ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

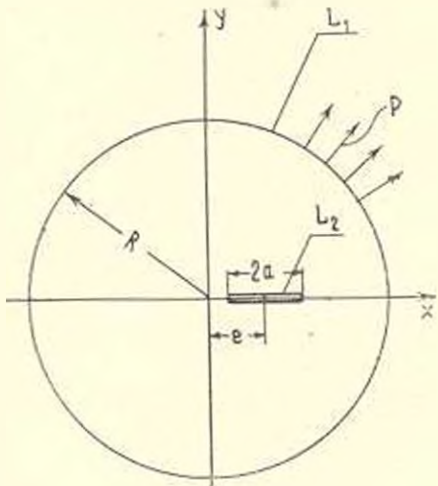
Մեխանիկա XXV, № 2, 1972 Механика

С. С. ЗАРГАРЯН, Р. А. ЭНФИАДЖЯН

РАВНОМЕРНО РАСТЯНУТАЯ КРУГЛАЯ ПЛАСТИНКА С РАДИАЛЬНОЙ ТРЕЩИНОЙ

Рассматривается плоская задача теории упругости для круговой области, ограниченной окружностью L_1, ослабленной радиальным разрезом L_2, середина которого, в общем случае, не совпадает с центром круга. Предполагается, что по внешнему контуру действуют равномерно-распределенные нормальные напряжения интенсивности P (фиг. 1), а кромки разреза свободны от внешних напряжений.

Для решения задачи применяется метод Д. И. Шермана. Решение сводится к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений. Доказывается квази-вполне регулярность этих бесконечных систем.



Фиг. 1.

Приведен численный пример.

1. Как известно [1], решение плоской задачи теории упругости для произвольной двусвязной области, ограниченной извне контуром L_1, а изнутри контуром L_2, когда по внешнему контуру действуют равномерно-распределенные напряжения P, а внутренний контур свободен от напряжений, сводится к определению голоморфных в рассматриваемой области функций $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ при следующих граничных условиях:

$$\varphi_1(t) + t\overline{\varphi_1'(t)} + \overline{\psi_1(t)} = Pt + C \quad \text{на } L_1 \tag{1.1}$$

$$\varphi_1(t) + t\overline{\varphi_1'(t)} + \overline{\psi_1(t)} = 0 \quad \text{на } L_2 \tag{1.2}$$

Здесь C — постоянная, подлежащая определению.

В данной задаче L_1 представляет окружность радиуса R, а L_2 — трещина длиной $2a$, середина которой находится на расстоянии e от центра круга. Расположение осей x и y показано на фиг. 1. Пользуясь методом Д. И. Шермана [2], на круговом контуре введем вспомогательную неизвестную функцию $\omega(t)$ по условию

$$\varphi_1(t) - t\overline{\varphi_1'(t)} - \overline{\psi_1(t)} = 2\omega(t) \quad \text{на } L_1 \tag{1.3}$$

Для установления формул перехода от функции $\omega(t)$ к функциям $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$, сложив (1.1) и (1.3), получим

$$\varphi_1(t) - \lim_{\substack{z\to t \\ \text{изнутри}}} \frac{1}{2\pi i}\int_{L_1} \frac{\omega(t)\,dt}{t-z} - \frac{Pt + C}{2} = -\lim_{\substack{z\to t \\ \text{извне}}} \frac{1}{2\pi i}\int_{L_1} \frac{\omega(t)\,dt}{t-z} \tag{1.4}$$

Введем, далее, функцию $\varphi(z)$, голоморфную вне L_2

$$\varphi(z) = \begin{cases} \varphi_1(z) - \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{L_1} \frac{\omega(t)\,dt}{t-z} - \dfrac{Pz + C}{2} & \text{внутри } L_1 \\[2ex] -\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{L_1} \frac{\omega(t)\,dt}{t-z} & \text{вне } L_1 \end{cases} \tag{1.5}$$

Из (1.4) видно, что предельные значения функции $\varphi(z)$ извне и изнутри на контуре L_1 совпадают, следовательно, $\varphi(z)$ голоморфна всюду вне L_2.

Из (1.1) и (1.3) имеем

$$\psi_1(t) + \lim \frac{1}{2\pi i}\int_{L_1} \frac{\overline{\omega(t)} + \bar{t}\,\omega'(t)}{t-z}\,dt - \frac{\bar{C}}{2} =$$

$$= \lim \frac{1}{2\pi i}\int_{L_1} \frac{\overline{\omega(t)} + \bar{t}\,\omega'(t)}{t-z}\,dt \tag{1.6}$$

Аналогичным образом вводим голоморфную вне L_2 функцию $\psi(z)$

$$\psi(z) = \begin{cases} \psi_1(z) + \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{L_1} \frac{\overline{\omega(t)} + \bar{t}\,\omega'(t)}{t-z}\,dt - \dfrac{\bar{C}}{2} & \text{внутри } L_1 \\[2ex] \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{L_1} \frac{\overline{\omega(t)} + \bar{t}\,\omega'(t)}{t-z}\,dt & \text{вне } L_1 \end{cases} \tag{1.7}$$

Функцию $\omega(t)$ на окружности L_1 радиуса R будем искать в виде

$$\omega(t) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\left(\frac{t}{R}\right)^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k\left(\frac{R}{t}\right)^k \tag{1.8}$$

где a_k и b_k — действительные числа.

Учитывая (1.8), из (1.5) и (1.7) получим

$$\varphi(z) = \varphi_1(z) - \alpha_0 - \sum_{k=1}^{\infty} a_k\left(\frac{z}{R}\right)^k - \frac{Pz + C}{2}$$

$$\psi(z) = \psi_1(z) + \bar{\alpha}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k\left(\frac{z}{R}\right)^k + \sum_{k=2}^{\infty} k a_k\left(\frac{z}{R}\right)^{k-2} - \frac{\bar{C}}{2} \tag{1.9}$$

Примем $\alpha_0 = 0$, так как выбор α_0 не влияет на граничные условия (1.1) и (1.2).

Подставив (1.9) в граничное условие (1.2), получим

$$\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = -Pt - C + \sum_{k=1}^{\infty} b_k\left(\frac{\bar{t}}{R}\right)^k - \sum_{k=1}^{\infty} a_k\left(\frac{t}{R}\right)^k -$$

$$- t\sum_{k=1}^{\infty} k a_k \frac{\bar{t}^{\,k-1}}{R^k} + \sum_{k=2}^{\infty} k a_k\left(\frac{\bar{t}}{R}\right)^{k-2} \tag{1.10}$$

Таким образом, определение функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ сводится к граничной задаче для односвязной области, представляющей внешность контура L_2. Для решения этой вспомогательной задачи будем рассматривать трещину как предельный случай эллипса. Отобразим внешность эллипса на внешность единичной окружности посредством рациональной функции

$$z = A\left(\zeta + \frac{m}{\zeta}\right) + e \tag{1.11}$$

где $A = \dfrac{a+b}{2}$, $m = \dfrac{a-b}{a+b}$ (a и b — полуоси эллипса); при $m = 1$ эллипс обращается в трещину. Подставив (1.11) при $\zeta = \sigma = e^{i\theta}$ в (1.10), после несложных преобразований получим условие на окружности $|\zeta| = 1$:

$$\varphi^*(\sigma) + \frac{1}{\sigma}\frac{\sigma^2 + m}{1 - m\sigma^2}\overline{\varphi^{*\prime}(\sigma)} + \frac{e}{A(1 - m\sigma^2)}\overline{\varphi^{*\prime}(\sigma)} + \overline{\psi^*(\sigma)} = f(\sigma) \tag{1.12}$$

где

$$\varphi^*(\sigma) = \varphi[z(\sigma)], \qquad \psi^*(\sigma) = \psi[z(\sigma)]$$

$$f(\sigma) = -P\left[A\left(\sigma + \frac{m}{\sigma}\right) + e\right] - C +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{R^k}\left(\sum_{\nu=0}^{k}\sigma^{\nu}\sum_{n=\nu}^{k}{}^{*}C_k^nA^ne^{k-n}C_n^{\frac{n+\nu}{2}}m^{\frac{n+\nu}{2}}+\right.$$

$$\left.+\sum_{\nu=1}^{k}\sigma^{-\nu}\sum_{n=\nu}^{k}{}^{*}C_k^nA^ne^{k-n}C_n^{\frac{n-\nu}{2}}m^{\frac{n-\nu}{2}}\right)-$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{R^k}\left(\sum_{\nu=0}^{k}\sigma^{\nu}\sum_{n=\nu}^{k}{}^{*}C_k^nA^ne^{k-n}C_n^{\frac{n-\nu}{2}}m^{\frac{n-\nu}{2}}+\right.$$

$$\left.+\sum_{\nu=1}^{k}\sigma^{-\nu}\sum_{n=\nu}^{k}{}^{*}C_k^nA^ne^{k-n}C_n^{\frac{n+\nu}{2}}m^{\frac{n+\nu}{2}}\right)-$$

$$-\left[A\left(\sigma+\frac{m}{\sigma}\right)+e\right]\sum_{k=1}^{\infty}\frac{ka_k}{R^k}\left(\sum_{\nu=0}^{k-1}\sigma^{\nu}\sum_{n=\nu}^{k-1}{}^{*}C_{k-1}^nA^ne^{k-n-1}C_n^{\frac{n+\nu}{2}}m^{\frac{n+\nu}{2}}+\right.$$

$$\left.+\sum_{\nu=1}^{k-1}\sigma^{-\nu}\sum_{n=\nu}^{k-1}{}^{*}C_{k-1}^nA^ne^{k-1-n}C_n^{\frac{n-\nu}{2}}m^{\frac{n-\nu}{2}}\right)+$$

$$+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{ka_k}{R^{k-2}}\left(\sum_{\nu=0}^{k-2}\sigma^{\nu}\sum_{n=\nu}^{k-2}{}^{*}C_{k-2}^nA^ne^{k-n-2}C_n^{\frac{n+\nu}{2}}m^{\frac{n+\nu}{2}}+\right.$$

$$\left.+\sum_{\nu=1}^{k-2}\sigma^{-\nu}\sum_{n=\nu}^{k-2}{}^{*}C_{k-2}^nA^ne^{k-2-n}C_n^{\frac{n-\nu}{2}}m^{\frac{n-\nu}{2}}\right).$$

Звездочка (здесь и в последующем) у символов внутренних сумм указывает, что индекс n принимает либо только четные значения, либо только лишь нечетные значения.

Пользуясь известным методом Н. И. Мусхелишвили решения плоской задачи для бесконечной плоскости с эллиптическим отверстием, получим выражения для функций $\varphi^*(\zeta)$ и $\psi^*(\zeta)$, голоморфных вне единичной окружности $|\zeta|=1$:

$$\varphi^*(\zeta)=-PAm\frac{1}{\zeta}+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{R^k}\sum_{\nu=1}^{k}\zeta^{-\nu}\sum_{n=\nu}^{k}{}^{*}C_k^nA^ne^{k-n}C_n^{\frac{n+\nu}{2}}m^{\frac{n+\nu}{2}}-$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{R^k}\sum_{\nu=1}^{k}\zeta^{-\nu}\sum_{n=\nu}^{k}{}^{*}C_k^nA^ne^{k-n}C_n^{\frac{n+\nu}{2}}m^{\frac{n+\nu}{2}}+$$

$$+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{ka_k}{R^{k-2}}\sum_{\nu=1}^{k-2}\zeta^{-\nu}\sum_{n=\nu}^{k-2}{}^{*}C_{k-2}^nA^ne^{k-n-2}C_n^{\frac{n-\nu}{2}}m^{\frac{n-\nu}{2}}-$$

$$-e\sum_{k=2}^{\infty}\frac{ka_k}{R^k}\sum_{\nu=1}^{k-1}\zeta^{-\nu}\sum_{n=\nu}^{k-1}{}^{*}C_{k-1}^nA^ne^{k-n-1}C_n^{\frac{n-\nu}{2}}m^{\frac{n-\nu}{2}}-$$

$$-\frac{Am}{\zeta}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{ka_k}{R^k}\sum_{n=0}^{k-1}{}' C_{k-1}^n A^n e^{k-1-n} C_n^{\frac{n}{2}} m^{\frac{n}{2}} -$$

$$-Am\sum_{k=2}^{\infty}\frac{ka_k}{R^k}\sum_{\nu=1}^{k-1}\zeta^{-\nu-1}\sum_{n=\nu}^{k-1}{}' C_{k-1}^n A^n e^{k-1-n} C_n^{\frac{n-\nu}{2}} m^{\frac{n+\nu}{2}} -$$

$$-A\sum_{k=3}^{\infty}\frac{ka_k}{R^k}\sum_{\nu=2}^{k-1}\zeta^{-\nu+1}\sum_{n=\nu}^{k-1}{}' C_{k-1}^n A^n e^{k-1-n} C_n^{\frac{n-\nu}{2}} m^{\frac{n-\nu}{2}} \tag{1.13}$$

$$\psi^*(\zeta) = -\zeta\frac{1+m\zeta^2}{\zeta^2-m}\varphi^{*\prime}(\zeta) - \frac{\zeta^2 e}{A(\zeta^2-m)}\varphi^{*\prime}(\zeta) -$$

$$-PA\frac{1}{\zeta} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{R^k}\sum_{\nu=1}^{k}\zeta^{-\nu}\sum_{n=\nu}^{k}{}' C_k^n A^n e^{k-n} C_n^{\frac{n+\nu}{2}} m^{\frac{n+\nu}{2}} -$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{R^k}\sum_{\nu=1}^{k}\zeta^{\nu}\sum_{n=\nu}^{k}{}' C_k^n A^n e^{k-n} C_n^{\frac{n-\nu}{2}} m^{\frac{n-\nu}{2}} +$$

$$+\sum_{k=3}^{\infty}\frac{ka_k}{R^{k-2}}\sum_{\nu=1}^{k-2}\zeta^{\nu}\sum_{n=\nu}^{k-2}{}' C_{k-2}^n A^n e^{k-n-2} C_n^{\frac{n-\nu}{2}} m^{\frac{n+\nu}{2}} -$$

$$-e\sum_{k=2}^{\infty}\frac{ka_k}{R^k}\sum_{\nu=1}^{k-1}\zeta^{\nu}\sum_{n=\nu}^{k-1} C_{k-1}^n A^n e^{k-n-1} C_n^{\frac{n+\nu}{2}} m^{\frac{n+\nu}{2}} -$$

$$-\frac{A}{\zeta}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{ka_k}{R^k}\sum_{n=0}^{k-1}{}' C_{k-1}^n A^n e^{k-n-1} C_n^{\frac{n}{2}} m^{\frac{n}{2}} -$$

$$-A\sum_{k=2}^{\infty}\frac{ka_k}{R^k}\sum_{\nu=1}^{k-1}\zeta^{-\nu-1}\sum_{n=\nu}^{k-1}{}' C_{k-1}^n A^n e^{k-n-1} C_n^{\frac{n+\nu}{2}} m^{\frac{n+\nu}{2}} -$$

$$-Am\sum_{k=2}^{\infty}\frac{ka_k}{R^k}\sum_{\nu=2}^{k-1}\zeta^{-\nu+1}\sum_{n=\nu}^{k-1}{}' C_{k-1}^n A^n e^{k-n-1} C_n^{\frac{n+\nu}{2}} m^{\frac{n+\nu}{2}} \tag{1.14}$$

Постоянная C определяется из граничного условия (1.12)

$$C = -Pe + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{R^k}\sum_{n=0}^{k}{}' C_k^n A^n e^{k-n} C_n^{\frac{n}{2}} m^{\frac{n}{2}} -$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{R^k}\sum_{n=0}^{k}{}' C_k^n A^n e^{k-n} C_n^{\frac{n}{2}} m^{\frac{n}{2}} +$$

$$+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{ka_k}{R^{k-2}}\sum_{n=0}^{k-2}{}' C_{k-2}^n A^n e^{k-n-2} C_n^{\frac{n}{2}} m^{\frac{n}{2}} -$$

$$
- e \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k a_k}{R^k} \sum_{n=0}^{k-1} C_{k-1}^n A^n e^{k-1-n} C_n^{\frac{n}{2}} m^{\frac{n}{2}} -
$$

$$
- A \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k a_k}{R^k} \sum_{n=0}^{k-1} C_{k-1}^n A^n e^{k-1-n} C_n^{\frac{n-1}{2}} m^{\frac{n-1}{2}} -
$$

$$
- A m \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k a_k}{R^k} \sum_{n=1}^{k-1} C_{k-1}^n A^n e^{k-1-n} C_n^{\frac{n+1}{2}} m^{\frac{n-1}{2}} \tag{1.15}
$$

Для перехода от эллиптического отверстия к трещине убедимся, что представления (1.13), (1.14) для голоморфных функций $\varphi^*(\zeta)$ и $\psi^*(\zeta)$ справедливы и для предельного случая $m = 1$. Подставив значения (1.13), (1.14) и (1.15) в граничное условие (1.12) и устремив m к единице, убеждаемся, что при $m = 1$ условие (1.12) удовлетворяется тождественно.

Из (1.13) при $m = 1$ после некоторых преобразований получим

$$
\varphi^*(\zeta) = - PA \frac{1}{\zeta} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\zeta} \right)^{\nu} A_{\nu} \tag{1.16}
$$

$$
\psi^*(\zeta) = - \frac{A\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) + e}{A\left(1 - \frac{1}{\zeta^2}\right)} \varphi^{*\prime}(\zeta) + \varphi^*(\zeta) \tag{1.17}
$$

где

$$
A_{\nu} = \sum_{k=\nu}^{\infty} b_k \alpha^1_{\nu, k} + \sum_{k=\nu}^{\infty} a_k \alpha^2_{\nu, k} + \sum_{k=\nu+2}^{\infty} a_k \alpha^3_{\nu, k} +
$$

$$
+ \sum_{k=\nu+1}^{\infty} a_k \alpha^4_{\nu, k} + \sum_{k=\nu}^{\infty} a_k \alpha^5_{\nu, k} + \sum_{k=\nu+2}^{\infty} a_k \alpha^6_{\nu, k} \tag{1.18}
$$

$$
\alpha^1_{\nu, k} = \left(\frac{A}{e} \right)^{\nu} \frac{e^k \, k!}{R^k} \sum_{i=0}^{\left[\frac{k-\nu}{2}\right]} \frac{\left(\frac{A^2}{e^2} \right)^i}{(k - 2i - \nu)! \, i! \, (i + \nu)!} \tag{1.19}
$$

$$
\alpha^2_{\nu, k} = - \left(\frac{A}{e} \right)^{\nu} \frac{e^k \, k!}{R^k} \sum_{i=0}^{\left[\frac{k-\nu}{2}\right]} \frac{\left(\frac{A^2}{e^2} \right)^i}{(k - 2i - \nu)! \, i! (i + \nu)!} \tag{1.20}
$$

$$
\alpha^3_{\nu, k} = \left(\frac{A}{e} \right)^{\nu} \frac{k!}{k-1} \left(\frac{e}{R} \right)^{k-2} \sum_{i=0}^{\left[\frac{k-\nu-2}{2}\right]} \frac{\left(\frac{A^2}{e^2} \right)^i}{(k - 2 - 2i - \nu)! \, i! \, (i + \nu)!} \tag{1.21}
$$

$$\alpha^4_{\nu, k} = -\left(\frac{A}{e}\right)^{\nu} \frac{k!\, e^k}{R^k} \sum_{i=0}^{\left[\frac{k-\nu-1}{2}\right]} \frac{\left(\frac{A^2}{e^2}\right)^i}{(k-1-2i-\nu)!\, i!\, (i+\nu)!} \tag{1.22}$$

$$\alpha^5_{\nu, k} = -\left(\frac{A}{e}\right)^{\nu} \frac{k!\, e^k}{R^k} \sum_{i=0}^{\left[\frac{k-\nu}{2}\right]} \frac{\left(\frac{A^2}{e^2}\right)^i}{(k-2i-\nu)!\, i!\, (i+\nu-1)!} \tag{1.23}$$

$$\alpha^6_{\nu, k} = -A\left(\frac{A}{e}\right)^{\nu+1} \frac{k!\, e^{k-1}}{R^k} \sum_{i=0}^{\left[\frac{k-\nu-2}{2}\right]} \frac{\left(\frac{A^2}{e^2}\right)^i}{(k-2i-\nu)!\, i!\, (i+\nu+1)!} \tag{1.24}$$

2. Полученные представления функций $\varphi^*(\zeta)$ и $\psi^*(\zeta)$ содержат неизвестные коэффициенты a_k и b_k, для определения которых обратимся к уравнениям, вытекающим из (1.1), (1.3) и (1.9)

$$\psi_1(t) = -\overline{\omega(t)} - \bar{t}\,\omega'(t) + \frac{\bar{c}}{2} \tag{2.1}$$

$$\psi_1(t) = \psi(t) - \sum_{k=1}^{\infty} b_k \left(\frac{t}{R}\right)^k - \sum_{k=2}^{\infty} k a_k \left(\frac{t}{R}\right)^{k-2} - \frac{\bar{c}}{2} \tag{2.2}$$

$$\varphi_1(t) = \omega(t) + \frac{Pt + C}{2} \tag{2.3}$$

$$\varphi_1(t) = \varphi(t) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\frac{t}{R}\right)^k + \frac{Pt + C}{2} \tag{2.4}$$

откуда, с учетом представления $\omega(t)$ по (1.8), получим

$$\psi(t) = -\sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\frac{R}{t}\right)^k - a_1 \frac{R}{t} + \sum_{k=1}^{\infty} k b_k \left(\frac{R}{t}\right)^{k+2} \tag{2.5}$$

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \left(\frac{R}{t}\right)^k \tag{2.6}$$

В (1.16) и (1.17) заменим ζ на z согласно (1.11) по формуле

$$\zeta = \frac{z-e}{2A} + \sqrt{\left(\frac{z-e}{2A}\right)^2 - 1} \tag{2.7}$$

в которой, бесконечно удаленной точке плоскости z соответствует бесконечно удаленная точка плоскости ζ.

Подставляя (2.7) в выражение (1.17), устремив z к граничной точке контура L_1 и учитывая, что

$$\varphi'(z) = \frac{\varphi'(\zeta)}{A\left(1 - \frac{1}{\zeta^2}\right)}$$

получим

$$\psi(t) = \varphi(t) - t\varphi'(t) \tag{2.8}$$

Исключив $\psi(t)$ из (2.8) и (2.5), с учетом (2.6), получим следующее уравнение на L_1:

$$\sum_{k=2}^{\infty} a_k \left(\frac{R}{t}\right)^k + a_1 \frac{R}{t} = \sum_{k=3}^{\infty} (k-2) b_{k-2} \left(\frac{R}{t}\right)^k -$$

$$- 3b_2 \left(\frac{R}{t}\right)^2 - \sum_{k=3}^{\infty} b_k (k+1) \left(\frac{R}{t}\right)^k - 2b_1 \frac{R}{t} \tag{2.9}$$

Отсюда следует, что

$$a_1 = - b_1$$

$$a_2 = - 3b_2$$

$$a_k = (k-2)\, b_{k-2} - (k+1)\, b_k \qquad \text{при } k \geqslant 3 \tag{2.10}$$

Подставляя (2.7) в (1.16) и устремив z к границе контура L_1, после некоторых преобразований получим

$$\varphi(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} B_\nu \left(\frac{1}{a}\right)^\nu \sum_{i=0}^{\left[\frac{\nu}{2}\right]} F_\nu^i \frac{a^{2i}}{i!} \sum_{n=0}^{\nu-2i} (-1)^n t^{\nu-n-2i} C^n_{\nu-2i}\, e^n + \sum_{k=1}^{\infty} S_k t^{-k} \tag{2.11}$$

где

$$B_1 = - PA + A_1$$

$$B_\nu = A_\nu \quad \text{при} \quad \nu \geqslant 2$$

$$F_\nu^0 = \sum_{n=0}^{\nu} (-1)^n C_\nu^n$$

$$F_\nu^i = \sum_{n=0}^{\nu} (-1)^n C_\nu^n \left(\frac{n}{2}\,\frac{n-2}{2} \cdots \frac{n+2-2i}{2}\right) \quad \text{при} \quad i \geqslant 1$$

Покажем, что F_ν^i равны нулю. Для этого рассмотрим выражение

$$\frac{d^i}{du^i}(1 - \sqrt{u})^\nu = \frac{d^i}{du^i} \sum_{n=0}^{\nu} (-1)^n (\sqrt{u})^n C_\nu^n$$

правая часть которого для $i \leqslant \nu - 1$ при $\sqrt{u} = 1$ и $\nu = 1, 2 \cdots$ совпадает со значениями коэффициентов F_ν^i, а левая часть равна нулю;

отсюда очевидно, что $F_\nu^1 = 0$. Поэтому выражение (2.11) примет вид

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} S_k t^{-k} \tag{2.12}$$

Из (2.6) и (2.12) получим уравнение, из которого, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях t, получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений

$$b_k = \sum_{\nu=1}^{k} A_\nu \alpha^1_{\nu,k} - d_k \quad k = 1, 2\cdots \tag{2.13}$$

где

$$\alpha^1_{\nu,k} = \left(\frac{a}{R}\right)^{\nu} \sum_{m=0}^{\left[\frac{k-\nu}{2}\right]} K_\nu^m \frac{e^{k-\nu-2m}\, a^{2m}}{R^{k-\nu}} C_k^{\nu+2m-1} \tag{2.14}$$

$$d_k = PA\frac{a}{R} \sum_{m=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} K_1^m \frac{e^{k-1-2m} a^{2m}}{R^{k-1}} C_{k-1}^{2m}$$

$$K_\nu^m = \frac{1}{(\nu+m)!\,2^{m-1}} \sum_{n=1}^{\nu} (-1)^{\frac{n-1}{2}} C_\nu^n n!! \left[\left(\nu+m-\frac{n+1}{2}\right)2-1\right]!! \tag{2.15}$$

3. Решение задачи сводится к определению неизвестных коэффициентов a_k и b_k из бесконечных систем (2.10), (1.18) и (2.13). Подставляя значения (2.10) в (1.18), получим

$$A_\nu = \sum_{k=\nu}^{\infty} b_k \alpha^1_{\nu,k} - \sum_{k=\nu}^{\infty} b_{k-2} \alpha^{*2}_{\nu,k} + \sum_{k=\nu+2}^{\infty} b_{k-2} \alpha^{*3}_{\nu,k} +$$

$$+ \sum_{k=\nu+1}^{\infty} b_{k-2} \alpha^{*4}_{\nu,k} + \sum_{k=\nu}^{\infty} b_{k-2} \alpha^{*5}_{\nu,k} + \sum_{k=\nu+2}^{\infty} b_{k-2} \alpha^{*6}_{\nu,k} \tag{3.1}$$

Докажем регулярность систем (3.1) и (2.13) [3].

Обозначим через C_k коэффициент при неизвестном ν-той строки системы.

Так как коэффициенты $\alpha^1_{\nu,k}$, $\alpha^{*2}_{\nu,k}$, $\alpha^{*3}_{\nu,k}$, $\alpha^{*4}_{\nu,k}$, $\alpha^{*5}_{\nu,k}$ и $\alpha^{*6}_{\nu,k}$ разных знаков, то из (3.1) получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} |C_k| < \sum_{k=\nu}^{\infty} |\alpha^1_{\nu,k}| + \sum_{k=\nu}^{\infty} |\alpha^{*2}_{\nu,k}| + \sum_{k=\nu+2}^{\infty} |\alpha^{*3}_{\nu,k}| +$$

$$+ \sum_{k=\nu+1}^{\infty} |\alpha^{*4}_{\nu,k}| + \sum_{k=\nu}^{\infty} |\alpha^{*5}_{\nu,k}| + \sum_{k=\nu+2}^{\infty} |\alpha^{*6}_{\nu,k}| \tag{3.2}$$

Согласно (1.19) имеем

$$\sum_{k=\nu}^{\infty}|\alpha^{1}_{\nu,\,k}|=\left(\frac{A}{e}\right)^{\nu}\sum_{k=\nu}^{\infty}\frac{e^{k}\,k!}{R^{k}}\sum_{i=0}^{\left[\frac{k-\nu}{2}\right]}\frac{\left(\frac{A^{2}}{e^{2}}\right)^{i}}{(k-2i-\nu)!\,i!\,(i+\nu)!}$$

Переставив здесь порядок суммирования, получим

$$\sum_{k=\nu}^{\infty}|\alpha^{1}_{\nu,\,k}|=\left(\frac{A}{e}\right)^{\nu}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{A^{2}}{e^{2}}\right)^{i}\frac{1}{i!\,(i+\nu)!}\left(\frac{e}{R}\right)^{\nu+2i}\times$$

$$\times\sum_{k=\nu+2i}^{\infty}\frac{k!}{(k-\nu-2i)!}\left(\frac{e}{R}\right)^{k-\nu-2i}$$

Учитывая, что

$$\sum_{k=\nu+2i}^{\infty}\frac{k!}{(k-\nu-2i)!}\left(\frac{e}{R}\right)^{k-\nu-2i}=\frac{(\nu+2i)!}{\left(1-\frac{e}{R}\right)^{\nu+2i+1}}\quad \text{при}\quad \frac{e}{R}<1\,.$$

после некоторых преобразований получим

$$\sum_{k=\nu}^{\infty}|\alpha^{1}_{\nu,\,k}|=\left(\frac{A}{R-e}\right)^{\nu}\frac{R}{R-e}\sum_{i=0}^{\infty}\left|\frac{A^{2}}{(R-e)^{2}}\right|^{i}\frac{(\nu+2i)!}{i!\,(\nu+i)!} \tag{3.3}$$

Аналогичным путем найдем

$$\sum_{k=\nu}^{\infty}|\alpha^{*2}_{\nu,\,k}|<2\left(\frac{A}{R-e}\right)^{\nu}\frac{R^{2}}{(R-e)^{2}}\sum_{i=0}^{\infty}\left|\frac{A^{2}}{(R-e)^{2}}\right|^{i}\frac{(2i+\nu+2)!}{i!\,(i+\nu)!}$$

$$\sum_{k=\nu+2}^{\infty}|\alpha^{*3}_{\nu,\,k}|<2\left(\frac{A}{R-e}\right)^{\nu}\frac{R^{3}}{(R-e)^{3}}\sum_{i=0}^{\infty}\left|\frac{A^{2}}{(R-e)^{2}}\right|^{i}\frac{(2i+\nu+2)!}{(\nu+i)!\,i!}$$

$$\sum_{k=\nu+1}^{\infty}|\alpha^{*4}_{\nu,\,k}|<2\left(\frac{A}{R-e}\right)^{\nu}\frac{R^{2}e}{(R-e)^{3}}\sum_{i=0}^{\infty}\left|\frac{A^{2}}{(R-e)^{2}}\right|^{i}\frac{(2i+\nu+2)!}{i!\,(i+\nu)!}$$

$$\sum_{k=\nu}^{\infty}|\alpha^{*5}_{\nu,\,k}|<2\left(\frac{A}{R-e}\right)^{\nu}\frac{R^{2}}{(R-e)^{2}}\sum_{i=0}^{\infty}\left|\frac{A^{2}}{(R-e)^{2}}\right|^{i}\frac{(2i+\nu+1)!}{i!\,(i+\nu-1)!}$$

$$\sum_{k=\nu+2}^{\infty}|\alpha^{*6}_{\nu,\,k}|<2\left(\frac{A}{R-e}\right)^{\nu}\frac{R^{2}A^{2}}{(R-e)^{4}}\sum_{i=0}^{\infty}\left|\frac{A^{2}}{(R-e)^{2}}\right|^{i}\frac{(2i+\nu+3)!}{i!\,(i+\nu+1)!} \tag{3.4}$$

Из (3.2), с учетом (3.3) и (3.4), получим

$$\sum_{k=\nu}^{\infty}|C_{k}|<\left(\frac{a}{R-e}\right)^{\nu}D. \tag{3.5}$$

где

$$D_\nu=\frac{R}{R-e}\sum_{i=0}^{\infty}\left|\frac{A^2}{(R-e)^2}\right|^i\frac{(2i+\nu)!}{i!\,(i+\nu)!\,2^\nu}+$$

$$+\frac{2R^2}{(R-e)^2}\sum_{i=0}^{\infty}\left|\frac{A^2}{(R-e)^2}\right|^i\frac{(2i+\nu+1)!}{i!\,(i+\nu)!\,2^\nu}+$$

$$+\frac{2R^3}{(R-e)^3}\sum_{i=0}^{\infty}\left|\frac{A^2}{(R-e)^2}\right|^i\frac{(2i+\nu+2)!}{(\nu+i)!\,i!\,2^\nu}+$$

$$+\frac{2R^2e}{(R-e)^3}\sum_{i=0}^{\infty}\left|\frac{A^2}{(R-e)^2}\right|^i\frac{(2i+\nu+2)!}{i!\,(i+\nu)!\,2^\nu}+$$

$$+\frac{2R^2}{(R-e)^2}\sum_{i=0}^{\infty}\left|\frac{A^2}{(R-e)^2}\right|^i\frac{(2i+\nu+1)!}{i!\,(i+\nu-1)!\,2^\nu}+$$

$$+\frac{2R^2A^2}{(R-e)^4}\sum_{i=0}^{\infty}\left|\frac{A^2}{(R-e)^2}\right|^i\frac{(2i+\nu+3)!}{i!\,(i+\nu+3)!\,2^\nu} \qquad (3.6)$$

Легко показать, что $D^*>D_\nu$ (при $\nu=1, 2,\cdots$), где

$$D^*=\frac{R}{R-e}\sum_{i=0}^{\infty}\left|\frac{A^2}{(R-e)^2}\right|^i\frac{(2i+1)!}{i!\,(i+1)!\,2}+$$

$$+\frac{R^2}{(R-e)^2}\sum_{i=0}^{\infty}\left|\frac{A^2}{(R-e)^2}\right|^i\frac{(2i+2)!}{i!\,(i+1)!}+$$

$$+\frac{R^3}{(R-e)^3}\sum_{i=0}^{\infty}\left|\frac{A^2}{(R-e)^2}\right|^i\frac{(2i+3)!}{(1+i)!\,i!}+$$

$$+\frac{R^2e}{(R-e)^3}\sum_{i=0}^{\infty}\left|\frac{A^2}{(R-e)^2}\right|^i\frac{(2i+3)!}{i!\,(i+1)!}+$$

$$+\frac{R^2}{(R-e)^2}\sum_{i=0}^{\infty}\left|\frac{A^2}{(R-e)^2}\right|^i\frac{(2i+3)!}{i!\,(i+1)!\,2}+$$

$$+\frac{A^2R^2}{(R-e)^4}\sum_{i=0}^{\infty}\left|\frac{A^2}{(R-e)^2}\right|^i\frac{(2i+4)!}{i!\,(i+2)!}$$

является ограниченной величиной сверху при $\frac{a}{R-e}<1$. Это услоние соответствует постановке задачи. Следовательно, (3.5) можем заменить неравенством

$$\sum_{k=\nu}^{\infty}|C_{k\nu}|<\left(\frac{a}{R-e}\right)^{\nu} D^{*} \tag{3.7}$$

откуда видно, что сумма модулей коэффициентов при неизвестных b_k стремится к нулю при стремлении ν к бесконечности. Из системы (2.13) с учетом (2.14) и того, что $K^{*m}_{\nu}>K^{m}_{\nu}$, имеем

$$\sum_{\nu=1}^{k}|a^{\gamma}_{\nu,k}|<\sum_{\nu=1}^{k}\left(\frac{a}{R}\right)^{\nu}\sum_{m=0}^{\left[\frac{k-\nu}{2}\right]} K^{*m}_{\nu}\frac{e^{k-\nu-2m}a^{2m}}{R^{k-\nu}}C_{k-1}^{\nu+2m-1} \tag{3.8}$$

где

$$K^{*m}_{\nu}=\frac{1}{(m+\nu)!\,2^{m+\nu}}\sum_{n=1}^{\nu}{}^{'} C^{n}_{\nu}n!!\left|\left(\nu+m-\frac{n+1}{2}\right)2-1\right|!! \tag{3.9}$$

Замечая, что $K^{*m}_{\nu}>K^{*m+1}_{\nu}$, получим неравенство

$$\sum_{\nu=1}^{k}|a^{\gamma}_{\nu,k}|<\sum_{\nu=1}^{k}\left(\frac{a}{R}\right)^{\nu}K^{*0}_{\nu}\sum_{m=0}^{\left[\frac{k-\nu}{2}\right]}\frac{e^{k-\nu-2m}a^{2m}}{R^{k-\nu}}C_{k-1}^{\nu+2m-1} \tag{3.10}$$

Обозначим через

$$d^{n}_{\nu}=\frac{\left[\left(\nu-\frac{n+1}{2}\right)2-1\right]!!}{2^{\nu}(n-1)!!\,(\nu-n)!} \tag{3.11}$$

Из (3.9) имеем

$$K^{*0}_{\nu}=\sum_{n=1}^{\nu}{}^{'} d^{n}_{\nu} \tag{3.12}$$

При конечных ν величина d^{n}_{ν} ограничена. Покажем, что d^{n}_{ν} ограничена также при n конечном и ν, стремящемся к бесконечности. Полагая, что $n\leqslant\nu_1$, имеем

$$d^{n}_{\nu}=d^{n}_{\nu_1+m}=d^{n}_{\nu_1}\prod_{k=0}^{m-1}\left[1+\frac{n-2}{2(\nu_1+k-n+1)}\right] \tag{3.13}$$

Устремляя ν к бесконечности при фиксированном ν_1 из (3.13) получаем бесконечное произведение, сходимость которого вытекает из сходимости соответствующего логарифмического ряда.

Если n стремится к ν при ν, стремящемся к бесконечности, то выражение (3.11) стремится к нулю. Обозначая максимальное значение d_k^* через d^*, из (3.12) имеем

$$K_\nu^{(\gamma)} < d^* \nu \tag{3.14}$$

Обозначая через ξ наибольшее из $\dfrac{a}{R}$ и $\dfrac{e}{R}$, учитывая (3.14) и (3.10), имеем

$$\sum_{\nu=1}^{k} |\alpha_{\nu, k}^{\gamma}| < d^* \xi^k \sum_{\nu=1}^{k} \nu \sum_{m=0}^{\left[\frac{k-\nu}{2}\right]} C_{k-1}^{\nu+2m-1} <$$

$$< d^* \xi^k \sum_{\nu=1}^{k} \nu \sum_{m=0}^{\left[\frac{k-\nu}{2}\right]} C_{k-1}^{\left[\frac{k}{2}\right]} < d^* \xi^k k C_{k-1}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \sum_{\nu=1}^{k} \nu <$$

$$< d^* \xi^k k C_{k-1}^{\left[\frac{k}{2}\right]} (k^2 + k) \tag{3.15}$$

При $\xi < \dfrac{1}{2}$ и k, стремящемся к бесконечности, правая часть неравенства (3.15) стремится к нулю. Аналогично можно показать, что свободный член d_k системы (2.13) также стремится к нулю при тех же условиях.

Таким образом, квази-вполне регулярность систем (2.13) и (3.1) при $\dfrac{a}{R} < \dfrac{1}{2}$ и $\dfrac{e}{R} < \dfrac{1}{2}$ доказана.

4. Приведем результаты численного примера для случая, когда эксцентриситет $e = 0.3\,R$, а длина трещины $2a = 0.4\,R$. Решая укороченную систему (2.13), получаем

$$b_1 \approx -0.10746\,PA, \quad b_2 \approx -0.03226\,PA, \quad b_3 \approx -0.01075\,PA$$

$$b_4 \approx -0.00387\,PA, \quad b_5 \approx -0.00147\,PA \tag{4.1}$$

Коэффициенты a_k определяются по выражениям (2.10).

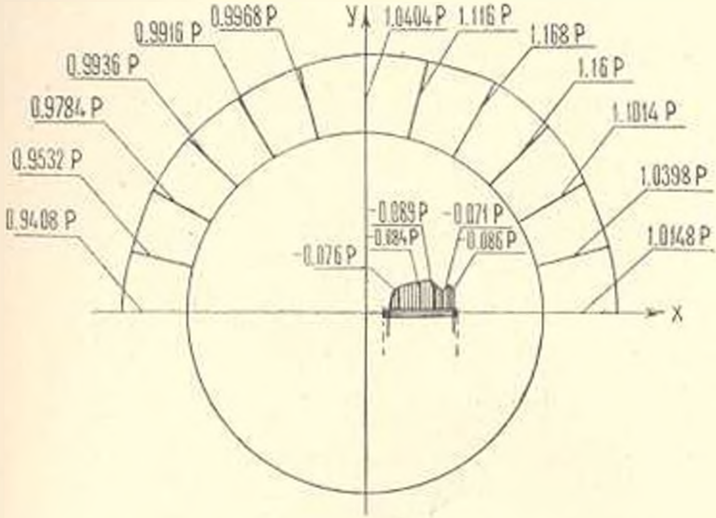
На фиг. 2 приведены эпюры тангенциальных нормальных напряжений по внешнему круговому контуру и по кромке трещины, соответственно определяемых по формулам:

$$\sigma_\theta = P + \frac{4}{R} \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos\theta (k-1) - b_k \cos\theta (k+1)]$$

$$\sigma_x = 2P + 4 \sum_{k=1}^{\infty} k a_k \frac{x^{k-1}}{R^k} -$$

$$-\frac{2}{A} \left[1 + \frac{x-e}{\sqrt{(x-e)^2 - a^2}} \right] \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu B_\nu \left[\frac{x-e}{2A} + \sqrt{\left(\frac{x-e}{2A}\right)^2 - 1} \right]^{-\nu-1}$$

Для оценки приближенного решения (4.1) подсчитаны радиальные нормальные напряжения σ_r на внешнем контуре и последние сравнены с заданной величиной P. Погрешность $\Delta = \frac{\sigma_r - P}{P} 100\%$, вычисленная в точках контура L_1, не превышает 3%.



Фиг. 2.

Нормальные напряжения σ_x и σ_y в окрестности концов трещины в зависимости от величины $s = |x - (e \pm a)|$ (s — расстояние рассматриваемой точки до концов трещины) могут быть представлены в виде

$$\sigma_x = \frac{N}{\sqrt{s}} + G_1(0), \qquad \sigma_y = \frac{N}{\sqrt{s}} + G_2(0) \tag{4.2}$$

где $G_1(0)$ и $G_2(0)$ при $x = e \pm a$ — ограниченные величины, причем

$$N = \begin{cases} \sqrt{A}\,P\left[1 - \dfrac{1}{AP}\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu A_\nu\right] & \text{при } x = e + a \\[2ex] \sqrt{A}\,P\left[1 - \dfrac{1}{AP}\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu+1} \nu A_\nu\right] & \text{при } x = e - a \end{cases} \tag{4.3}$$

где A_ν имеет представление (1.18).

Величина N для рассматриваемого примера равна

$$N \approx \begin{cases} 1.069\, P \sqrt{A} & \text{при } x = e + a \\ 1.065\, P \sqrt{A} & \text{при } x = e - a \end{cases}$$

В заключение отметим, что используя полученные выше результаты, очевидно, можно получить решение для случая, когда внешний контур свободен от нагрузки, а по краю трещины действует равномерно распределенное давление. Коэффициент концентрации для этого случая совпадает с (4.3), причем как выражение для напряжений, так и коэффициент концентрации для этого случая для ограниченных a и e при R, стремящемся к бесконечности, совпадают с соответствующими величинами, найденными в работе [1].

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 5 XI 1970

Ս. Ս. ԶԱՐԳԱՐՅԱՆ, Ռ. Լ. ԷՆՖԻԱՋՅԱՆ

ՏՐԱՄԱԳԾԱՅԻՆ ՃԵՂՔՈՎ ԿԼՈՐ ՍԱԼԻ ՀԱՎԱՍԱՐԱՉԱՓ ՁԳՈՒՄԸ

Ամփոփում

Դիտարկվում է առաձգականության տեսության հարթ խնդիր շրջանային տիրույթի համար։ Տիրույթը սահմանափակված է L_1 շրջանագծով և թուլացված է L_2 շառավղային կտրվածքով, որի միջնակետը ընդհանուր դեպքում չի համընկնում շրջանի կենտրոնի հետ։ Ենթադրվում է, որ արտաքին պարագծով ազդում են հավասարաչափ բաշխված նորմալ լարումներ P ինտենսիվությամբ (նկ. 1), իսկ կտրվածքի եզրերը ազատ են արտաքին լարումներից։

Խնդրի լուծման համար օգտագործվում է Դ. Ի. Շերմանի մեթոդը։ Լուծումը բերվում է հանրահաշվական գծային հավասարումների անվերջ սիստեմների։ Ապացուցվում է այդ անվերջ սիստեմների քվազի-լիովին ռեգուլյարությունը։

Բերված է թվային օրինակ։

A UNIFORMLY LOADED CIRCULAR DISC WEAKENED BY RADIAL CRACKS

S. S. ZARGARIAN, R. L. ENFIAJIAN

S u m m a r y

The effect of cracks on the distribution of stresses inside an elastic isotropic disc uniformaly loaded is considered.

The method of analytical continuation of complex potentials, proposed by D. I. Sherman, is used to solve the plane stress-strain problem of the theory of elasticity.

The problem is reduced to quasi-regular infinite systems of two linear algebric equations.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. Наука, М., 1966.
2. *Шерман Д. И.* О напряжениях в весовой полуплоскости, ослабленной двумя круговыми отверстиями. Прикл. математика и механика, т. XV, вып. 3, 1951, стр. 297—316.
3. *Канторович Л. В.* и *Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа, Физматгиз, М.—Л., 1952.