

А. А. ХАЧАТРЯН

ЧИСТЫЙ ИЗГИБ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ,  
 ИЗГОТОВЛЕННОЙ ИЗ РАЗНОМОДУЛЬНОГО МАТЕРИАЛА

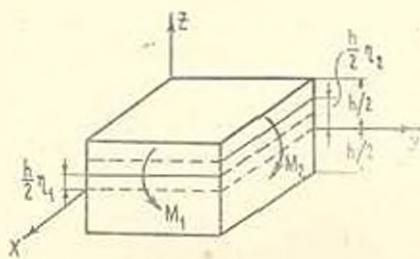
1. Рассмотрим прямоугольную пластинку, находящуюся под действием изгибающих моментов интенсивности  $M_x = M_1$  и  $M_y = M_2$ , равномерно распределенных по ее краям (фиг. 1). Пусть пластинка изготовлена из разномодульного материала [1, 2] с упругими постоянными

$$a_{11} = \frac{1}{E^+}, \quad a_{22} = \frac{1}{E^-}, \quad a_{12} = -\frac{\nu^+}{E^+} = -\frac{\nu^-}{E^-}$$

Под действием указанных на фиг. 1 изгибающих моментов верхние слои пластинки растягиваются, а нижние — сжимаются. Следовательно, нормальные напряжения  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  по толщине пластинки меняют свои знаки, обращаясь в нуль где-то на уровне  $z = \frac{h}{2} \gamma_1$  и  $z = \frac{h}{2} \gamma_2$  соответственно.

Для определенности предположим  $a_{22} > a_{11}$  ( $E^+ > E^-$ ). Тогда очевидно, что  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  будут положительными и при  $M_1 = M_2$  естественно считать, что  $\gamma_1 \neq \gamma_2$ . Для изложения удобно будет принять неравенство  $\gamma_2 > \gamma_1$ . В дальнейшем мы выясним, при каких соотношениях между моментами  $M_1$  и  $M_2$  это неравенство будет справедливым.

Таким образом, пластинка по толщине делится на следующие три области с различными знаками напряжений  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$ :



Фиг. 1.

- 1)  $-\frac{h}{2} < z < \frac{h}{2} \gamma_1$  ( $\sigma_x < 0, \sigma_y < 0$ ),
- 2)  $\frac{h}{2} \gamma_1 < z < \frac{h}{2} \gamma_2$  ( $\sigma_x > 0, \sigma_y < 0$ ),
- 3)  $\frac{h}{2} \gamma_2 < z < \frac{h}{2}$  ( $\sigma_x > 0, \sigma_y > 0$ ).

Законы упругости для этих областей будут [1, 2]

$$\begin{aligned} \sigma_x &= a_{22} \sigma_x + a_{12} \sigma_y \\ \sigma_y &= a_{12} \sigma_x + a_{22} \sigma_y \end{aligned} \quad \text{при} \quad -\frac{h}{2} < z < \frac{h}{2} \gamma_1$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= a_{11}z_x + a_{12}z_y & \text{при } \frac{h}{2} \tau_{11} < z < \frac{h}{2} \tau_{12} \\ \varepsilon_y &= a_{11}z_x + a_{22}z_y \\ \varepsilon_x &= a_{11}z_x + a_{12}z_y & \text{при } \frac{h}{2} \tau_{12} < z < \frac{h}{2} \tau_{11} \\ \varepsilon_y &= a_{12}z_x + a_{11}z_y \end{aligned} \quad (1.1)$$

Принимая гипотезу Кирхгофа-Лява, для компонент деформации будем иметь

$$\varepsilon_x = \varepsilon_1 + z\chi_1 \quad \varepsilon_y = \varepsilon_2 + z\chi_2 \quad (1.2)$$

где  $\varepsilon_i$ ,  $\chi_i$  — деформации и изменения кривизны срединной поверхности ( $z=0$ ) пластинки.

Подставляя (1.2) в (1.1) и решая относительно  $z_x$  и  $z_y$ , получим

$$\begin{aligned} z_x &= \frac{a_{22}\varepsilon_1 - a_{12}\varepsilon_2}{a_{22}^2 - a_{12}^2} + z \frac{a_{22}\chi_1 - a_{12}\chi_2}{a_{22}^2 - a_{12}^2} & \text{при } -\frac{h}{2} < z < \frac{h}{2} \tau_{11} \\ z_y &= \frac{a_{22}\varepsilon_2 - a_{12}\varepsilon_1}{a_{22}^2 - a_{12}^2} + z \frac{a_{22}\chi_2 - a_{12}\chi_1}{a_{22}^2 - a_{12}^2} \\ z_x &= \frac{a_{11}\varepsilon_1 - a_{12}\varepsilon_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} + z \frac{a_{11}\chi_1 - a_{12}\chi_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} & \text{при } \frac{h}{2} \tau_{11} < z < \frac{h}{2} \tau_{12} \\ z_y &= \frac{a_{11}\varepsilon_2 - a_{12}\varepsilon_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} + z \frac{a_{11}\chi_2 - a_{12}\chi_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \\ z_x &= \frac{a_{11}\varepsilon_1 - a_{12}\varepsilon_2}{a_{11}^2 - a_{12}^2} + z \frac{a_{11}\chi_1 - a_{12}\chi_2}{a_{11}^2 - a_{12}^2} & \text{при } \frac{h}{2} \tau_{12} < z < \frac{h}{2} \\ z_y &= \frac{a_{11}\varepsilon_2 - a_{12}\varepsilon_1}{a_{11}^2 - a_{12}^2} + z \frac{a_{11}\chi_2 - a_{12}\chi_1}{a_{11}^2 - a_{12}^2} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Эти напряжения должны быть непрерывными по высоте пластинки, то есть они должны удовлетворять следующим условиям:

$$\sigma_x \Big|_{z=\frac{h}{2}\tau_{11}-0} = \sigma_x \Big|_{z=\frac{h}{2}\tau_{11}+0} = 0, \quad \sigma_y \Big|_{z=\frac{h}{2}\tau_{12}-0} = \sigma_y \Big|_{z=\frac{h}{2}\tau_{12}+0} = 0 \quad (1.4)$$

Удовлетворяя условиям (1.4), находим

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= - \left[ \tau_{11}\chi_1 + a_{12}(\chi_2 - \tau_{11}) \frac{a_{11}\chi_1 - a_{12}\chi_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \right] \frac{h}{2} \\ \varepsilon_2 &= - \left[ \tau_{12}\chi_2 - a_{12}(\chi_1 - \tau_{12}) \frac{a_{11}\chi_1 - a_{12}\chi_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \right] \frac{h}{2} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Отметим, что при этом непрерывность напряжений  $\sigma_y$  (при  $z = \frac{h}{2} \tau_{11}$ ) и  $\sigma_x$  (при  $z = \frac{h}{2} \tau_{12}$ ) обеспечивается автоматически.

С учетом (1.5) выражения для напряжений (1.3) приведем к виду

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{a_{22}x_1 - a_{12}x_2}{a_{22}^2 - a_{12}^2} \left( z - \frac{h}{2} \gamma_{11} \right) \\ \sigma_y &= \frac{a_{22}x_2 - a_{12}x_1}{a_{22}^2 - a_{12}^2} \left( z - \frac{h}{2} \gamma_{11} \right) - \frac{a_{11}x_2 - a_{12}x_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} (\gamma_{12} - \gamma_{11}) \frac{h}{2} \\ &\quad \text{при } -\frac{h}{2} < z < \frac{h}{2} \gamma_{11} \\ \sigma_x &= \frac{a_{22}x_1 - a_{12}x_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \left( z - \frac{h}{2} \gamma_{11} \right) \\ \sigma_y &= \frac{a_{11}x_2 - a_{12}x_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \left( z - \frac{h}{2} \gamma_{12} \right) \\ &\quad \text{при } \frac{h}{2} \gamma_{11} < z < \frac{h}{2} \gamma_{12} \quad (1.6) \\ \sigma_x &= \frac{a_{11}x_1 - a_{12}x_2}{a_{11}^2 - a_{12}^2} \left( z - \frac{h}{2} \gamma_{12} \right) + \frac{a_{22}x_1 - a_{12}x_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} (\gamma_{12} - \gamma_{11}) \frac{h}{2} \\ \sigma_y &= \frac{a_{11}x_2 - a_{12}x_1}{a_{11}^2 - a_{12}^2} \left( z - \frac{h}{2} \gamma_{12} \right) \\ &\quad \text{при } \frac{h}{2} \gamma_{12} < z < \frac{h}{2} \end{aligned}$$

Эти напряжения в пластинке вызывают следующие усилия и моменты:

$$\begin{aligned} T_x &= \int z \sigma_x dz = 0, & T_y &= \int z \sigma_y dz = 0 \\ M_x &= \int z^2 \sigma_x dz = M_x, & M_y &= \int z^2 \sigma_y dz = M_y \end{aligned} \quad (1.7)$$

где интегрирование производится по всей толщине пластинки.

Подставляя значения напряжений из (1.6) в (1.7), получим следующую систему четырех уравнений относительно неизвестных  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $\gamma_{11}$  и  $\gamma_{12}$ :

$$\begin{aligned} (a_{22}x_1 - a_{12}x_2) \left| \frac{(1 + \gamma_{11})^2}{a_{22}^2 - a_{12}^2} - (\gamma_{12} - \gamma_{11}) \frac{2 - \gamma_{11} - \gamma_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \right| - \\ - (a_{11}x_1 - a_{12}x_2) \frac{(1 - \gamma_{11})^2}{a_{11}^2 - a_{12}^2} = 0 \\ (a_{11}x_2 - a_{12}x_1) \left| \frac{(1 - \gamma_{12})^2}{a_{11}^2 - a_{12}^2} - (\gamma_{12} - \gamma_{11}) \frac{2 + \gamma_{11} + \gamma_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \right| - \\ - (a_{22}x_2 - a_{12}x_1) \frac{(1 + \gamma_{11})^2}{a_{22}^2 - a_{12}^2} = 0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned}
 & (a_{22}x_1 - a_{12}x_2) \left| \frac{(1 + \gamma_{11})^2 (2 - \gamma_{11})}{a_{22}^2 - a_{12}^2} + \frac{3(\gamma_{12} - \gamma_{11}) + \gamma_{11}^3 - \gamma_{12}^3}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \right| + \\
 & + (a_{11}x_1 - a_{12}x_2) \frac{(1 - \gamma_{12})^2 (2 + \gamma_{12})}{a_{11} - a_{12}^2} = \frac{48}{h^3} M_1 \\
 & (a_{11}x_2 - a_{12}x_1) \left| \frac{(1 - \gamma_{12})^2 (2 + \gamma_{12})}{a_{11} - a_{12}^2} + \frac{3(\gamma_{12} - \gamma_{11}) + \gamma_{11}^3 - \gamma_{12}^3}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \right| + \\
 & + (a_{22}x_2 - a_{12}x_1) \frac{(1 + \gamma_{11})^2 (2 - \gamma_{11})}{a_{22}^2 - a_{12}^2} = \frac{48}{h^3} M_2
 \end{aligned}$$

Решение этой системы в общем виде связано с математическими трудностями. Однако, приведенный ниже некоторый качественный анализ вносит полную ясность в решение поставленной задачи.

С помощью первых двух уравнений последние два уравнения системы (1.8) можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 a_{22}x_1 - a_{12}x_2 &= \frac{48}{h^3} \frac{M_1}{A_1} \\
 a_{11}x_2 - a_{12}x_1 &= \frac{48}{h^3} \frac{M_2}{A_2}
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

где

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{4(1 + \gamma_{11})^2}{a_{22}^2 - a_{12}^2} + (\gamma_{12} - \gamma_{11}) \left| \frac{(1 + \gamma_{11})^2}{a_{22}^2 - a_{12}^2} - \frac{(1 - \gamma_{11})^2}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \right| \\
 A_2 &= \frac{4(1 - \gamma_{12})^2}{a_{11} - a_{12}^2} - (\gamma_{12} - \gamma_{11}) \left| \frac{(1 + \gamma_{12})^2}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} - \frac{(1 - \gamma_{12})^2}{a_{11} - a_{12}^2} \right|
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

Из (1.9) найдем

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{48}{(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) h^3} \left( a_{11} \frac{M_1}{A_1} + a_{12} \frac{M_2}{A_2} \right) \\
 x_2 &= \frac{48}{(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) h^3} \left( a_{12} \frac{M_1}{A_1} + a_{22} \frac{M_2}{A_2} \right)
 \end{aligned} \tag{1.11}$$

Подставляя теперь значения  $x_1$  и  $x_2$  из (1.11) в первые два уравнения системы (1.8), получим следующую систему двух уравнений относительно  $\gamma_{11}$  и  $\gamma_{12}$ :

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{(1 + \gamma_{11})^2}{a_{22}^2 - a_{12}^2} - \frac{(1 - \gamma_{11})^2}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \right| \frac{M_1}{A_1} + \frac{a_{12}(a_{22} - a_{11})(1 - \gamma_{12})^2}{(a_{11} - a_{12}^2)(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)} \frac{M_2}{A_2} = 0 \\
 & \frac{a_{12}(a_{22} - a_{11})(1 + \gamma_{11})^2}{(a_{22}^2 - a_{12}^2)(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)} \frac{M_1}{A_1} + \left| \frac{(1 + \gamma_{12})^2}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} - \frac{(1 - \gamma_{12})^2}{a_{11} - a_{12}^2} \right| \frac{M_2}{A_2} = 0
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

Система (1.12) является однородной относительно  $M_1/A_1$  и  $M_2/A_2$ . Поэтому вместо одного из этих двух уравнений можно взять урав-

нение, получающееся при приращивании нулю определителя системы (1.12). Тогда с учетом последнего преобразуется и другое уравнение и окончательно получим следующую систему для определения  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ :

$$\left[ b^2 - \left( \frac{1 - \gamma_1}{1 + \gamma_1} \right)^2 \right] \left[ \left( \frac{1 + \gamma_2}{1 - \gamma_2} \right)^2 - a^2 \right] = c^2$$

$$\gamma_2 = \gamma_1 + \frac{4ab}{\mu c} \frac{b^2 - \frac{\mu bc}{a} - \left( \frac{1 - \gamma_1}{1 + \gamma_1} \right)^2}{b^2 + \frac{bc}{\mu a} - \left( \frac{1 - \gamma_1}{1 + \gamma_1} \right)^2} \quad (1.13)$$

Здесь

$$a = \sqrt{\frac{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2}{\alpha_{11}^2 - \alpha_{12}^2}}, \quad b = \sqrt{\frac{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2}{\alpha_{22}^2 - \alpha_{12}^2}}$$

$$c = -\frac{\alpha_{12}(\alpha_{22} - \alpha_{11})}{\sqrt{(\alpha_{11}^2 - \alpha_{12}^2)(\alpha_{22}^2 - \alpha_{12}^2)}} = \sqrt{a^2 b^2 - 1}, \quad \mu = \frac{M_2}{M_1} \quad (1.14)$$

причем из принятого выше предположения ( $\alpha_{22} > \alpha_{11}$ ) следует, что  $a > 1$ ,  $b < 1$  и  $c < 1$ .

Прежде всего нас интересует существование и единственность решения системы (1.13) в интервале  $0 < \gamma_1 < \gamma_2 < 1$ . Для этого на плоскости  $\gamma_1, \gamma_2$  рассмотрим графики функций, выражаемых уравнениями (1.13). Первая представляет собой монотонно убывающую функцию в интервале  $0 < \gamma_1 < 1$ . Учитывая принятое выше предположение ( $\alpha_{22} > \alpha_{11}$ ), можно ограничиться исследованием функций в интервале  $(\lambda_0, \lambda_2)$ , где

$$\lambda_0 = \frac{1 - b}{1 + b}, \quad \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{b^2 - \frac{\mu bc}{a}}}{1 + \sqrt{b^2 - \frac{\mu bc}{a}}} < 1 \quad (1.15)$$

Вторая представляет собой монотонно возрастающую функцию в интервале  $(\lambda_0, 1)$ , причем для нее неравенство  $\gamma_2 > \gamma_1$  выполняется при

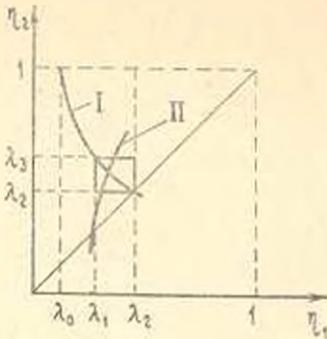
$$\gamma_1 > \lambda_1 = \frac{1 - \sqrt{b^2 - \frac{\mu bc}{a}}}{1 + \sqrt{b^2 - \frac{\mu bc}{a}}} \quad (1.16)$$

Отсюда можно заключить, что графики рассматриваемых функций могут пересекаться в интервале  $(\lambda_0, \lambda_2)$ , если для  $\lambda_1$  выполняется неравенство  $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2$ , причем это пересечение будет единственным. А из этого неравенства следует, что  $0 < \mu < 1$ , то есть  $M_1 > M_2$ .

Таким образом, если для материала пластинки  $a_{22} > a_{11}$ , то при  $M_1 > M_2 > 0$  ( $\mu < 1$ ) система (1.13) дает единственное решение, удовлетворяющее неравенству  $\gamma_2 > \gamma_1 > 0$ . Это решение заключено в прямоугольнике (фиг. 2), определяемом неравенствами

$$\lambda_1 < \gamma_1 < \lambda_2 \quad \lambda_2 < \gamma_2 < \lambda_3 = \frac{\sqrt{a^2 + \frac{ac}{nh}} - 1}{\sqrt{a^2 + \frac{ac}{nb}} + 1} \quad (1.17)$$

Очевидно, что при  $M_2 > M_1 > 0$  и  $a_{22} > a_{11}$  будем иметь  $\gamma_1 > \gamma_2 > 0$ . Если же  $a_{22} < a_{11}$ , то при положительных моментах  $M_1$  и  $M_2$  в принятой системе координат  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  будут отрицательными.



Фиг. 2.

Отметим, что для каждого конкретного материала и при заданных значениях моментов из системы (1.13) с любой точностью можно вычислить  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . Далее с помощью приведенных выше формул можно вычислить все интересующие нас величины.

Ниже приведем некоторые частные случаи рассмотренной задачи, которые решаются до конца.

а)  $M_1 = M_2 = M$

В этом случае очевидно, что  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ ,  $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon$ ,  $x_1 = x_2 = x$ . Поэтому

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon + z\gamma = x \left( z - \frac{h}{2} \gamma \right), \quad z = -\frac{h}{2} \gamma \quad (1.18)$$

$$z_x = z_y = \frac{x}{a_{22} + a_{12}} \left( z - \frac{h}{2} \gamma \right) \quad \text{при} \quad -\frac{h}{2} < z < \frac{h}{2} \quad (1.19)$$

$$z_x = z_y = \frac{x}{a_{11} + a_{12}} \left( z - \frac{h}{2} \gamma \right) \quad \text{при} \quad \frac{h}{2} < z < \frac{h}{2}$$

Вычисляя теперь усилия и моменты, найдем

$$T_x = T_y = -\frac{xh^2}{8} \left[ \frac{(1 + \gamma)^2}{a_{22} + a_{12}} - \frac{(1 - \gamma)^2}{a_{11} + a_{12}} \right] = 0 \quad (1.20)$$

$$M_x = M_y = \frac{xh^3}{48} \left[ \frac{(1 + \gamma)^2 (2 - \gamma)}{a_{22} + a_{12}} + \frac{(1 - \gamma)^2 (2 + \gamma)}{a_{11} + a_{12}} \right] = M \quad (1.21)$$

С учетом (1.20) уравнение (1.21) можно представить в виде

$$\frac{x(1 + \gamma)^2 h^3}{12(a_{22} + a_{12})} = M \quad (1.22)$$

Из (1.20) можно вычислить  $\eta$ ,

$$\eta = \frac{\sqrt{a_{22} + a_{12}} - \sqrt{a_{11} + a_{12}}}{\sqrt{a_{22} + a_{12}} + \sqrt{a_{11} + a_{12}}} \quad (1.23)$$

Учитывая (1.14), нетрудно показать, что в этом случае значение  $\eta$  (1.23) совпадает с  $\eta_0$  (1.15).

Из (1.22), учитывая (1.23), для  $\chi$  найдем

$$\chi = \frac{3M}{h^3} \left( \sqrt{a_{22} + a_{12}} + \sqrt{a_{11} + a_{12}} \right)^2 \quad (1.24)$$

Подставляя теперь найденные значения  $\eta$  и  $\chi$  в (1.18), для  $\varepsilon$  получим

$$\varepsilon = -\frac{3M}{2h^2} (a_{22} - a_{11}) \quad (1.25)$$

### 6) Цилиндрический изгиб бесконечной полосы.

Пусть пластинка, бесконечно длинная по направлению оси  $y$ , изгибается моментами  $M_x = M$ . В этом случае очевидно, что деформации по направлению  $y$  отсутствуют ( $\varepsilon_y = 0$ ). Поэтому

$$\varepsilon_x = \varepsilon_1 + z\chi_1 = \chi_1 \left( z - \frac{h}{2} \eta \right), \quad \varepsilon_z = -\frac{h}{2} \chi_1 \quad (1.26)$$

$$\sigma_x = \frac{a_{22}\chi_1}{a_{22}^2 - a_{12}^2} \left( z - \frac{h}{2} \eta \right), \quad \sigma_z = -\frac{a_{12}}{a_{22}} \sigma_x \text{ при } -\frac{h}{2} < z < \frac{h}{2} \eta \quad (1.27)$$

$$\sigma_x = \frac{a_{11}\chi_1}{a_{11}^2 - a_{12}^2} \left( z - \frac{h}{2} \eta \right), \quad \sigma_y = -\frac{a_{12}}{a_{11}} \sigma_x \text{ при } \frac{h}{2} \eta < z < \frac{h}{2}$$

Вычисляя усилия и моменты, найдем

$$T_x = -\frac{\chi_1 h^2}{8} \left[ \frac{a_{22}(1+\eta)^2}{a_{22}^2 - a_{12}^2} - \frac{a_{11}(1-\eta)^2}{a_{11}^2 - a_{12}^2} \right] = 0 \quad (1.28)$$

$$M_x = \frac{\chi_1 h^3}{48} \left[ \frac{a_{22}(1+\eta)^2(2-\eta)}{a_{22}^2 - a_{12}^2} + \frac{a_{11}(1-\eta)^2(2+\eta)}{a_{11}^2 - a_{12}^2} \right] = M \quad (1.29)$$

С учетом (1.28) уравнение (1.29) приведем к виду

$$\frac{\chi_1(1+\eta)^2 a_{22} h^3}{12(a_{22}^2 - a_{12}^2)} = M \quad (1.30)$$

Из (1.28) для  $\eta$  получим

$$\eta = \frac{\sqrt{a_{11}(a_{22}^2 - a_{12}^2)} - \sqrt{a_{22}(a_{11}^2 - a_{12}^2)}}{\sqrt{a_{11}(a_{22}^2 - a_{12}^2)} + \sqrt{a_{22}(a_{11}^2 - a_{12}^2)}} \quad (1.31)$$

Из (1.30), учитывая (1.31), имеем

$$\chi_1 = \frac{3M}{h^3} \left( \sqrt{\frac{a_{22}^2 - a_{12}^2}{a_{22}}} + \sqrt{\frac{a_{11}^2 - a_{12}^2}{a_{11}}} \right)^2 \quad (1.32)$$

Подставляя найденные значения  $\gamma$  и  $\alpha_1$  в (1.26), для  $\varepsilon_1$  получим

$$\varepsilon_1 = \frac{3M}{2a_{11}a_{22}h^2} (a_{22} - a_{11})(a_{11}a_{22} + a_{12}^2) \quad (1.33)$$

Вычислив теперь усилия и момент в сечениях, перпендикулярных к оси  $y$ , получим

$$T_y = -\frac{3a_{11}(a_{22} - a_{11})}{2a_{11}a_{22}h} M, \quad M_y = -\frac{a_{12}M}{4a_{11}a_{22}} [2(a_{11} + a_{22}) + \gamma(a_{22} - a_{11})] \quad (1.34)$$

Как видно из формул (1.34), в отличие от обычного материала ( $a_{11} = a_{22}$ ), в этом случае при цилиндрическом изгибе в продольном направлении появляется тангенциальное усилие.

в) Чистый изгиб узкой полосы (балки).

Пусть пластинка по направлению  $y$  имеет малую ширину и изгибается моментами  $M_x = M$ . В этом случае фактически мы имеем дело с изгибом балки и поэтому естественно считать, что в сечениях, перпендикулярных к оси  $y$ , напряжения отсутствуют ( $\sigma_y = 0$ ).

Тогда будем иметь

$$e_x = \varepsilon_1 + z\alpha_1 = \alpha_1 \left( z - \frac{h}{2} \gamma \right), \quad \varepsilon_1 = -\frac{h}{2} \gamma \alpha_1 \quad (1.35)$$

$$\sigma_x = \frac{\alpha_1}{a_{22}} \left( z - \frac{h}{2} \gamma \right) \quad \text{при} \quad -\frac{h}{2} < z < \frac{h}{2} \gamma \quad (1.36)$$

$$\sigma_x = \frac{\alpha_1}{a_{11}} \left( z - \frac{h}{2} \gamma \right) \quad \text{при} \quad \frac{h}{2} \gamma < z < \frac{h}{2}$$

Вычисляя усилия и моменты, найдем

$$T_x = -\frac{\alpha_1 h^2}{8} \left[ \frac{(1 + \gamma)^2}{a_{22}} - \frac{(1 - \gamma)^2}{a_{11}} \right] = 0 \quad (1.37)$$

$$M_x = \frac{\alpha_1 h^3}{48a_{11}a_{22}} [a_{11}(1 + \gamma)^2(2 - \gamma) + a_{22}(1 - \gamma)^2(2 + \gamma)] = M \quad (1.38)$$

С учетом (1.37) уравнение (1.38) приведем к виду

$$\frac{\alpha_1(1 + \gamma)^2 h^3}{12a_{22}} = M \quad (1.39)$$

Из (1.37) для  $\gamma$  получим

$$\gamma = \frac{\sqrt{a_{22}} - \sqrt{a_{11}}}{\sqrt{a_{22}} + \sqrt{a_{11}}} \quad (1.40)$$

Из (1.39), с учетом (1.40), имеем

$$\alpha_1 = \frac{3M}{h^3} (\sqrt{a_{22}} + \sqrt{a_{11}})^2 \quad (1.41)$$

Отметим, что формула (1.41) впервые была получена С. П. Тимошенко [3].

2. Рассмотрим изгиб прямоугольной пластинки под действием изгибающих моментов с различными знаками:  $M_x = M_1$ ,  $M_y = -M_2$  (фиг. 3).

Следует отметить, что при таком нагружении имеем новую задачу, существенно отличную от предыдущего случая. Однако, ход решения задачи не отличается от предыдущего, в связи с чем некоторые подробности не приводятся.

Здесь также предполагая  $a_{11} > a_{22}$ , нетрудно заметить, что пластинка по толщине делится на следующие три области с различными знаками напряжений  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$ :

$$1) -\frac{h}{2} < z < -\frac{h}{2} \eta_2 \quad (\sigma_x < 0, \sigma_y > 0),$$

$$2) -\frac{h}{2} \eta_2 < z < \frac{h}{2} \eta_1 \quad (\sigma_x < 0, \sigma_y < 0), \quad 3) \frac{h}{2} \eta_1 < z < \frac{h}{2} \quad (\sigma_x > 0, \sigma_y < 0).$$

Принимая гипотезу Кирхгоффа-Лява (1.2), законы упругости для этих областей можно привести к виду

$$\sigma_x = \frac{a_{11}x_2 - a_{12}x_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \left( z + \frac{h}{2} \eta_2 \right) - \frac{a_{22}x_1 - a_{12}x_2}{a_{22}^2 - a_{12}^2} (\eta_1 + \eta_2) \frac{h}{2}$$

$$\sigma_y = \frac{a_{22}x_2 - a_{12}x_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \left( z + \frac{h}{2} \eta_2 \right)$$

$$\text{при } -\frac{h}{2} < z < -\frac{h}{2} \eta_2$$

$$\sigma_x = \frac{a_{22}x_1 - a_{12}x_2}{a_{22}^2 - a_{12}^2} \left( z - \frac{h}{2} \eta_1 \right)$$

$$\text{при } -\frac{h}{2} \eta_2 < z < \frac{h}{2} \eta_1 \quad (2.1)$$

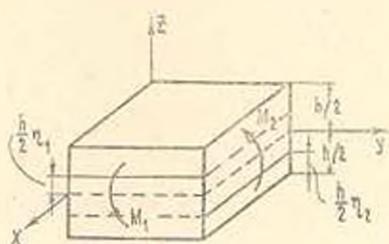
$$\sigma_y = \frac{a_{22}x_2 - a_{12}x_1}{a_{22}^2 - a_{12}^2} \left( z - \frac{h}{2} \eta_1 \right)$$

$$\sigma_x = \frac{a_{22}x_1 - a_{12}x_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \left( z - \frac{h}{2} \eta_1 \right)$$

$$\sigma_y = \frac{a_{11}x_2 - a_{12}x_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \left( z - \frac{h}{2} \eta_1 \right) + \frac{a_{22}x_2 - a_{12}x_1}{a_{22}^2 - a_{12}^2} (\eta_1 + \eta_2) \frac{h}{2}$$

$$\text{при } \frac{h}{2} \eta_1 < z < \frac{h}{2}$$

При этом для компонент деформации срединной поверхности пластинки будем иметь



Фиг. 3.

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= - \left| \gamma_{11} x_1 - a_{12} (\gamma_{11} + \gamma_{12}) \frac{a_{22} x_2 - a_{12} x_1}{a_{22} - a_{12}^2} \right| \frac{h}{2} \\ \varepsilon_2 &= \left| \gamma_{22} x_2 - a_{12} (\gamma_{11} + \gamma_{12}) \frac{a_{22} x_1 - a_{12} x_2}{a_{22} - a_{12}^2} \right| \frac{h}{2} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Вычисляя теперь усилия и моменты и учитывая, что  $T_x = T_y = 0$ ,  $M_x = M_y$ ,  $M_y = -M_x$ , получим следующую систему четырех уравнений относительно неизвестных  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $\gamma_{11}$  и  $\gamma_{12}$ :

$$\begin{aligned} (a_{22} x_1 - a_{12} x_2) & \left| \frac{(1 - \gamma_{11})^2}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2} - (\gamma_{11} + \gamma_{12}) \frac{2 + \gamma_{11} - \gamma_{12}}{a_{22} - a_{12}^2} \right| - \\ & - (a_{11} x_1 - a_{12} x_2) \frac{(1 - \gamma_{11})^2}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2} = 0 \\ (a_{22} x_2 - a_{12} x_1) & \left| \frac{(1 - \gamma_{12})^2}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2} - (\gamma_{11} + \gamma_{12}) \frac{2 - \gamma_{11} + \gamma_{12}}{a_{22} - a_{12}^2} \right| - \\ & - (a_{11} x_2 - a_{12} x_1) \frac{(1 - \gamma_{12})^2}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2} = 0 \\ (a_{22} x_1 - a_{12} x_2) & \left| \frac{(1 - \gamma_{11})^2 (2 + \gamma_{11})}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2} + \frac{3(\gamma_{11} + \gamma_{12}) - \gamma_{11}^2 - \gamma_{12}^2}{a_{22} - a_{12}^2} \right| + \\ & + (a_{11} x_1 - a_{12} x_2) \frac{(1 - \gamma_{11})^2 (2 + \gamma_{11})}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2} = \frac{48}{h^3} M_1 \\ (a_{22} x_2 - a_{12} x_1) & \left| \frac{(1 - \gamma_{12})^2 (2 + \gamma_{12})}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2} + \frac{3(\gamma_{11} + \gamma_{12}) - \gamma_{11}^2 - \gamma_{12}^2}{a_{22} - a_{12}^2} \right| + \\ & + (a_{11} x_2 - a_{12} x_1) \frac{(1 - \gamma_{12})^2 (2 + \gamma_{12})}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2} = - \frac{48}{h^3} M_2 \end{aligned} \quad (2.3)$$

С учетом первых двух уравнений последние два уравнения системы (2.3) можно представить в виде

$$\begin{aligned} a_{22} x_1 - a_{12} x_2 &= \frac{48}{h^3} \frac{M_1}{B_1} \\ a_{22} x_2 - a_{12} x_1 &= - \frac{48}{h^3} \frac{M_2}{B_2} \end{aligned} \quad (2.4)$$

где

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{4(1 - \gamma_{11})^2}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2} - (\gamma_{11} + \gamma_{12}) \left| \frac{(1 + \gamma_{11})^2}{a_{22} - a_{12}^2} - \frac{(1 - \gamma_{11})^2}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2} \right| \\ B_2 &= \frac{4(1 - \gamma_{12})^2}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2} - (\gamma_{11} + \gamma_{12}) \left| \frac{(1 + \gamma_{12})^2}{a_{22} - a_{12}^2} - \frac{(1 - \gamma_{12})^2}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2} \right| \end{aligned} \quad (2.5)$$

Из (2.4) получим

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{48}{(a_{22}^2 - a_{11}^2) h^3} \left( a_{22} \frac{M_1}{B_1} - a_{12} \frac{M_2}{B_2} \right) \\ x_2 &= -\frac{48}{(a_{22}^2 - a_{11}^2) h^3} \left( a_{22} \frac{M_2}{B_2} - a_{12} \frac{M_1}{B_1} \right) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Подставляя (2.6) в первые два уравнения системы (2.3), получим

$$\begin{aligned} \left| \frac{(1 + \gamma_1)^2}{a_{22} - a_{12}} - \frac{(1 - \gamma_1)^2}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2} \right| \frac{M_1}{B_1} + \frac{a_{12} (a_{22} - a_{11}) (1 - \gamma_2)^2}{(a_{11} a_{22} - a_{12}^2) (a_{22} - a_{12}^2)} \frac{M_2}{B_2} &= 0 \\ \frac{a_{12} (a_{22} - a_{11}) (1 - \gamma_1)^2}{(a_{11} a_{22} - a_{12}^2) (a_{22} - a_{12}^2)} \frac{M_1}{B_1} + \left| \frac{(1 + \gamma_2)^2}{a_{22} - a_{12}} - \frac{(1 - \gamma_2)^2}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2} \right| \frac{M_2}{B_2} &= 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Эта система однородная относительно  $M_1/B_1$  и  $M_2/B_2$ .

Поступая аналогично предыдущему случаю, окончательно получим следующую систему для определения  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ :

$$\begin{aligned} \left[ \left( \frac{1 + \gamma_1}{1 - \gamma_1} \right)^2 - m^2 \right] \left[ \left( \frac{1 + \gamma_2}{1 - \gamma_2} \right)^2 - m^2 \right] &= n^2 \\ \gamma_1 + \gamma_2 &= \frac{4m^2}{\mu n} \frac{\left( \frac{1 + \gamma_1}{1 - \gamma_1} \right)^2 - (m^2 + \mu n)}{\left( m^2 + \frac{n}{\mu} \right) - \left( \frac{1 + \gamma_1}{1 - \gamma_1} \right)^2} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Здесь

$$m = \sqrt{\frac{a_{22}^2 - a_{12}^2}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}}, \quad n = -\frac{a_{12} (a_{22} - a_{11})}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2}, \quad \mu = \frac{M_2}{M_1} \quad (2.9)$$

причем, согласно предположению  $a_{22} > a_{11}$ , имеем  $m > 1$ ,  $n < 1$ .

На плоскости  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  рассмотрим графики функций, выражаемых уравнениями (2.8). Рассмотрим пока случай  $\mu < 1$ . Здесь можно ограничиться исследованием функций в интервале  $(\xi_0, \xi_2)$ , где

$$\xi_0 = \frac{\sqrt{m^2 + \mu n} - 1}{\sqrt{m^2 + \mu n} + 1}, \quad \xi_2 = \frac{\sqrt{m^2 + \frac{n}{\mu}} - 1}{\sqrt{m^2 + \frac{n}{\mu}} + 1} \quad (2.10)$$

поскольку, как видно из второго уравнения (2.8), только в этом интервале выполняется неравенство  $\gamma_1 + \gamma_2 > 0$ .

В указанном интервале первая из (2.8) представляет собой монотонно убывающую функцию, график которой симметрично расположен относительно биссектрисы координатного угла  $\gamma_2 = \gamma_1$  и пересекается с ней при  $\gamma_1 = \frac{1}{2}$ .

$$\xi_1 = \frac{\sqrt{m^2 + n} - 1}{\sqrt{m^2 + n} + 1} \quad (2.11)$$

Приведем значения этой функции при указанных характерных значениях аргумента

$$\gamma_{12}(\xi_0) = \xi_2, \quad \gamma_{12}(\xi_1) = \xi_1, \quad \gamma_{12}(\xi_2) = \xi_0 \quad (2.12)$$

В рассматриваемом интервале вторая из (2.8) представляет собой (при  $\mu < 1$ ) монотонно возрастающую функцию и при указанных характерных значениях аргумента принимает следующие значения:

$$\gamma_{12}(\xi_0) = -\xi_0, \quad \gamma_{12}(\xi_1) = \frac{4m^2}{n} - \xi_1, \quad \gamma_{12}(\xi_2) = +\infty \quad (2.13)$$

Исходя из (2.9), можно показать, что  $m^2 > 2(2 + \sqrt{3})n > 7n$ . Тогда для  $\gamma_{12}(\xi_1)$  (2.13) будем иметь

$$\gamma_{12}(\xi_1) = \frac{4m^2}{n} - \xi_1 > 28 - \xi_1 \gg \xi_1$$

На основании приведенного выше можно заключить, что графики рассматриваемых функций при принятых предположениях пересекаются в интервале  $(\xi_0, \xi_1)$ .

Таким образом, если для материала пластинки  $a_{22} > a_{11}$ , то при  $M_1 > M_2$  ( $\mu < 1$ ) система (2.8) дает единственное решение, удовлетворяющее неравенству  $\gamma_{12} > \gamma_{11}$ . Это решение заключено в прямоугольнике (фиг. 4), определяемом неравенствами

$$\xi_0 < \gamma_1 < \xi_1, \quad \xi_1 < \gamma_2 < \xi_2$$

Очевидно, что при  $M_2 > M_1$  ( $\mu > 1$ ) и  $a_{22} > a_{11}$  будем иметь  $\gamma_{11} > \gamma_{12}$ .

Рассмотрим частный случай, когда  $M_1 = M_2 = M$ . В этом случае очевидно, что  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ . Однако, в отличие от рассмотренных выше частных случаев, здесь по толщине пластинки имеем три области с различными знаками напряжений.

Записывая соответствующие уравнения и соотношения (их не будем приводить), замечаем, что в этом случае

$$\gamma_1 = -\gamma_2 = x, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{22} + a_{12}} x \eta \frac{h}{2}$$

При этом уравнения для определения  $\gamma$  и  $x$  существенно упрощаются и мы находим

$$\gamma = \frac{\sqrt{m^2 + n} - 1}{\sqrt{m^2 + n} + 1} = \xi_1, \quad x = \frac{6M}{h^2} (a_{22} - a_{12}) \frac{(1 + \sqrt{m^2 + n} + 1)^2}{2m^2 - n\xi_1}$$

$$x = -\frac{3M}{h^2} (a_{22} + a_{12}) \frac{m^2 + n - 1}{2m^2 - n\xi_1}$$

Ա. Ա. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

ՄԱՐԱՄՈՎՈՒԷ ԵՅՈՒԹԻՅ ՊԱՏՐԱՍՏՎԱԾ ՈՂՂԱՆԿՅՈՒՆ, ՍԱԼԻ ՄՍՔՈՒՐ  
ԿՌՈՒՄՐ

Ա մ փ ո փ ու մ

Գիտարկված է տարամոդուլ նյութից պատրաստված ուղղանկյուն սալի ձևման խնդիրը, երբ փոխուղղահայաց եզրերում ազդող մոմենտները միևնույն նշանի են և երբ նրանք նշանով տարբեր են: Բերված են մի շարք մասնավոր դեպքեր, որոնց համար ստացված են վերջնական բանաձևեր:

PURE BENDING OF A RECTANGULAR PLATE MADE OF  
HETEROMODULUS MATERIALS

A. A. KHACHATRIAN

S u m m a r y

Bending by moments acting on reciprocally perpendicular sides of a rectangular plate made of heteromodulus materials is considered. Some particular cases are presented for which final formulas are obtained.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А. Основные уравнения теории упругости для материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию. Инж. ж., МТТ, № 2, 1966.
2. Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А. К разномодульной теории упругости. Инж. ж., МТТ, № 6, 1966.
3. Тимошенко С. П. Сопротивление материалов, ч. I. Госиздат, М.-Л., 1933.