ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXV, № 2, 1972 Механика

А. А. БАБЛОЯН, А. М. МКРТЧЯН

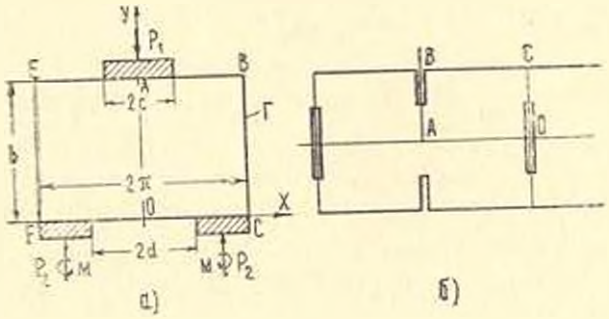
РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНИКА

Решается плоская контактная задача теории упругости для прямоугольника, когда прямоугольник сжимается по двум противоположным краям жесткими штампами, а на остальных двух действуют заданные нагрузки. На одной стороне штамп расположен центрально, а два штампа, приложенных к другой стороне, расположены по краям прямоугольника симметрично.

Задача решается при помощи функции напряжений Эри методом, использованным в работах [1—4].

Рассмотрены также некоторые смешанные задачи теории упругости для прямоугольной области и бесконечной полосы с разрезами.

1. Рассмотрим плоскую задачу для прямоугольника $EBCF$. На кромке ($y = b$) штамп приложен в центре, а на другой ($y = 0$) — два штампа одинаковой длины приложены к краям (фиг. 1а). По всему контуру вне штампов заданы нормальные напряжения. Касательные напряжения на границе отсутствуют. Предполагается, что внешние нагрузки, приложенные как к штампам, так и к участкам границы прямоугольника, симметричны относительно оси oy.



Фиг. 1.

В силу симметрии задачу будем решать только для области $ABCO$, удовлетворяя при этом условиям

$$\tau_{xy}(x, y)\big|_{\Gamma} = u(0, y) = 0$$

$$\begin{aligned} &\sigma_y(x, 0) = f_1(x) \quad (0 \leqslant x < d); && \sigma_y(x, b) = f_3(x) \quad (c < x < \pi) \\ &v(x, 0) = f_2(x) \quad (d < x \leqslant \pi); && v(x, b) = f_4(x) \quad (0 \leqslant x < c) \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\sigma_x(\pi, y) = f_3(y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \beta_k y$$

Напряжения и перемещения определяются через бигармоническую функцию Эри по формулам

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \qquad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \qquad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$$

$$Ev = \int \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} dy - \nu \frac{\partial \Phi}{\partial y} - e_0 x + g_0 \tag{1.2}$$

$$Eu = \int \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} dx - \nu \frac{\partial \Phi}{\partial x} + e_0 y + f_0$$

где E, ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона соответственно, e_0, f_0, g_0 — постоянные интегрирования.

Если функцию напряжений Эри ищем в виде [1—3]

$$\Phi(x, y) = c_1 x^2 + c_2 y^2 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k}{k^2 \operatorname{sh} kb} \left| \operatorname{ch} ky + \frac{kb \operatorname{ch} k(b-y)}{\operatorname{sh} kb} + \right.$$

$$\left. + k(b-y) \operatorname{sh} ky \right| \cos kx +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Y_k}{k^2 \operatorname{sh} kb} \left| \operatorname{ch} k(b-y) + \frac{kb \operatorname{ch} ky}{\operatorname{sh} kb} + ky \operatorname{sh} k(b-y) \right| \cos kx -$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i\pi Z_k}{\beta_k^2 b \operatorname{sh} \beta_k \pi} \left| \operatorname{ch} \beta_k x + \frac{\beta_k \pi \operatorname{ch} \beta_k (\pi - x)}{\operatorname{sh} \beta_k \pi} + \beta_k (\pi - x) \operatorname{sh} \beta_k x \right| \cos \beta_k y$$

$$\beta_k = \frac{k\pi}{b} \tag{1.3}$$

и $e_0 = f_0 = 0$, то, используя (1.2), нетрудно проверить, что условия $\tau_{xy}|_{\Gamma} = u(0, y) = 0$ удовлетворяются тождественно.

Удовлетворяя оставшимся граничным условиям (1.1), для определения неизвестных коэффициентов Z_k получим бесконечную систему алгебраических уравнений

$$Z_k = \sum_{p=1}^{\infty} a_{pk}^{(3)} X_p + \sum_{p=1}^{\infty} b_{pk}^{(3)} Y_p + \gamma_k^{(3)}$$

$$c_2 = -g_0/4, \qquad a_{pk}^{(3)} = \frac{4p\beta_k^2(-1)^{p+k+1}}{i\pi\Delta_k (p^2 + \beta_k^2)^2}, \qquad b_{pk}^{(3)} = (-1)^{k+1} a_{pk}^{(3)} \tag{1.4}$$

$$\gamma_k^{(3)} = \frac{ba_k}{i\pi\Delta_k}, \qquad \Delta_k = \operatorname{cth} \beta_k \pi + \frac{\beta_k \pi}{\operatorname{sh}^2 \beta_k \pi}$$

а X_k и Y_k будем определять из системы парных тригонометрических уравнений

$$\sum_{k=1}^{\infty}[(1+M_k)X_k - N_kY_k]\cos kx = -2c_1 + f_3(x) - \frac{\pi\lambda}{b}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k Z_k\varphi_c(x) \quad (c<x\leqslant\pi)$$

$$X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1}X_k\cos kx = \frac{E}{2}f_4(x) \quad (0\leqslant x<c) \tag{1.5}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}[(1+M_k)Y_k - N_kX_k]\cos kx = 2c_1 - f_3(x) + \frac{\pi\lambda}{b}\sum_{k=1}^{\infty}Z_k\varphi_\xi(x) \quad (0\leqslant x<d)$$

$$Y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1}Y_k\cos kx = \frac{E}{2}f_2(x) \quad (d<x\leqslant\pi)$$

где введены обозначения

$$M_k = \frac{e^{-kb}}{\operatorname{sh} kb} + \frac{kb}{\operatorname{sh}^2 kb}, \qquad N_k = \frac{1}{\operatorname{sh} kb}(1 + kb\operatorname{cth} kb)$$

$$\varphi_\xi(x) = \frac{1}{\operatorname{sh}\beta_k\pi}\left|\operatorname{ch}\xi x - \frac{\beta_k\pi\operatorname{ch}\xi(\pi-x)}{\operatorname{sh}\beta_k\pi} - \xi(\pi-x)\operatorname{sh}\xi x\right|, \quad \xi = \frac{k\pi}{b}$$

$$Y_0 = \frac{E}{2}g_0, \quad X_0 = b(c_1 - \nu c_2) + Y_0, \qquad c_1 = \frac{\nu a_2}{4} + (X_0 - Y_0)/b \tag{1.6}$$

Считая правые части парных уравнений известными и пользуясь решением такого рода парных тригонометрических уравнений [4], для X_k и Y_k получим бесконечные системы уравнений

$$\begin{aligned} X_k &= \sum_{p=1}^{\infty} a_{pk}^{(1)}X_p + \sum_{p=1}^{\infty} b_{pk}^{(1)}Y_p + \sum_{p=1}^{\infty} c_{pk}^{(1)}Z_p + \gamma_k^{(1)} \\ Y_k &= \sum_{p=1}^{\infty} a_{pk}^{(2)}Y_p + \sum_{p=1}^{\infty} b_{pk}^{(2)}X_p + \sum_{p=1}^{\infty} c_{pk}^{(2)}Z_p + \gamma_k^{(2)} \end{aligned} \tag{1.7}$$

При этом неизвестные коэффициенты X_0 и Y_0 определяются из следующей системы линейных уравнений [2, 3]:

$$X_0 - 4c_1\ln\left(\sin\frac{c}{2}\right) = \frac{E}{2}f_4(0) + \frac{1}{2}\int_c^{\pi}F_3(\theta)\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\,d\theta -$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^{d}F_4(\theta)\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\,d\theta - \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{\infty}[N_pY_p - M_pX_p]\frac{y_p(\cos c)}{p} +$$

$$+\frac{\lambda}{2}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^p Z_p}{p}\left[H_i(\cos c)+K_i(\cos c)\right]$$

$$Y_0+4c_1\ln\left(\cos\frac{d}{2}\right)=\frac{E}{2}f_3(\pi)-\frac{1}{2}\int_0^d F_1(\theta)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\,d\theta+ \tag{1.7'}$$

$$+\frac{1}{2}\int_d^{\pi}F_2(\theta)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\,d\theta+\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{\infty}\left[N_pX_p-M_pY_p\right]\frac{z_p(\cos d)}{p}+$$

$$+\frac{\lambda}{2}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{\overline{Z}_p}{p}\left[\overline{H}_i(\cos d)+\overline{K}_i(\cos d)\right]$$

Коэффициенты при неизвестных и свободные члены бесконечных систем определяются по формулам

$$a_{pk}^{(i)}=-\frac{k}{2}M_pI_{pk}^{(i)},\qquad b_{pk}^{(i)}=\frac{k}{2}N_pI_{pk}^{(i)}\quad(i=1,\,2)$$

$$c_{pk}^{(1)}=\frac{\lambda k\pi(-1)^p}{2b}K_{ik}^{(1)},\qquad c_{pk}^{(2)}=\frac{\lambda k\pi}{2b}K_{ik}^{(2)} \tag{1.8}$$

$$\gamma_k^{(1)}=2c_1y_k(\cos c)+\frac{k}{2}\int_0^d F_4(\theta)\,z_k(\cos\theta)\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\,d\theta-$$

$$-\frac{k}{2}\int_d^{\pi}F_3(\theta)\,z_k(\cos\theta)\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

$$\gamma_k^{(2)}=2c_1z_k(\cos d)+\frac{k}{2}\int_d^{\pi}F_2(\theta)\,y_k(\cos\theta)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\,d\theta-$$

$$-\frac{k}{2}\int_0^d F_1(\theta)\,y_k(\cos\theta)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

здесь функции $F_i(\theta)$ $(i=1-4)$ имеют вид

$$F_1(\theta)=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\theta}\frac{f_1(x)\cos\dfrac{x}{2}\,dx}{\sqrt{\cos x-\cos\theta}},\qquad F_2(\theta)=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_{\theta}^{\pi}\frac{f_2(x)\cos\dfrac{x}{2}\,dx}{\sqrt{\cos\theta-\cos x}} \tag{1.9}$$

$$F_3(\theta)=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\theta}\frac{f_3(x)\sin\dfrac{x}{2}\,dx}{\sqrt{\cos\theta-\cos x}},\qquad F_4(\theta)=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int_{\theta}^{\pi}\frac{f_3(x)\sin\dfrac{x}{2}\,dx}{\sqrt{\cos x-\cos\theta}}$$

В формулах (1.8) введены обозначения

$$I_{pk}^{(1)} = \int_0^{\pi} z_k(\cos\theta)\, z_p(\cos\theta) \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\, d\theta, \qquad I_{pk}^{(2)} = \int_0^{\pi} y_k(\cos\theta)\, y_p(\cos\theta) \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\, d\theta$$

$$K_{\xi k}^{(1)} = \int_0^{\pi} \bar{L}_\xi(\cos\theta)\, z_k(\cos\theta) \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\, d\theta$$

$$K_{\xi k}^{(2)} = \int_0^{\pi} \bar{L}_\xi(\cos\theta)\, y_k(\cos\theta) \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\, d\theta \tag{1.10}$$

$$L_\xi(\cos\theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\theta} \int_\theta^{\pi} \frac{\varphi_\xi(x) \sin\frac{x}{2}\, dx}{\sqrt{\cos\theta - \cos x}}$$

$$\bar{L}_\xi(\cos\theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\theta} \frac{\varphi_\xi(x) \cos\frac{x}{2}\, dx}{\sqrt{\cos x - \cos\theta}}$$

$\varphi_\xi(x)$ определяется по формуле (1.6).

2. Функции $L_\xi(\cos\theta)$, $y_k(\cos\theta)$, $z_k(\cos\theta)$ рассмотрены в работах [3, 4], где приведены их интегральные представления и асимптотические разложения, а также значения интегралов $I_{kp}^{(i)}$, $K_{pk}^{(i)}$.

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что функцию $\bar{L}_\xi(\cos\theta)$ можно представить в виде

$$\bar{L}_\xi(\cos\theta) = \frac{1}{\operatorname{sh}\xi\pi}\left|(1-\xi\pi)\, Y_\xi(\cos\theta) + \xi V_\xi(\cos\theta)\right| \tag{2.1}$$

Функции $Y_\xi(\cos\theta)$, $V_\xi(\cos\theta)$, а также связанные с ними $Z_\xi(\cos\theta)$ детально рассмотрены в работе [2]. Используя результаты [2], из (2.1) легко получить асимптотическое разложение функции $\bar{L}_\xi(\cos\theta)$ для больших „ξ"

$$\bar{L}_\xi(\cos\theta) = \frac{\xi e^{-\xi(\pi-\theta)}}{\pi}\left[(\theta-\pi)\sqrt{\frac{\pi}{\xi \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}} + O\left(\xi^{-\frac{3}{2}}\right)\right] \tag{2.2}$$

Интеграл $K_{\xi k}^{(2)}$ вычисляем аналогично [2, 3]

$$\int_0^{\pi} \frac{\bar{L}_\xi(x)\, y_k(x)\, dx}{1+x} = -\frac{k z_k(x)\, \bar{L}_\xi(x) + \xi y_k(x)\,[\bar{H}_\xi(x) + \bar{K}_\xi(x)]}{k^2+\xi^2} +$$

$$+ \frac{2\xi^2}{(k^2+\xi^2)^2}\,[k\bar{R}_\xi(x)\, z_k(x) + \xi \bar{K}_\xi(x)\, y_k(x)]$$

где

$$\overline{H}_i(\cos\theta)=\frac{2\sqrt{2}}{\pi\,\mathrm{sh}\,\frac{i}{2}\pi}\int_0^{\pi}\Big|\,\mathrm{sh}\,\frac{i}{2}x+\frac{\frac{i}{2}\pi\,\mathrm{sh}\,\frac{i}{2}(\pi-x)}{\mathrm{sh}\,\frac{i}{2}\pi}-$$

$$-\frac{i}{2}(\pi-x)\,\mathrm{ch}\,\frac{i}{2}x\,\Big|\,\frac{\sin\frac{x}{2}\,dx}{\sqrt{\cos x-\cos\theta}}$$

$$\overline{R}_i(\cos\theta)=Y_i(\cos\theta)/\mathrm{sh}\,\frac{i}{2}\pi,\qquad \overline{K}_i(\cos\theta)=Z_i(\cos\theta)/\mathrm{sh}\,\frac{i}{2}\pi \tag{2.3}$$

или

$$\overline{R}_i(\cos\theta)=\frac{2\sqrt{2}}{\pi\,\mathrm{sh}\,\frac{i}{2}\pi}\int_0^{\theta}\frac{\mathrm{ch}\,\frac{i}{2}x\cos\frac{x}{2}\,dx}{\sqrt{\cos x-\cos\theta}}$$

$$\overline{K}_i(\cos\theta)=\frac{2\sqrt{2}}{\pi\,\mathrm{sh}\,\frac{i}{2}\pi}\int_0^{\theta}\frac{\mathrm{sh}\,\frac{i}{2}x\sin\frac{x}{2}\,dx}{\sqrt{\cos x-\cos\theta}}$$

Подставляя значения интегралов $I_{pk}^{(i)}$, $K_{pk}^{(i)}$ в (1.7), пользуясь асимптотическими разложениями функций (2.3), а также результатами работ [1—3] для модулей коэффициентов при неизвестных X_k, Y_k, Z_p систем (1.4) и (1.7), получим следующие оценки:

$$\sum_{p=1}^{\infty}|a_{pk}^{(3)}|+\sum_{p=1}^{\infty}|b_{pk}^{(3)}|=2\sum_{p=1}^{\infty}|a_{pk}^{(3)}|<\frac{\pi}{2i}$$

$\sum\limits_{p=1}^{\infty}|a_{pk}^{(i)}|$, $\sum\limits_{p=1}^{\infty}|b_{pk}^{(i)}|$, $\sum\limits_{p=1}^{\infty}|c_{pk}^{(i)}|$ $(i=1,\ 2)$ имеют порядок $O\left(k^{-\frac{1}{2}}\right)$. При оценке сумм $\sum\limits_{p=1}^{\infty}|a_{pk}^{(i)}|$, $\sum\limits_{p=1}^{\infty}|b_{pk}^{(i)}|$ $(i=1,\ 2)$ исходим из того, что числа N_p и M_p (1.7) при больших значениях индекса стремятся к нулю, как $M_p=O\left(pe^{-2p\frac{h}{a}}\right)$ и $N_p=O\left(pe^{-p\frac{b}{a}}\right)$.

Если принять теперь, что $\frac{i}{2}>\frac{\pi}{2}$, то получим, что, начиная с некоторого значения $k=k_0$, сумма модулей коэффициентов при неизвестных станет меньше единицы. Это значит [5], что совокупность бесконечных систем алгебраических уравнений (1.4) и (1.7) квазивполне регулярна.

Накладывая обычные условия на граничные функции [3], легко показать, что свободные члены системы $\gamma_k^{(i)}$ имеют порядок $O\left(k^{-\frac{1}{2}}\right)$.

3. После определения неизвестных коэффициентов X_k, Y_k, Z_k из бесконечных систем (1.4) и (1.7), напряжения и перемещения внутри прямоугольника будем определять по формулам (1.2), где $\Phi(x, y)$ дается в виде (1.3). Однако, некоторые ряды, входящие в выражения напряжений и перемещений, на границе основной области сходятся медленно.

Улучшая сходимость этих рядов [2, 3], выделяя при этом характерные особенности, получим удобные для вычислений формулы для контактных напряжений и перемещений вне областей контактов

$$\sigma_y(x, b) = \frac{R_1 \cos\frac{x}{2}}{\sqrt{\cos^2\frac{x}{2} - \cos^2\frac{c}{2}}} + \frac{1}{2} F_3(\pi) +$$

$$+ \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\frac{x}{2} \left\{ \int_a^c \frac{F_2'(\theta)\, d\theta}{\sqrt{\cos x - \cos\theta}} + \right.$$

$$+ \frac{\pi^2 l}{b^2} \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p+1} p Z_p \int_a^c \frac{[H(\cos\theta) + K(\cos\theta)]}{\sqrt{\cos x - \cos\theta}} \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\, d\theta -$$

$$\left. - \int_a^c \frac{F_3'(\theta)\, d\theta}{\sqrt{\cos x - \cos\theta}} + \sum_{p=1}^{\infty} p [X_p M_p - Y_p N_p] \int_a^c \frac{y_p(\cos\theta) \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\, d\theta}{\sqrt{\cos x - \cos\theta}} \right\} \qquad (3.1)$$

$$(0 < x < c)$$

$$\sigma_y(x, 0) = \frac{R_2 \sin\frac{x}{2}}{\sqrt{\cos^2\frac{d}{2} - \cos^2\frac{x}{2}}} + \frac{1}{2} F_1(0) -$$

$$- \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\frac{x}{2} \left\{ \int_d^c \frac{F_2'(\theta)\, d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos x}} - \right.$$

$$- \frac{\pi^2 l}{b^2} \sum_{p=1}^{\infty} p Z_p \int_d^c \frac{[\bar{H}(\cos\theta) + \bar{K}(\cos\theta)]}{\sqrt{\cos\theta - \cos x}} \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\, d\theta -$$

$$\left. - \int_d^c \frac{F_1'(\theta)\, d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos x}} + \sum_{p=1}^{\infty} p [X_p N_p - Y_p M_p] \int_d^c \frac{Z_p(\cos\theta) \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\, d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos x}} \right\}$$

$$(d < x < \pi)$$

Как видно из (3.1), напряжения имеют особенность порядка $\frac{1}{\sqrt{r}}$ с коэффициентами R_1 и R_2, которые выражаются формулами

$$2R_1 = 4c_1 - F_1(c) - F_3(c) - \sum_{p=1}^{\infty} [M_p X_p - Y_p N_p] z_p(\cos c) +$$

$$+ \frac{i\pi}{b} \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p Z_p L_2(\cos c)$$

$$2R_2 = 4c_1 - F_2(d) - F_4(d) - \sum_{p=1}^{\infty} [M_p Y_p - X_p N_p] y_p(\cos c) +$$

$$+ \frac{i\pi}{b} \sum_{p=1}^{\infty} Z_p \bar{L}_2(\cos d)$$

Вычисляя перемещения в точках границы области вне контактов, получим

$$Ev(x, b) = \sqrt{2} \sin\frac{x}{2} \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} [X_p M_p - N_p Y_p] \int_0^x \frac{z_p(\cos\theta) \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos x}} + \right.$$

$$+ \frac{\pi i}{b} \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p-1} Z_p \int_x^{\pi} \frac{L_2(\cos\theta) \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos x}} +$$

$$\left. + \int_x^{\pi} \frac{F_3(\theta) \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos x}} - \int_0^x \frac{F_4(\theta) \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos x}} \right\} -$$

$$- 8c_1 \ln \frac{\sqrt{2} \sin\frac{x}{2} + \sqrt{\cos c - \cos x}}{\sqrt{2} \sin\frac{c}{2}} \qquad (c \leqslant x \leqslant \pi)$$

$$Ev(x, 0) = \sqrt{2} \cos\frac{x}{2} \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} [X_p N_p - M_p Y_p] \int_x^{\pi} \frac{dy_p(\cos\theta) \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} d\theta}{\sqrt{\cos x - \cos\theta}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\pi i}{b} \sum_{p=1}^{\infty} Z_p \int_x^{\pi} \frac{\bar{L}_2(\cos\vartheta) \operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} d\theta}{\sqrt{\cos x - \cos\theta}} + \right.$$

$$+\int_d^{\pi}\frac{F_2(\theta)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\,d\theta}{\sqrt{\cos x-\cos\theta}}-\int_x^{d}\frac{F_1(\theta)\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\,d\theta}{\sqrt{\cos x-\cos\theta}}\Bigg\}+$$

$$+8c_1\ln\frac{\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}+\sqrt{\cos x-\cos d}}{\sqrt{2}\cos\frac{d}{2}},\qquad(0\leqslant x\leqslant d)$$

c_1 всюду определяется по формуле (1.6).

Пользуясь полученными выше формулами для нормальных напряжений, вычислим силы и моменты, приложенные к штампам

$$P_1=2\int_0^{c}\sigma_y(x,b)\,dx=4c_1\pi-2\int_0^{c}f_3(x)\,dx$$

$$P_2=\int_d^{\pi}\sigma_y(x,0)\,dx=2c_1\pi+\int_0^{d}f_1(x)\,dx$$

$$M=\int_d^{\pi}\sigma_y(x,0)\left(\frac{\pi+d}{2}-x\right)dx=\frac{\pi-d}{2}P_2+2c_1d(2\pi-d)-$$

$$-\frac{2b}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{Z_k}{k^2\operatorname{sh}\beta_k\pi}\Big|\operatorname{ch}\beta_k\pi-\frac{\beta_k\pi\operatorname{ch}\beta_k(\pi-d)-\beta_k\pi}{\operatorname{sh}\beta_k\pi}+$$

$$+(\beta_kd-\operatorname{cth}\beta_kd)\operatorname{sh}\beta_kd\Big|+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}|(1+M_k)\,Y_k-N_kX_k|\frac{(-1)^k-\cos kd}{k^2}$$

4. Пользуясь приведенным решением, можно получить решения для следующих смешанных задач.

а) Подставляя в решение

$$f_2(x)=\text{const},\quad f_4(x)=\text{const}$$

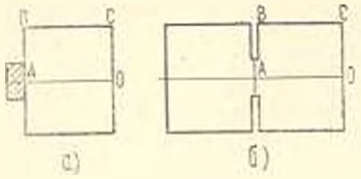
получим решение для полосы, имеющей поперечные выходящие и внутренние разрезы (фиг. 1б) и растягивающейся в бесконечности.

б) Подставляя в решение $d=\pi$, предельным переходом получим решение для конечного прямоугольника с одним штампом, приложенным в центре одного из сторон прямоугольника (фиг. 2а). На остальных краях заданы напряжения.

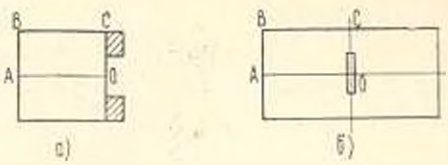
Принимая здесь $f_4(x)=0$, получим решение для прямоугольника с двумя симметричными выходящими разрезами (фиг. 2б).

в) При $c=0$ из общего решения получим решение задачи для прямоугольника с двумя симметричными штампами, расположенными по краям одной из сторон (фиг. 3а).

Случай $f_0(x) = 0$ соответствует задаче для прямоугольника с одним внутренним центрально расположенным разрезом (фиг. 3б).



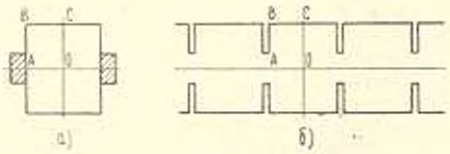
Фиг. 2.



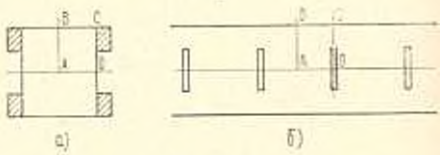
Фиг. 3.

г) Если $d = 0$ и $f_2(x) = 0$, получим решение для задачи, соответствующей (фиг. 4а), и если еще $f_1(x) = \text{const}$, то — для задачи (фиг. 4б). Отметим, что этот же результат был получен в работе [3].

д) Если $c = 0$ и $f_1(x) = 0$, получим симметричную задачу для прямоугольника с четырьмя штампами (фиг. 5а). Подставляя еще $f_2(x) = \text{const}$, получим решение для полосы с периодическими внутренними разрезами (фиг. 5в). Это решение можно получить также, исходя из [2].



Фиг. 4.



Фиг. 5.

Таблица 1

c	$\pi/2$	$9\pi/10$	$39\pi/40$	$79\pi/80$	$159\pi/160$
R_1^*/q	0.73378	0.16028	0.03929	0.01963	0.00982

Таблица 2

d	$\pi/160$	$\pi/80$	$\pi/40$	$\pi/10$	$\pi/2$
R_2^*/q	0.00982	0.01962	0.03921	0.15659	0.73386

Рассмотрим численный пример для случаев „б“ и „в“ (фиг. 2б и 3б); при разных глубинах внешних и внутренних разрезов вычислены значения коэффициента при особенности напряжения $\sigma_y(c, d)$ и $\sigma_y(d, 0)$ по формулам $R_1^* = R_1 \cos\dfrac{c}{2}$ и $R_2^* = R_2 \sin\dfrac{d}{2}$ соответственно, где R_1 и R_2 определяются из (3.2).

Во всех случаях соотношение размеров прямоугольника принято равным $b/a = 2$, а равномерная нормальная нагрузка q действует только по кромкам $y = 0$ и $y = b$.

Результаты вычислений приведены в табл. 1 и 2.

Институт Механики
АН Армянской ССР

Поступила 27 X 1971

Ա. Հ. ԲԱԲԼՈՅԱՆ, Ա. Մ. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

ՈՒՂՂԱՆԿՅԱՆ ՀԱՄԱՐ ՀԱՐԹ ԽՆԴԻՐ ԼՈՒԾՈՒՄԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Լուծվում է առաձգականության տեսության հարթ խառը խնդիրը երկու հանգիպակաց կողմերից կոշտ դրոշմներով սեղմվող ուղղանկյան համար։ Մի կողմում դրոշմը դրված է կենտրոնում, իսկ մյուս կողմում երկու դրոշմներ տեղակայված են նպիրում սիմետրիկ ձևով։ Ուղղանկյան և դրոշմների միջև շփումը բացակայում է։ Եզրագծի մնացած մասերում տրված են լարումները։

Խնդիրը, եռանկյունաչափական կորիզներով զույգ շարք-հավասարումների օգնությամբ, բերվում է թվագի-լիովիլի ռեգուլյար հանրահաշվական հավասարումների անվերջ սիստեմից անհայտ գործակիցների որոշմանը։

Մասնավոր դեպքերում ստացվում են կարմրածքներ ունեցող ուղղանկյուն տիրույթների համար մի քանի հարթ խնդիրների լուծումներ։

Բերվում է թվային օրինակ։

SOLUTION OF A PLANE MIXED PROBLEM FOR A RECTANGLE

A. A. BABLOYAN, A. M. MKRTCHIAN

S u m m a r y

A plane problem for a rectangle, pressed on two opposite sides with rigid punches, is solved. On one side the punch is applied at its centre, and on the opposite side the two punches are placed symmetrically at the edges. There is no friction between the punches and the rectangle.

By solving dual series-equations with trigonometric kernels, the problem is reduced to determining the unknown coefficients from quasi-quite regular infinite systems of linear algebraic equations.

In particular cases the solutions of some plane problems for a rectangular region with slits are also obtained.

A numerical example is presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абрамян Б. Л.* К плоской задаче теории упругости для прямоугольника. ПММ, т. XXI, вып. 1, 1957.
2. *Баблоян А. А., Гулканян Н. О.* Об одной смешанной задаче для прямоугольника. Изв. АН АрмССР, Механика, т. XXII, № 1, 1969.
3. *Баблоян А. А., Мкртчян А. М.* Об одной смешанной задаче для прямоугольника. Изв. АН АрмССР, Механика, т. XXIV, № 5, 1971.
4. *Баблоян А. А.* Решение некоторых парных уравнений, встречающихся в задачах теории упругости. ПММ, т. XXXI, вып. 4, 1967.
5. *Канторович Л. В., Вилих Б. З., Пинскер А. Г.* Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. Гостехиздат. М.—Л., 1950.