c_0 (2c_0^2 - a_0^2 - b_0^2)} \theta' \quad (2.17)$$

Если (2.16), (2.17) и значение  $u_n$ , выраженное через  $u_y$ , подставить в (2.13), то члены с  $\theta'$  сократятся, и мы получим на линейной характеристике

$$-c_0 \frac{\partial z}{\partial t} = -c_0 z = \frac{Ku_v}{2} \quad (2.18)$$

Аналогично поступая с нелинейным фронтом, а именно, выписав уравнение вида (2.13) с  $D$  в левой части, заменив  $\tau$  через  $\tau_0$  в правой, подставив вместо (2.8) динамические условия совместности (законы сохранения) на фронте, считая  $v = \theta_0 + v'$ ,  $D = c_0 + D'$ , где  $D$  — скорость,  $v$  — угол наклона нормали нелинейного фронта,  $v'$  и  $D'$  — малые поправки, получим соотношения:

$$D' = \frac{(c_0^2 - b_0^2) \left| \frac{n-1}{2} \frac{c_0^2}{a_0^2} (c_0^2 - b_0^2) + \frac{b_0^2 c_0^2}{a_0^2} + c_0^2 - 2b_0^2 \cos^2 \theta_0 \right| + \frac{b_0^2 c_0^2}{2}}{2 \sin \theta_0 (2c_0^2 - a_0^2 - b_0^2)} u_y +$$

$$+ \frac{a^2 b^2 \cos \theta_0 \sin \theta_0}{c_0 (a_0^2 b_0^2 \cos^2 \theta_0 - c_0^2)} v' \quad (2.19)$$

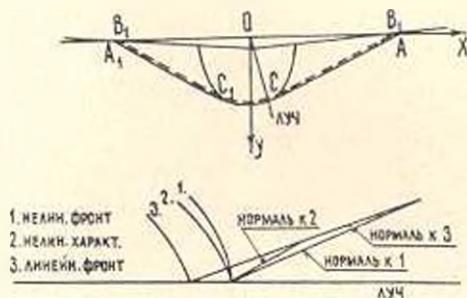
$$\frac{\partial \tau_n}{\partial t} = \frac{\mu'' (t - \tau_n) (\lambda^2 + \mu^2)}{(-\lambda \mu' + \mu)^2} v' \quad (2.20)$$

и

$$-c_0 \frac{\partial \tau_n}{\partial t} = -c_0 \alpha_n = \frac{K}{4} u_y \quad (2.21)$$

Из (2.18) и (2.20) непосредственно за нелинейным фронтом получаем связь

$$\alpha_n = \frac{1}{2} \alpha$$



Фиг. 3

Тогда условия (2.16) и (2.20), если в их правых частях отбросить малые величины выше первого порядка, дают

$$v' = \frac{1}{2} \theta' \quad (2.22)$$

Нетрудно видеть, что (2.22) приводит к соотношению

$$D = \frac{c + u_1 + c_0}{2}$$

которое имеет характер общего для задач о движении слабой волны в идеальной проводящей среде.

Геометрическая интерпретация формулы (2.22) представлена на фиг. 3.

Используя (2.21) и (2.12), находим  $u_y$  непосредственно за фронтом

$$u_y = \frac{K(\lambda)}{2} [f(\lambda)]^2$$

Из условий совместимости на фронте легко находятся все параметры течения магнитного поля за фронтом и скорость самого фронта

$$H_x = H_0(1 - \mu_0 u_y), \quad H_z = -H_0 \gamma_0 u_y, \quad u_1 = \frac{c^2 - b_0^2}{c_0^2} \frac{\gamma_0}{\mu_0} u_y$$

$$\rho = \rho_0 \left( 1 + \frac{c_0^2 - b_0^2}{c_0^2 a_0^2} \frac{u_y}{\mu_0} \right), \quad a = a_0 \left( 1 + \frac{n-1}{2} \frac{c_0^2 - b_0^2}{c_0^2 a_0^2} \frac{u_y}{\mu_0} \right)$$

$$D = \frac{c + u_n + c_0}{2}$$

В заключение автор благодарит А. Г. Багдоева за постановку задачи и обсуждение результатов.

Ереванский государственный  
университет

Поступила 29 III 1971

Մ. Մ. ԽԻՆԱՅԱՆ

ՄԱՐՄՆԻ ԹԱՓԱՆՏՈՒՄԸ ՍԵՂՄԵՆԻ ՀԵՂՈՒԿԻ ԿԻՊԱՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ  
ՄԵՋ՝ ՄԱԳՆԵՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏԻ ԱՌԿԱՅՈՒԹՅԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո մ

Աշխատանքում դիտարկվում է հաղորդիչ հեղուկի հարթ ոչ ստացիոնար շարժումը մագնիսական դաշտում: Շարժումը առաջանում է ոչ հաղորդիչ մարմնի թափանցումից կիսահարթովյան մեջ: Մագնիսական դաշտը զուգահեռ է ազատ մակերևույթին: Գծային խնդիրը լուծված է Սմիթնով-Սորոլևի մեթոդով: Ենդրի ոչ դժային լուծումը հարվածային ալիքի ճակատի մոտակայքում կատարված է սևպի համար: Ցույց է տրված, որ շարժումը ալտակող միաչափ է: Որոշված են զաղամտղնիսադինամիկական դաշտի սլարամենարերը և ալիքի տարածման արագությունը:

## THE BODY PENETRATION INTO A COMPRESSIBLE FLUID SEMISPACE IN THE PRESENCE OF A MAGNETIC FIELD

M. M. MINASIAN

## Summary

The plane nonstationary problem of a conducting compressible fluids motion due to a rigid nonconducting body penetration into fluid semispace through free surface is considered.

The linear problem is solved by Smirnov-Sobolev's method. The nonlinear solution for a wedge near the shock wave front is obtained. The gas parameters and wave velocity are determined.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Бай-Ши-И. Магнитная гидродинамика. Изд. Мир, М., 1964.
2. Смирнов В. И. Курс высшей математики. ГИТТЛ, т. 3, ч. 2, М., 1953.
3. Калихман Л. Е. Элементы магнитной газодинамики. Атомиздат, М., 1964.
4. Багдоян А. Г. Некоторые нелинейные задачи о движении сжимаемой жидкости. Изд. АН Арм. ССР, Ереван, 1967.
5. Курант. Уравнения с частными производными. Изд. Мир, М., 1964.