ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXV, № 2, 1972 Механика

Г. Е. БАГДАСАРЯН, З. Н. ДАНОЯН

РАСПРОСТРАНЕНИЕ УПРУГИХ ВОЛН В АНИЗОТРОПНОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ПРИ НАЛИЧИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

В работе рассматривается задача о распространении упругих волн в анизотропном полупространстве при наличии магнитного поля.

Предполагается, что упругое полупространство является идеальным проводником, а внешнее магнитное поле постоянно и параллельно плоскости, ограничивающей полупространство.

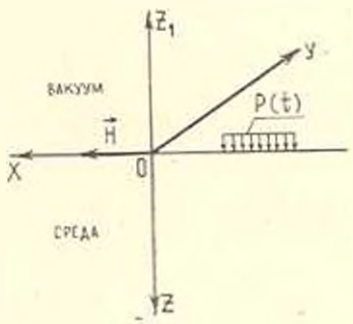
Получены формулы для перемещений и скоростей распространения упругих волн, зависящих от напряженности внешнего магнитного поля.

В частности, рассмотрена задача ортотропного полупространства, когда главные направления упругости полупространства составляют определенный угол с вектором напряженности внешнего магнитного поля.

Для вышеуказанных величин построены графики в зависимости от ориентации главных направлений упругости и от величины напряженности внешнего магнитного поля.

Аналогичная задача для изотропного полупространства рассмотрена в работе [1].

§ 1. *Постановка задачи и основные уравнения.* Введем прямоугольную систему координат $oxyz$, совмещая координатную плоскость xoy с плоскостью, ограничивающей полупространство, а ось ox — с направлением вектора внешнего магнитного поля. Вакуум, граничащий со средой, будем рассматривать в координатной системе $oxyz_1$ (фиг. 1).



Фиг. 1.

Для решения задачи примем следующие основные предположения:

1) на поверхности полупространства действует нормальное давление, которое зависит только от времени $P = P(t)$;

2) полупространство рассматривается как идеальный проводник;

3) в полупространстве, граничащем со средой, принимаются уравнения Максвелла для вакуума;

4) возмущения принимаются малыми, вследствие чего используются линеаризированные уравнения теории упругости и электродинамики;

5) $H_2 = H_3 = 0, \quad H_1 = H$;

6) токи смещения пренебрегаются.

При этих предположениях для рассматриваемой задачи получаются следующие основные уравнения [1, 2].

Уравнения магнитоупругости среды:

$$\operatorname{rot} \vec{h} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{h}}{\partial t}$$

$$\vec{E} + \frac{1}{c}\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \times \vec{B}\right) = 0 \tag{1.1}$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \frac{1}{c}(\vec{j} \times \vec{B})_i$$

$$(i = 1, 2, 3)$$

где $\vec{h}$ и $\vec{E}$ — векторы напряженности индуцированного магнитного и электрического полей, $\vec{B}$ — пектор индукции внешнего магнитного поля, $\vec{b}$ — вектор индукции индуцированного магнитного поля, $\vec{j}$ — вектор плотности индуцированного тока в среде, u_i — компоненты перемещений, σ_{ik} — компоненты тензора напряжений, ρ — плотность материала среды, c — скорость света.

Уравнения электродинамики в пакууме

$$\operatorname{rot} \vec{h}^* = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}^*}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E}^* = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{h}^*}{\partial t} \tag{1.2}$$

где $\vec{h}^*$ и $\vec{E}^*$ — векторы напряженности индуцированного магнитного и электрического полей в вакууме.

Принимая линейный закон намагничивания $\vec{B} = \mathrm{T}\vec{H}$, $\vec{b} = \mathrm{T}\vec{h}$, уравнения (1.1) можно записать в виде

$$\operatorname{rot} \vec{h} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c}\mathrm{T}\frac{\partial \vec{h}}{\partial t} \tag{1.3}$$

$$\vec{E} + \frac{1}{c}\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \times \mathrm{T}\vec{H}\right) = 0$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \frac{1}{c}\left(\vec{J} \times \mathrm{T}\vec{H}\right)_i, \quad (i = 1, 2, 3)$$

где $\mathrm{T} = (\mu_{ik})$ — симметричный тензор магнитной проницаемости среды.

Система уравнений (1.3) после некоторых преобразований приводится к виду

$$\vec{h} = \mathrm{T}^{-1} \operatorname{rot}(\vec{u} \times \mathrm{T}\vec{H})$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \times \mathrm{T}\vec{H}\right) \tag{1.4}$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \frac{1}{4\pi}\left|\{\operatorname{rot}[\mathrm{T}^{-1} \operatorname{rot}(\vec{u} \times \mathrm{T}\vec{H})]\} \times \mathrm{T}\vec{H}\right|_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

где T^{-1} — матрица, обратная T.

Учитывая, что $u_i = u_i(z, t)$, и используя геометрические линейные соотношения для сплошной среды, из обобщенного закона Гука имеем

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= A_{15}\frac{\partial u_1}{\partial z} + A_{14}\frac{\partial u_2}{\partial z} + A_{13}\frac{\partial u_3}{\partial z} \\
\sigma_{22} &= A_{25}\frac{\partial u_1}{\partial z} + A_{24}\frac{\partial u_2}{\partial z} + A_{23}\frac{\partial u_3}{\partial z} \\
\sigma_{33} &= A_{35}\frac{\partial u_1}{\partial z} + A_{34}\frac{\partial u_2}{\partial z} + A_{33}\frac{\partial u_3}{\partial z} \\
\sigma_{23} &= A_{45}\frac{\partial u_1}{\partial z} + A_{44}\frac{\partial u_2}{\partial z} + A_{34}\frac{\partial u_3}{\partial z} \\
\sigma_{13} &= A_{55}\frac{\partial u_1}{\partial z} + A_{45}\frac{\partial u_2}{\partial z} + A_{35}\frac{\partial u_3}{\partial z} \\
\sigma_{12} &= A_{56}\frac{\partial u_1}{\partial z} + A_{46}\frac{\partial u_2}{\partial z} + A_{36}\frac{\partial u_3}{\partial z}
\end{aligned} \tag{1.5}$$

где A_{ij} — упругие постоянные материала среды.

Подставляя (1.5) в (1.4), получим следующую систему дифференциальных уравнений движения среды:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik}\frac{\partial^2 u_k}{\partial z} \tag{1.6}$$

$$(i = 1, 2, 3)$$

где

$$a_{11} = \frac{1}{\rho}[A_{55} + \omega\mu_{13}^2 k_{11}]$$

$$a_{12} = \frac{1}{\rho}[A_{45} + \omega\mu_{13}^2 k_{12}]$$

$$a_{13} = \frac{1}{\rho}[A_{25} - \omega\mu_{13}(\mu_{11}k_{11} + \mu_{12}k_{12})]$$

$$a_{22} = \frac{1}{\rho}[A_{44} + \omega\mu_{13}^2 k_{22}]$$

$$a_{23} = \frac{1}{\rho}[A_{24} - \omega\mu_{13}(\mu_{12}k_{12} + \mu_{11}k_{11})]$$

$$a_{33} = \frac{1}{\rho}[A_{22} + \omega\{\mu_{13}(\mu_{11}k_{12} + \mu_{12}k_{22}) + \mu_{11}(\mu_{11}k_{11} + \mu_{12}k_{12})\}]$$

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad k_{ij} = k_{ji}, \quad \omega = \frac{H^2}{4\pi|T|}$$

здесь $|T|$ — детерминант матрицы T, а k_{ij} являются алгебраическими дополнениями элементов матрицы T.

Уравнения для вакуума можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 \vec{h}^*}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \vec{h}^*}{\partial z_1^2} \tag{1.7}$$

Таким образом, задача приводится к совместному решению уравнений (1.6) для среды, (1.7) для вакуума со следующими граничными условиями, заданными на поверхности $z = z_1 = 0$ [1, 3]:

$$\begin{gathered} \sigma_{3k} + T_{3k} - T^*_{3k} = -\delta_{3k} P(t), \quad k = 1, 2, 3 \\ h^*_3 = \mu_{13}h_1 + \mu_{23}h_2 + \mu_{33}h_3 = 0 \\ E_1 - E^*_1 = \frac{v_3}{c}\mu_{12}H \\ E_2 - E^*_2 = -\frac{v_3}{c}(\mu_{11} - 1)H \end{gathered} \tag{1.8}$$

где T_{ik} и T^*_{ik} — тензоры Максвелла в среде и в вакууме соответственно.

Компоненты тензоров T_{ik} и T^*_{ik} после линеаризации определяются следующим образом (учитывается, что до деформации поверхностный ток отсутствует, и поэтому $H_1 = H_2 = H$ [3]):

$$T_{31}=\frac{H}{4\pi}\,\mu_{31}h_3$$

$$T_{32}=\frac{H}{4\pi}\,\mu_{12}h_3$$

$$T_{33}=-\frac{H}{4\pi}\,[\mu_{13}h_1+\mu_{12}h_2] \tag{1.9}$$

$$T_{31}^{*}=\frac{H}{4\pi}\mu_{13}h_1^{*}$$

$$T_{32}^{*}=\frac{H}{4\pi}\mu_{13}h_2^{*}$$

$$T_{33}^{*}=-\frac{H}{4\pi}\,h_1^{*}$$

Из (1.4) для компонентов вектора $\hat{h}$ получается

$$h_1=\frac{H}{|T|}\left|\mu_{13}k_{11}\frac{\partial u_1}{\partial z}+\mu_{13}k_{12}\frac{\partial u_2}{\partial z}-(\mu_{11}k_{11}+\mu_{12}k_{12})\frac{\partial u_3}{\partial z}\right|$$

$$h_2=\frac{H}{|T|}\left|\mu_{13}k_{12}\frac{\partial u_1}{\partial z}+\mu_{13}k_{22}\frac{\partial u_2}{\partial z}-(\mu_{11}k_{12}+\mu_{12}k_{22})\frac{\partial u_3}{\partial z}\right| \tag{1.10}$$

$$h_3=\frac{H}{|T|}\left|\mu_{13}k_{13}\frac{\partial u_1}{\partial z}+\mu_{13}k_{23}\frac{\partial u_2}{\partial z}-(\mu_{11}k_{13}+\mu_{12}k_{23})\frac{\partial u_3}{\partial z}\right|$$

Подставляя (1.9), (1.10) в (1.8) и учитывая второе уравнение системы (1.4), граничные условия можно представить в виде

$$R_{11}\frac{\partial u_1}{\partial z}+R_{12}\frac{\partial u_2}{\partial z}+R_{13}\frac{\partial u_3}{\partial z}=\frac{H}{4\pi\rho}\mu_{13}h_1^{*}$$

$$R_{21}\frac{\partial u_1}{\partial z}+R_{22}\frac{\partial u_2}{\partial z}+R_{23}\frac{\partial u_3}{\partial z}=\frac{H}{4\pi\rho}\mu_{13}h_2^{*} \tag{1.11}$$

$$R_{31}\frac{\partial u_1}{\partial z}+R_{32}\frac{\partial u_2}{\partial z}+R_{33}\frac{\partial u_3}{\partial z}=-\frac{H}{4\pi\rho}h_1^{*}-\frac{1}{\rho}P(t)$$

$$\frac{\partial h_1^{*}}{\partial z_1}+r_{11}\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}+r_{12}\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}=0$$

$$\frac{\partial h_2^{*}}{\partial z_1}+r_{21}\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}+r_{22}\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}=0 \tag{1.12}$$

где

$$R_{11}=\frac{1}{\rho}(A_{55}+\omega\mu_{11}\mu_{13}k_{13})$$

$$R_{12}=\frac{1}{\rho}(A_{45}+\omega\mu_{12}\mu_{13}k_{23})$$

$$R_{13}=\frac{1}{\rho}[A_{35}-\omega\mu_{11}(\mu_{11}k_{13}+\mu_{12}k_{23})]$$

$$R_{21}=\frac{1}{\rho}(A_{45}+\omega\mu_{13}\mu_{13}k_{13})$$

$$R_{22}=\frac{1}{\rho}(A_{44}+\omega\mu_{12}\mu_{13}k_{23})$$

$$R_{23}=\frac{1}{\rho}[A_{34}-\omega\mu_{12}(\mu_{11}k_{13}+\mu_{12}k_{23})]$$

$$R_{31}=\frac{1}{\rho}[A_{35}+\omega\mu_{13}(\mu_{11}k_{11}+\mu_{12}k_{12})]$$

$$R_{32}=\frac{1}{\rho}[A_{34}+\omega\mu_{13}(\mu_{11}k_{12}+\mu_{12}k_{22})]$$

$$R_{33}=\frac{1}{\rho}[A_{33}-\omega(\mu_{11}^2k_{11}+2\mu_{11}\mu_{12}k_{12}+\mu_{12}^2k_{22})]$$

$$r_{11}=\frac{H}{c^2}\mu_{13},\quad r_{12}=-\frac{H}{c^2},\quad r_{21}=\frac{H}{c^2}\mu_{13},\quad r_{22}=0$$

§ 2. *Решение системы уравнений.* Систему уравнений (1.6) и граничные условия (1.11) представим в векторно-матричной форме

$$\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}=A\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial z^2} \tag{2.1}$$

$$R\frac{\partial\vec{u}}{\partial z}=C\quad\text{при}\quad z=z_1=0 \tag{2.2}$$

где

$$\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)\qquad C=\begin{bmatrix}\frac{H}{4\pi\rho}r_{11}h_1^*\\ \frac{H}{4\pi\rho}r_{12}h_2^*\\ -\frac{H}{4\pi\rho}h_3^*-\frac{1}{\rho}P(t)\end{bmatrix}$$

$$A=(a_{ij})\qquad\qquad (2.3)$$

$$R=(R_{ij})$$

Так как матрица A симметрична, то ее можно представить в виде [4] $A=BDB'$, где $B=(b_{ij})$ — ортогональная матрица, B' — транс-

нонированная матрица матрицы B. D — диагональная матрица. Элементы матрицы D являются собственными значениями матрицы A и вычисляются посредством следующих формул [5]:

$$\lambda_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} S \sin\left(\alpha + \frac{2}{3}\pi\right) + \frac{1}{3} S_1$$

$$\lambda_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} S \sin\alpha + \frac{1}{3} S_1 \tag{2.4}$$

$$\lambda_3 = \frac{2}{\sqrt{3}} S \sin\left(\alpha + \frac{4}{3}\pi\right) + \frac{1}{3} S_1, \quad \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3$$

где

$$S = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(a_{11}-a_{22})^2 + (a_{22}-a_{33})^2 + (a_{33}-a_{11})^2 + 6(a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{23}^2)}$$

$$\alpha = \frac{1}{3} \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{L}{S^3}\right), \quad -\frac{\pi}{6} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{6}$$

$$L = S_1 S_2 - \frac{2}{9} S_1^3 - 3S_3$$

$$S_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

$$S_2 = a_{11}a_{22} + a_{22}a_{33} + a_{11}a_{33} - a_{12}^2 - a_{13}^2 - a_{23}^2$$

$$S_3 = a_{11}a_{22}a_{33} + 2a_{12}a_{13}a_{23} - a_{11}a_{23}^2 - a_{22}a_{13}^2 - a_{33}a_{12}^2$$

Вводя векторную функцию $\vec{v} = \{v_1, v_2, v_3\}$, связанную с $\vec{u}$ соотношением $\vec{u} = B\vec{v}$, приведем систему (2.1) к диагональному виду. Тогда задача сводится к решению следующей системы:

$$\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} = D \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{h}}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \vec{h}}{\partial z_1^2} \tag{2.5}$$

с граничными условиями

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial z} = LC$$

$$\frac{\partial h_k}{\partial z_1} + \sum_{i=1}^{3} d_{ki} \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} = 0 \quad (k = 1, 2) \tag{2.6}$$

где

$$L = (L_{ik}) = (RB)^{-1}$$

$$d_{ik} = r_{k1}b_{1i} + r_{k2}b_{2i}$$

$$(k = 1, 2; \quad i = 1, 2, 3)$$

Решение системы (2.5) ищем в виде

$$\begin{aligned} v_i &= \Phi_i(z - a_i t), \quad (i = 1, 2, 3) \\ h_i^* &= \Psi_i(z_1 - ct), \quad (i = 1, 2) \end{aligned} \tag{2.7}$$

где $a_i^2 = \lambda_i$, $(i = 1, 2, 3)$.

Подставляя (2.7) в граничные условия (2.6), получим

$$\begin{aligned} \Phi_i'(-a_i t) &= \frac{H}{4\pi\rho}(\nu_{12}L_{i1} - L_{i2})\Psi_1(-ct) + \frac{H\nu_{12}}{4\pi\rho}L_{i1}\Psi_2(-ct) - \frac{L_{i3}P}{\rho} \\ \Psi_k(-ct) &+ \sum_{i=1}^{3} d_{ik}a_i^2\Phi_i'(-a_i t) = 0 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Дифференцируя первое уравнение системы (2.8) и подставляя результат во второе уравнение, после интегрирования получим

$$\Psi_i(-ct) = c\frac{\Delta_i}{\Delta}P(t) + \bar{A}_i, \quad i = 1, 2 \tag{2.9}$$

где $\bar{A}_i$ — постоянные интегрирования,

$$\Delta_1 = C_1(1 + B_2) - C_2B_1$$

$$\Delta_2 = C_2(1 + A_1) - C_1A_2$$

$$\Delta = (1 + A_1)(1 + B_2) - B_1A_2$$

$$A_k = \sum_{i=1}^{3} d_{ik}\frac{cHa_i(\nu_{12}L_{i1} - L_{i2})}{4\pi\rho}$$

$$B_k = \sum_{i=1}^{3} d_{ik}\frac{cHa_i\nu_{12}L_{i1}}{4\pi\rho}$$

$$C_k = \sum_{i=1}^{3} d_{ik}\frac{a_iL_{i3}}{\rho}$$

$$(k = 1, 2)$$

Для определения постоянных интегрирования используем начальные условия. Предполагая $P(0) = 0$ (при этом все остальные возмущения в момент $t = 0$ будут равняться нулю), получим $\bar{A}_i = 0$, поэтому из (2.9) будем иметь

$$\Psi_i(-ct) = c\frac{\Delta_i}{\Delta} P(t), \quad (i = 1, 2, 3) \tag{2.10}$$

Отсюда для компонентов вектора напряженности индуцированного магнитного поля в вакууме получаем следующие выражения:

$$h_i^*(z_1, t) = c\frac{\Delta_i}{\Delta} P\left(t - \frac{z_1}{c}\right) \tag{2.11}$$

Подставляя (2.9) в первое уравнение системы (2.8), для неизвестных функций Φ_i, после удовлетворения начальных условий, получим

$$\Phi_i(z - a_i t) = \left| \frac{cH(\mu_{13}L_{i1} - L_{i3})\Delta_1 + cH\mu_{13}L_{i3}\Delta_2}{4\pi\rho\Delta} - \frac{L_{i3}}{\rho} \right| R_i \tag{2.12}$$

где

$$R_i(z - a_i t) = \int_0^{z - a_i t} P\left(-\frac{\gamma_i}{a_i}\right) d\gamma_i \tag{2.13}$$

Далее, согласно (2.7) и (2.12), для перемещений $u_i(z, t)$ получим следующие выражения:

$$u_i(z, t) = \sum_{k=1}^{3} b_{ik} \left| \frac{cH(\mu_{13}L_{k1} - L_{k3})\Delta_1 + \mu_{13}L_{3k}\Delta_2}{4\pi\rho\Delta} - \frac{L_{k3}}{\rho} \right| R_k(z - a_k t) \tag{2.14}$$

Компоненты вектора напряженности индуцированного магнитного поля в среде вычисляются по формулам (1.10). На основании (1.4) для компонентов вектора напряженности индуцированного электрического поля в среде имеем

$$\begin{aligned} E_1 &= -\frac{H}{c}\left(\mu_{13}\frac{\partial u_2}{\partial t} - \mu_{12}\frac{\partial u_3}{\partial t}\right) \\ E_2 &= -\frac{H}{c}\left(\mu_{11}\frac{\partial u_3}{\partial t} - \mu_{13}\frac{\partial u_1}{\partial t}\right) \\ E_3 &= -\frac{H}{c}\left(\mu_{12}\frac{\partial u_1}{\partial t} - \mu_{11}\frac{\partial u_2}{\partial t}\right) \end{aligned} \tag{2.15}$$

§ 3. *Случай ортотропного полупространства.* Предположим, что полупространство ортотропное, причем главные направления упругости составляют определенный угол φ с направлением напряженности внешнего магнитного поля. Если упругие постоянные относительно главных направлений анизотропии обозначить A'_{ij}, то упругие постоянные A_{ij} в системе $oxyz$ через A'_{ij} выражаются известными формулами преобразования [6]

$$A_{33} = A_{11}\sin^4\varphi + \frac{1}{2}(A_{13} + 2A_{55})\sin^2 2\varphi + A_{33}\cos^4\varphi$$

$$A_{14} = A_{14}\cos^2\varphi + A_{36}\sin^2\varphi$$

$$A_{55} = \frac{1}{4}(A_{11} + A_{33} - 2A_{13})\sin^2 2\varphi + A_{55}\cos^2 2\varphi \qquad (3.1)$$

$$A_{35} = \frac{1}{2}\sin 2\varphi\,[(A_{11} - A_{13} - 2A_{55})\sin^2\varphi + (A_{13} - A_{33} + 2A_{55})\sin^2\varphi$$

Для упрощения вычислений примем, что полупространство по отношению к магнитным свойствам является изотропным, то есть $\mu_{ik} = 0$ при $i \neq k$, $\mu_{ik} = \mu = 1$ при $i = k$. В этом случае собственные значения матрицы A вычисляются по следующим формулам:

$$\lambda_1 = \frac{(a_{11} + a_{33}) - \sqrt{(a_{11} - a_{33})^2 + 4a_{13}^2}}{2}$$

$$\lambda_2 = a_{55} \qquad (3.2)$$

$$\lambda_3 = \frac{(a_{11} + a_{33}) + \sqrt{(a_{11} - a_{33})^2 + 4a_{13}^2}}{2}$$

а матрица B имеет вид

$$B = \begin{bmatrix} \dfrac{a_{13}\sqrt{r(\lambda_1)}}{r(\lambda_1)} & 0 & \dfrac{-a_{13}\sqrt{r(\lambda_3)}}{r(\lambda_3)} \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{(a_{11}-\lambda_1)\sqrt{r(\lambda_1)}}{r(\lambda_1)} & 0 & \dfrac{(a_{11}-\lambda_3)\sqrt{r(\lambda_3)}}{r(\lambda_3)} \end{bmatrix} \qquad (3.3)$$

где $r(\lambda_i) = a_{13}^2 + (a_{11} - \lambda_i)^2$, $(i = 1, 2)$.

Если учтем вышесказанное, то из (2.14) для перемещений получим

$$u_1 = -\left[\frac{b_{13}b_{31}R_1(z - a_1 t)}{2a_1^2 + \dfrac{H^2 a_1^2}{4\pi cK}} + \frac{b_{13}b_{31}R_2(z - a_2 t)}{2a_2^2 + \dfrac{H^2 a_2^2}{4\pi cK}}\right]$$

$$u_2 = 0 \qquad (3.4)$$

$$u_3 = -\left[\frac{b_{31}^2 R_1(z - a_1 t)}{2a_1^2 + \dfrac{H^2 a_1^2}{4\pi cK}} + \frac{b_{33}^2 R_2(z - a_2 t)}{2a_2^2 + \dfrac{H^2 a_2^2}{4\pi cK}}\right]$$

где величины b_{ik} определяются из (3.3), a_i — из (3.2). R_i — из (2.13), а K — из формулы

$$K = \frac{1}{\sum_{i=1}^{3} \frac{b_{3i}^2}{a_i^2}} \tag{3.5}$$

Для иллюстрации приведем числовой пример, рассматривая четыре случая комбинации упругих постоянных

Случаи	E_1'	E_3'	G_{13}'
I	E	$2E$	$0.5\,E$
II	$2E$	E	$0.5\,E$
III	E	$10E$	$0.5\,E$
IV	$10E$	E	$0.5\,E$

В этом случае согласно (3.2) для безразмерных скоростей распространения упругих волн получим

$$\lambda_1^* = k_1 \sin^4\varphi + k_2 \cos^4\varphi + \frac{1}{4}(k_1 + k_2)\sin^2 2\varphi + 1 + H^* - \sqrt{M} \tag{3.6}$$

$$M = \left| k_1 \sin^4\varphi + k_2 \cos^4\varphi - \frac{1}{4}(k_1 + k_2)\sin^2 2\varphi - \cos 4\varphi + H^* \right|^2 +$$

$$+ \varkappa_1 \sin^2 2\varphi$$

$$\lambda_3^* = k_2 \sin^4\varphi + \cos^4\varphi + \frac{1}{4}(1 + k_1)\sin^2 2\varphi + k_1 \cos^2 2\varphi + H^* k_4 + \sqrt{M'}$$

$$M' = \left| k_1 \sin^4\varphi + \cos^4\varphi - \frac{1}{4}(1 + k_1)\sin^2 2\varphi - k_4 \cos 4\varphi + k_4 H^* \right|^2 +$$

$$+ \varkappa_3 \sin^2 2\varphi$$

где

$$\lambda_1^*(\varphi, H^*) = 2\frac{\lambda_1}{\lambda_1^0}, \qquad \lambda_3^*(\varphi, H^*) = 2\frac{\lambda_3}{\lambda_3^0}, \qquad H^* = \frac{H^2}{2\rho E}$$

$$\lambda_1^0 = \lambda_1(0, 0) = \frac{G_{13}'}{\rho}, \qquad \lambda_3^0 = \lambda_3(0, 0) = \frac{E_3'}{\rho}$$

$$k_1 = \frac{E_1'}{G_{13}'}, \quad k_2 = \frac{E_3'}{G_{13}'}, \quad k_3 = \frac{E_1'}{E_3'}, \quad k_4 = \frac{G_{13}'}{E_3'}$$

$$\varkappa_1 = (k_1 \sin^2\varphi - k_2 \cos^2\varphi + 2\cos 2\varphi)^2$$

$$\varkappa_3 = [(k_3 - 2k_4)\sin^2\varphi + (2k_4 - 1)\cos^2\varphi]^2$$

причем для простоты вычислений принято $\nu_{ij} = 0$.

На основании (3.6) ниже приведены таблицы и графики (фиг. 2, 3) зависимости скоростей λ_1^* (табл. 1) и λ_3^* (табл. 2) от φ и H.

Таблица 1

Случай	H^* \ β	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
I	0	2.000	2.088	2.320	2.586	2.634	2.247	2.000
	0.1	2.000	2.094	2.339	2.613	2.646	2.247	2.000
	0.3	2.000	2.104	2.373	2.659	2.664	2.248	2.000
	0.5	2.000	2.113	2.402	2.697	2.677	2.248	2.000
	1	2.000	2.132	2.459	2.764	2.697	2.249	2.000
	2	2.000	2.157	2.531	2.838	2.716	2.249	2.000
	3	2.000	2.173	2.576	2.877	2.725	2.249	2.000
III	0	2.000	2.127	2.473	2.945	3.407	3.601	2.000
	0.1	2.000	2.139	2.518	3.033	3.537	3.700	2.000
	0.3	2.000	2.162	2.605	3.206	3.789	3.851	2.000
	0.5	2.000	2.185	2.691	3.376	4.031	3.950	2.000
	1	2.000	2.241	2.897	3.780	4.595	4.076	2.000
	2	2.000	2.344	3.277	4.513	5.531	4.159	2.000
	3	2.000	2.437	3.618	5.151	6.228	4.189	2.000

Таблица 2

Случай	H^* \ β	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
I	0	2.000	1.848	1.482	1.104	0.904	0.943	1.000
	0.1	2.050	1.897	1.528	1.147	0.951	0.992	1.050
	0.3	2.150	1.994	1.619	1.235	1.046	1.092	1.150
	0.5	2.250	2.092	1.712	1.326	1.143	1.192	1.250
	1	2.500	1.338	1.948	1.560	1.388	1.442	1.500
	2	3.000	2.831	2.430	2.040	1.883	1.942	2.000
	3	3.500	3.327	2.919	2.531	2.381	2.442	2.500
III	0	2.000	1.860	1.489	1.003	0.542	0.228	0.200
	0.1	2.010	1.870	1.497	1.008	0.546	0.233	0.210
	0.3	2.030	1.889	1.512	1.020	0.553	0.246	0.230
	0.5	2.050	1.908	1.528	1.031	0.561	0.260	0.250
	1	2.100	1.955	1.568	1.061	0.582	0.304	0.300
	2	2.200	2.050	1.649	1.124	0.636	0.401	0.400
	3	2.300	2.145	1.732	1.192	0.701	0.499	0.500

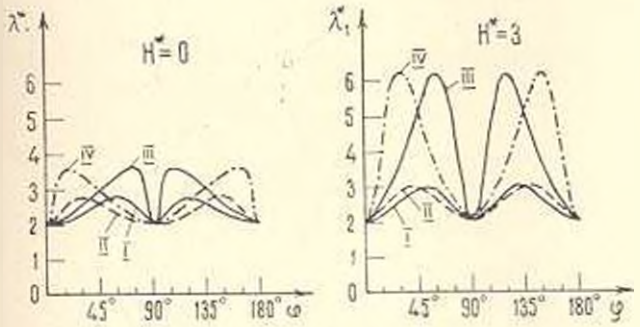
Для случаев II и IV значения λ_1 и λ_3 можно получить из табл. 1 и 2 следующим образом:

$$[\lambda_1^*(\varphi, H^*)]_{II} = \left[\lambda_1^*\left(\frac{\pi}{2} - \varphi, H^*\right)\right]_I$$

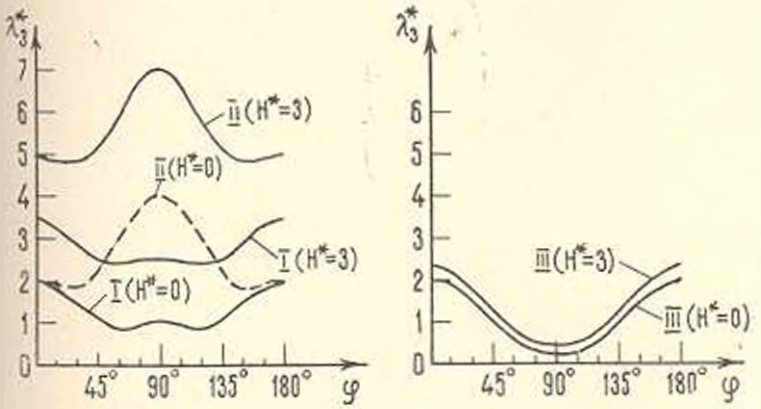
$$[\lambda_1^*(\varphi, H^*)]_{IV} = \left[\lambda_1^*\left(\frac{\pi}{2} - \varphi, H^*\right)\right]_{III}$$

$$[\lambda_3^*(\varphi, H^*)]_{II} = 2\left[\lambda_3^*\left(\frac{\pi}{2} - \varphi, H^*\right)\right]_I$$

$$[\lambda_3^*(\varphi, H^*)]_{IV} = 10\left[\lambda_3^*\left(\frac{\pi}{2} - \varphi, H^*\right)\right]_{III}$$



Фиг. 2.



Фиг. 3.

Из рассмотренных примеров можно сделать следующие выводы:

а) с увеличением H^* λ_1^* и λ_3^* увеличиваются;

б) минимальные значения λ_1^* и максимальные значения λ_3^* получаются при $\varphi = k\frac{\pi}{2}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, то есть когда главные направления упругости совпадают с направлением вектора напряженности внешнего магнитного поля;

в) максимальные значения λ_1 и минимальные значения λ_3 в зависимости от k_1, k_2, k_3, k_4 могут получиться в любой точке внутри прямоугольника $[0 \leqslant \varphi \leqslant \pi,\ 0 \leqslant H^* \leqslant H_0]$.

Таким образом, варьируя расположением главных направлений упругости материала, можно существенно увеличить или уменьшить скорости распространения упругих волн.

Институт механики
АН Армянской ССР

Поступила 5 II 1971

Գ. Ե. ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ, Զ. Ն. ԴԱՆՈՅԱՆ

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԱԼԻՔՆԵՐԻ ՏԱՐԱԾՈՒՄԸ ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԴԱՇՏՈՒՄ ԳՏՆՎՈՂ ԱՆԻԶՈՏՐՈՊ ԿԻՍԱՀԱՂՈՐԴՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Աշխատանքում դիտարկվում է առաձգական ալիքների տարածման խնդիրը մագնիսական դաշտում գտնվող անիզոտրոպ կիսատարածություններում։

Ենթադրվում է, որ առաձգական կիսատարածությունը իդեալական հաղորդիչ է, իսկ արտաքին մագնիսական դաշտը հաստատուն է և զուգահեռ կիսատարածությունը սահմանափակող հարթությանը։ Ստացված են բանաձևեր ալեպատկերների և առաձգական ալիքների տարածման արագությունների համար, կախված արտաքին մագնիսական դաշտի լարվածությունից։

Մասնավորապես դիտարկված է օրթոտրոպ կիսատարածության խնդիրը, երբ կիսատարածության առաձգական հատկությունների գլխավոր ուղղությունները արտաքին մագնիսական դաշտի լարվածության վեկտորի հետ կազմում են որոշակի անկյուն։

Հիշյալ մեծությունների համար կառուցված են գրաֆիկներ՝ կախված առաձգական հատկությունների գլխավոր ուղղությունների կողմնորոշումից և արտաքին մագնիսական դաշտի լարվածության մեծությունից։

PROPAGATION OF ELASTIC WAVES IN ANISOTROPIC SEMI-SPACE IN A MAGNETIC FIELD

G. E. BAGDASARIAN, Z. N. DANOYAN

S u m m a r y

A problem on propagation of elastic waves in anisotropic semi-space in a magnetic field is considered. The elastic semi-space is assumed to be an ideal conductor, and the external magnetic field is taken as constant and parallel to the boundary plane of semi-space.

The formulae for displacements and velocities of propagation of elastic waves, depending upon the strenght of the external magnetic field, are derived.

In particular, a problem for orthotropic semi-space, where the principal directions of elasticity make a fixed angle with the vector of the external magnetic field strength, is discussed.

For the above parameters some diagrams showing dependence on orientation of the principal directions of elasticity and on the external magnetic field strength are constructed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Калиски С.* Распространение нелинейной волны нагрузки и разгрузки в магнитном поле. Проблемы механики сплошной среды. Изд. АН СССР, 1961.
2. *Kaliski S.* and *Petykiewicz J.* Dinamical equation of motion and solving functions for elastic and inelastic, anisotropic bodes in the magnetis field. Proc. vibr., Probl., № 2, Warsaw, 1959.
3. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. Гостехтеоретиздат, М., 1959.
4. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. Изд. „Наука", М., 1969.
5. *Новожилов В. В.* Теория упругости. Судпромгиз., Л., 1958.
6. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных оболочек. Физматгиз, М., 1961.