

Р. М. КИРАКОСЯН

УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИЙ ОСЕСИММЕТРИЧНЫЙ ИЗГИБ  
 КРУГЛОЙ ЗАЩЕМЛЕННОЙ ПЛАСТИНКИ ПОД  
 ДЕЙСТВИЕМ КОНУСООБРАЗНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ  
 ПЕРЕМЕННОЙ НАГРУЗКИ

Рассматривается осесимметричный упруго-пластический изгиб защемленной по контуру круглой пластинки, несущей нагрузку, конусообразное распределение которой при постоянной равнодействующей устремляется к равномерному. При этом изменение нагрузки считается настолько медленным, чтобы возможно было пренебречь инерционными эффектами.

Показано, что в упругом случае в результате изменения нагрузки по всей пластинке происходит только процесс разгрузки. Считая, что пластинка будет только разгружаться и в упруго-пластическом случае, строится решение поставленной задачи с использованием предварительно найденного точного решения начальной упруго-пластической задачи. Далее показано, что полученное таким образом решение обеспечивает разгрузку по всей пластинке.

1. Рассмотрим защемленную круглую пластинку толщины  $h$  и радиуса  $a$ . Пусть пластинка несет распределенную нагрузку конусообразного очертания

$$q(r) = q_0 \left( 1 - \frac{r}{a} \right) \quad (1.1)$$

способную вызывать упруго-пластические деформации. Допустим, что нагрузка с течением времени медленно и монотонно изменяется от своего начального состояния (1.1) и при неизменной равнодействующей  $Q = q_0/3 \pi a^2$  стремится к равномерной нагрузке

$$q_1 = \frac{2q_0}{3} = \text{const} \quad (1.2)$$

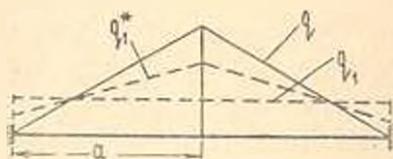
Для текущих значений нагрузки будем иметь

$$q_1(r, z) = q_0 \left( 1 - z - \frac{z - z_1}{2a} r \right) \quad (1.3)$$

где параметр нагружения  $0 \leq z(r) \leq 2/3$  является монотонно возрастающей функцией времени (фиг. 1).

Рассмотрим начальную задачу, то есть задачу упруго-пластического изгиба пластинки под постоянной во времени нагрузкой (1.1).

Для конкретности ограничимся случаем линейного упрочнения материала.



Фиг. 1.

Следуя [1], разрешающее уравнение пластинки представим в виде системы двух дифференциальных уравнений второго порядка

$$\frac{dx}{d\rho} = v$$

$$\frac{dv}{d\rho} = v \frac{4(1 - \Omega) - (3x - 2v) \frac{\partial \Omega}{\partial x} - \frac{q e^{-\rho}}{v}}{2(1 - \Omega) + (3x - 2v) \frac{\partial \Omega}{\partial v}} = \varphi(x, v) \quad (1.4)$$

где

$$\rho = \ln \frac{r}{r_0}, \quad x = -\frac{h}{2\varepsilon}, \quad z = -\frac{h}{2\varepsilon} \frac{1}{r} \frac{dw}{dr}$$

$$\Omega = 0 \quad \text{при } \varepsilon = \frac{z_0}{z} \leq 1, \quad \Omega = \left(1 - \frac{3}{2\varepsilon} + \frac{1}{2\varepsilon^3}\right) \quad \text{при } \varepsilon \geq 1$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} = \frac{3z_0}{z^3} (2\varepsilon - v) (\varepsilon^2 - 1), \quad z = 2 \sqrt{x^2 - xv + \frac{v^2}{3}} \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial v} = -\frac{\lambda}{\varepsilon^3} (3x - 2v) (\varepsilon^2 - 1), \quad \bar{q} = \frac{q_0 h C^2}{2\varepsilon_0 D} e^{2\rho} \int_{\rho}^{\infty} \frac{q(\xi)}{q_0} e^{-2\xi} d\rho$$

$\varepsilon_0$  — предел упругих деформаций,  $\varepsilon_1$  — интенсивность деформаций сдвига на поверхностях пластинки  $z = \pm h/2$ ,  $\lambda = \text{const}$  — параметр упрочнения,  $C$  — некоторая постоянная, подлежащая определению.

С учетом (1.1) и (1.5) получим

$$\bar{q} = \bar{q}_1 - \bar{q}_2 e^{-\rho} \quad (1.6)$$

где

$$\bar{q}_1 = \frac{q_0 h C^2}{2\varepsilon_0 D}, \quad \bar{q}_2 = \frac{2\bar{q}_1}{3\alpha} C = \frac{q_0 h C^3}{3\varepsilon_0 \alpha D} \quad (1.7)$$

В центре пластинки имеем [1]

$$\rho = \infty, \quad x = x_0 > 0, \quad v = 0 \quad (1.8)$$

Хотя и относительно  $v$  и  $x$  имеем задачу Коши с известными начальными условиями (1.8), все же непосредственное численное интегрирование уравнений (1.4) невозможно. Это ясно, так как начальные условия (1.8) заданы в бесконечно удаленной точке  $\rho = \infty$ . Следовательно, необходимо предварительно определить значения  $x$  и  $v$  для некоторого конечного значения аргумента  $\rho$ . С этой целью, следуя [1], для уравнений (1.4) в окрестности  $\rho = \infty$  ( $r = 0$ ) получим следующее асимптотическое разложение решений:

$$\begin{aligned} x = x_0 & - \frac{\bar{q}_1}{16(1-i) + \frac{3i}{x_0} + \frac{5i}{4x_0^2}} e^{-2\rho} + \\ & + \frac{\bar{q}_2}{30(1-i) + \frac{45i}{8x_0} + \frac{75i}{32x_0^2}} e^{-3\rho} + \dots \\ v = & \frac{2\bar{q}_1}{16(1-i) + \frac{3i}{x_0} + \frac{5i}{4x_0^2}} e^{-2\rho} - \\ & - \frac{\bar{q}_2}{10(1-i) + \frac{15i}{8x_0} + \frac{25i}{32x_0^2}} e^{-3\rho} + \dots \end{aligned} \quad (1.9)$$

Заданная некоторым большим значением аргумента  $\rho_0$  из (1.9) определяем значения  $x_1$  и  $v_1$ . Теперь для уравнений (1.4) вместо (1.8) будем иметь условия

$$\rho = \rho_1, \quad x = x_1, \quad v = v_1 \quad (1.10)$$

позволяющие численно интегрировать уравнения (1.4) по методу конечных разностей.

Пусть  $\rho = \rho_*$  есть граница раздела упругой и упруго-пластических областей, то есть

$$\varepsilon = 1 \quad \text{при} \quad \rho = \rho_* \quad (x = x_*, \quad v = v_*) \quad (1.11)$$

С помощью уравнений (1.4), после обеспечения непрерывности  $x$  и  $v$  в точке  $\rho^*$ , для упругой части пластинки получим

$$\begin{aligned} x = & \frac{c_1}{2} e^{2\rho} - \frac{\bar{q}_1}{16} e^{-2\rho} + \frac{\bar{q}_2}{30} e^{-3\rho} + c_2 \\ v = & c_1 e^{2\rho} + \frac{\bar{q}_1}{8} e^{-2\rho} - \frac{\bar{q}_2}{10} e^{-3\rho} \end{aligned} \quad (1.12)$$

где

$$c_1 = v_a e^{-2\rho_a} - \frac{\bar{q}_1}{8} e^{-\rho_a} + \frac{\bar{q}_2}{10} e^{-3\rho_a}$$

$$c_2 = x_a - \frac{c_1}{2} e^{2\rho_a} + \frac{\bar{q}_1}{16} e^{-2\rho_a} - \frac{\bar{q}_2}{30} e^{-4\rho_a} \quad (1.13)$$

В случае, когда с приближением к краю пластинки опять появится область пластических деформаций, необходимо из формул (1.12) перейти снова к численному интегрированию уравнений (1.4). Имея в виду это обстоятельство, нам представляется рациональным интегрирование уравнений (1.4) с начала до конца численно, полагая для упругой части пластинки

$$\Omega = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial v^2} = 0 \quad (1.14)$$

Имея значение  $\rho_a$ , при котором  $x$  превращается в нуль (условие заземления), можно определить постоянную  $C$

$$C = a e^{\rho_a} \quad (1.15)$$

Следует отметить одну специфическую особенность задачи, имеющую место по сравнению со случаем равномерно распределенной нагрузки, рассмотренным А. А. Ильюшиным [1]. С целью получения численного решения достаточно общего характера необходимо при произвольных значениях других параметров задаваться только значениями относительных нагрузок  $\bar{q}_1$  и  $\bar{q}_2$ . Так как эти нагрузки зависят друг от друга, то это влечет за собой предварительное задание значения постоянной  $C$

$$C = \frac{3}{2} a \frac{\bar{q}_2}{\bar{q}_1} \quad (1.16)$$

Очевидно, что в истинном случае значение  $C$  должно совпадать со значением (1.15), определяемым из граничного условия. Сравнивая (1.15) с (1.16), для значения  $\rho_a$  получим трансцендентное уравнение

$$e^{2(\rho_a/\bar{q}_1)} = \frac{3}{2} \frac{\bar{q}_2}{\bar{q}_1} \quad (1.17)$$

Нахождением  $\rho_a$ , а следовательно, и постоянной  $C$  фактически завершается решение начальной упруго-пластической задачи.

Прогибы пластинки вычисляются по формуле

$$w(\rho) = \frac{2v_a C^2}{h} \int_0^{\rho} x e^{-2x} dx, \quad (\rho_a \leq \rho \leq \infty) \quad (1.18)$$

где для  $x$  при больших  $\rho$  можно использовать асимптотическое разложение (1.9).

При решении задачи упруго-пластического изгиба пластинки для произвольного текущего состояния нагрузки (1.3) существенно важно выяснить характер изменения деформированного состояния пластических областей пластинки вследствие изменения нагрузки, то есть выяснить вопрос о том, разгружаются они (их отдельные части) или нагружаются с возрастанием параметра  $\alpha$ .

На основе гипотезы Кирхгофа-Лива условие нагружения и разгрузки пластинки в данном случае сводится соответственно к условиям возрастания и убывания квадратичной формы [1]

$$P_1 = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2, \quad \left( x_1 = \frac{d^2 w}{dr^2}, \quad x_2 = \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \quad (1.19)$$

Следовательно, в разгружаемых областях пластинки должно соблюдаться условие

$$\frac{\partial P_1}{\partial \alpha} < 0 \quad (1.20)$$

а в областях нагружения — условие

$$\frac{\partial P_2}{\partial \alpha} > 0 \quad (1.21)$$

Вся трудность решения поставленной задачи заключается в том, что заранее невозможно различать разгружаемые пластические области от нагружаемых.

2. Рассмотрим вопрос о характере деформирования пластинки при ее упругом изгибе.

Проинтегрировав дифференциальное уравнение [2] осесимметричного упругого изгиба круглой пластинки под нагрузкой (1.3) и удовлетворив условиям защемления по контуру, находим

$$w^* = \frac{q_0 a^4}{D} \bar{w}(x), \quad \left( x = \frac{r}{a} \right) \quad (2.1)$$

где

$$\bar{w}(x) = \frac{1-\nu}{64} x^4 - \frac{2-3\nu}{450} x^6 - \frac{29-21\nu}{1440} x^8 + \frac{43-27\nu}{4800}$$

$D = \frac{EK^3}{12(1-\nu^2)}$  — цилиндрическая жесткость пластинки.

Квадратичная форма (1.19) примет вид

$$P_1^* = \frac{q_0 a^4}{D^2} \bar{P}, \quad (2.2)$$

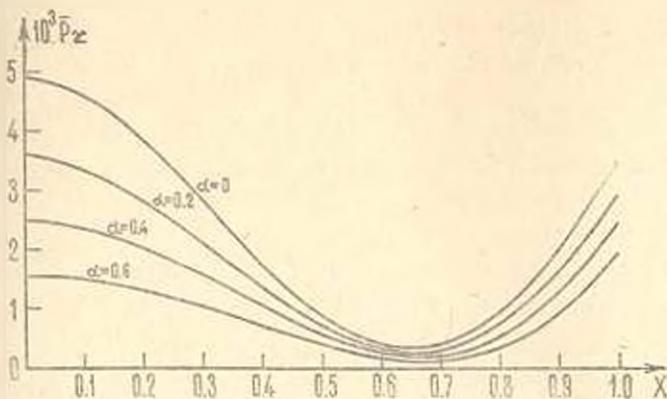
где

$$\bar{P}_1 = \bar{x}_1^2 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 + \bar{x}_2^2$$

$$\bar{x}_1 = \frac{3}{16} (1 - \alpha) x^2 - \frac{2}{45} (2 - 3\alpha) x^3 - \frac{29 - 21\alpha}{720} \quad (2.3)$$

$$\bar{x}_2 = \frac{1 - \alpha}{16} x^2 - \frac{2 - 3\alpha}{90} x^3 - \frac{29 - 21\alpha}{720}$$

Нетрудно убедиться, что при возрастании параметра нагружения  $\alpha$  в интервале  $0 \leq \alpha \leq 2/3$  квадратичная форма  $\bar{P}_1$ , следовательно, и  $P_1$ , убывает для всех  $0 \leq x \leq 1$  (фиг. 2). Это означает, что в течение устремления нагрузки (1.1) к равномерной нагрузке (1.2) во всей упругой пластинке происходит только процесс разгрузки.



Фиг. 2.

Будем считать, что это имеет место и в случае упруго-пластического изгиба пластинки. Тогда, имея в виду упругий характер процесса разгрузки, решение задачи упруго-пластического изгиба пластинки под действием переменной нагрузки (1.3) можно представить в виде

$$w(\rho, \alpha) = w^*(\rho) - \Delta w(\rho, \alpha) \quad (2.4)$$

где

$$\Delta w(\rho, \alpha) = \frac{q_0 a^4}{2D} \pi \left( \frac{1}{32} \frac{C^4}{a^4} e^{-4\rho} - \frac{1}{75} \frac{C^3}{a^3} e^{-5\rho} - \frac{7}{240} \frac{C^2}{a^2} e^{-2\rho} - \frac{9}{800} \right)$$

$w^*(\rho)$  — упруго-пластические прогибы пластинки под действием постоянной во времени нагрузки (1.1) (формула (1.18)). Кривизны срединной плоскости пластинки согласно с (1.19) и (2.4) примут вид

$$\chi_1(\rho, \alpha) = \frac{\chi_1}{h} \frac{a^2}{C^2} \bar{\chi}_1(\rho, \alpha)$$

$$\chi_2(\rho, \alpha) = \frac{\chi_2}{h} \frac{a^2}{C^2} \bar{\chi}_2(\rho, \alpha) \quad (2.5)$$

где

$$\bar{x}_1(\rho, \alpha) = 2 \frac{C^2}{a^2} (v - z) - \bar{a}_{1,1} \left( \frac{3}{8} \frac{C^2}{a^2} e^{-2z} - \frac{4}{15} \frac{C^3}{a^3} e^{-3z} - \frac{7}{120} \right)$$

$$\bar{x}_2(\rho, \alpha) = 2 \frac{C^2}{a^2} z - \bar{a}_{1,2} \left( \frac{1}{8} \frac{C^2}{a^2} e^{-2z} - \frac{1}{15} \frac{C^3}{a^3} e^{-3z} - \frac{7}{120} \right)$$

Имея (2.5), нетрудно проверить условие (1.20), то есть выяснить вопрос о том, что полученное решение (2.4) обеспечивает разгрузку всей пластинки.

В нижеприведенных таблицах представлены некоторые результаты численного решения задачи при  $\lambda = 0.95$  для трех случаев, когда зона пластических деформаций в центре пластинки распространяется до глубин, составляющих  $1/8$ ,  $1/4$  и  $3/8$  части толщины пластинки ( $x_0 = 2/3, 1$  и  $2$ ). На основе данных столбцов „4–7“, где помещены значения приведенной интенсивности деформаций сдвига

$$\bar{P}_z(\rho, \alpha) = \bar{x}_1(\rho, \alpha) + \bar{x}_1(\rho, \alpha) \bar{x}_2(\rho, \alpha) + \bar{x}_2(\rho, \alpha)$$

легко заметить, что решение (2.4) обеспечивает разгрузку всей пластинки.

Таблица 1

$x_0 = \frac{2}{3}, \bar{a}_{1,1} = 10, \bar{a}_{1,2} = 5.19, \frac{C}{a} = 0.778, \rho_a = -0.25$						
$x = \frac{r}{a}$	z	v	$\bar{P}_z$			
			$\alpha = 0$	$\alpha = 0.2$	$\alpha = 0.4$	$\alpha = 0.6$
1	2	3	4	5	6	7
0.007	0.667	0	1.964	1.438	0.994	0.632
0.023	0.666	0.002	1.953	1.430	0.989	0.628
0.058	0.661	0.012	1.897	1.387	0.958	0.607
0.078	0.656	0.020	1.844	1.348	0.929	0.588
0.105	0.648	0.035	1.756	1.282	0.882	0.556
0.142	0.634	0.060	1.614	1.176	0.807	0.507
0.192	0.611	0.096	1.403	1.021	0.699	0.438
0.253	0.575	0.145	1.124	0.821	0.565	0.356
0.349	0.522	0.220	0.767	0.568	0.398	0.258
0.472	0.438	0.352	0.348	0.263	0.190	0.128
0.637	0.303	0.558	0.171	0.086	0.060	0.038
0.860	0.096	0.821	0.699	0.554	0.426	0.315
0.904	0.054	0.876	0.934	0.755	0.596	0.455
0.951	0.008	0.924	1.221	1.009	0.818	0.646

Таблица 2

$$z_0=1, \bar{q}_1=10, \bar{q}_2=4.7, \frac{C}{a}=0.705, \rho_a=-0.35$$

$x$	$z$	$\tau$	$P_x$			
			$\tau=0$	$\tau=0.2$	$\tau=0.4$	$\tau=0.6$
1	2	3	4	5	6	7
0.006	1	0	2.957	2.303	1.730	1.239
0.039	0.994	0.012	2.887	2.245	1.684	1.203
0.095	0.965	0.067	2.569	1.983	1.472	1.038
0.129	0.939	0.112	2.308	1.770	1.303	0.907
0.174	0.896	0.179	1.930	1.465	1.064	0.727
0.235	0.829	0.266	1.452	1.087	0.776	0.517
0.317	0.736	0.356	0.951	0.707	0.498	0.326
0.427	0.618	0.441	0.515	0.389	0.281	0.190
0.577	0.460	0.627	0.161	0.123	0.090	0.063
0.779	0.231	0.918	0.362	0.276	0.202	0.139
0.819	0.184	0.974	0.506	0.393	0.294	0.210
0.861	0.133	1.030	0.691	0.547	0.420	0.310
0.905	0.080	1.106	0.962	0.781	0.618	0.475
0.951	0.021	1.291	1.563	1.322	1.101	0.901

Таблица 3

$$z_0=2, \bar{q}_1=10, \bar{q}_2=4.25, \frac{C}{a}=0.638, \rho_a=-0.45$$

$x$	$z$	$\tau$	$P_x$			
			$\tau=0$	$\tau=0.2$	$\tau=0.4$	$\tau=0.6$
1	2	3	4	5	6	7
0.006	2	0	7.950	6.852	5.835	4.899
0.019	1.997	0.008	7.896	6.802	5.791	4.860
0.047	1.978	0.044	7.603	6.539	5.555	4.652
0.064	1.960	0.079	7.331	6.295	5.337	4.459
0.086	1.928	0.139	6.870	5.881	4.969	4.134
0.117	1.873	0.237	6.128	5.218	4.381	3.617
0.157	1.781	0.387	5.033	4.246	3.527	2.874
0.212	1.636	0.588	3.636	3.022	2.465	1.966
0.287	1.427	0.801	2.200	1.793	1.427	1.105
0.387	1.161	0.950	1.086	0.873	0.684	0.518
0.522	0.867	1.003	0.432	0.351	0.284	0.222
0.705	0.547	1.172	0.231	0.180	0.136	0.099
0.952	0.148	1.819	1.701	1.449	1.217	1.006
1.000	0.030	3.174	6.492	5.992	5.513	5.053

Институт механики  
АН Армянской ССР

Поступила 25 XII 1970

## Գ. Մ. ԿԻՐԱԿՈՍՅԱՆ

ԱՄՐԱԿՅՅՎԱԿՆ ԿՈՐ ՈԱԼԻ ԱՌԱՋԳԱ-ՊՂԱՍՏԻԿԱԿԱՆ ԱՌԱՆՏՔԱ-ՈՒՄԻՏԻՐԻԿ  
ԾՌՈՒՐԸ ԿՈՆԱԶԵՎ ԲԱՇՆՎՈՒՄ ՓՈՓՈԽԵԼՎԱՆ ԲՆԻԻ ԱԶԳԵՑՈՒԹՅԱՆ ՏԱԿ

## Ա մ փ ո փ ու մ

Դիտարկվում է Լըրում ամրակցված կլոր սալի առաձգա-պլաստիկական առանցքասիմետրիկ ծռումը, երբ սալի կոնաձև բաշխված բևուր հաստատուն համադրում ձգտում է հավասարաչափ բաշխված բևուր, Ընդ որում բևուր փոփոխությունը կլորակվում է աչիքան դանդաղ, որովհետև հնարավոր լինի ինկր-ցիոն էֆեկտներն արհամարհել:

Ձույց է տրվում, որ բևուր նշված փոփոխությունը առաձգական սալում առաջացնում է միայն բեռնաթափում. Ծնվադրելով, որ ամբողջ սալում տեղի կունենա միայն բեռնաթափում նաև սալի առաձգա-պլաստիկական ծռման ռեպրում, կատուցվում է դրված խնդրի լուծումը՝ օգտագործելով նախնական առաձգա-պլաստիկական խնդրի նախօրոք դրած հղորիտ լուծումը: Հետագայում ցույց է տրվում, որ այս կերպ ստացված լուծումը ապահովում է ամբողջ սալի բեռնաթափում:

ON ELASTIC-PLASTIC AXISYMMETRICAL BENDING OF  
A CIRCULAR FASTENED PLATE UNDER THE EFFECT OF  
A CONICAL DISTRIBUTED VARIABLE LOAD

R. M. KIRAKOSIAN

## S u m m a r y

The elastic-plastic axisymmetrical bending of a circular plate fastened over its contour, carrying a load whose conical distribution with a constant resultant tends to be uniform, is considered. The variation in load is assumed to be so slow that inertial effects may be neglected. It is shown that in the elastic case due to variation in load the process of unloading alone takes place throughout the plate. Assuming the plate to be only unloading in the elastic-plastic case as well, the solution of the problem is found by employing the solution for the initial elastic-plastic problem obtained preliminary.

The solution thus found is shown to provide unloading throughout the plate.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ильюшин А. А. Пластичность. Гостехиздат, М.-Л., 1948.
2. Тимошенко С. П., Вoinовский-Кригер С. Пластики и оболочки. Физматгиз, М., 1963.