ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXV, № 1, 1972 Механика

М. Г. МЕЛКОНЯН

ОБ ОДНОЙ ПЛОСКОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ СОСТАВНОГО ПРЯМОУГОЛЬНИКА

Плоская задача для прямоугольника была рассмотрена многими авторами [1—7]. В работе [1] дано точное решение указанной задачи при произвольном симметричном загружении границ прямоугольника. В работе [2] решена та же задача при несимметричных граничных условиях, заданных в напряжениях. В работах [6—7] рассматривается плоская задача для однородного изотропного прямоугольника с двумя осями симметрии, когда граничные условия на сторонах $y = \pm h$ заданы в смешанном виде, а на сторонах $x = \pm l$ либо известны напряжения, либо же заданы условия симметрии. Касательные напряжения по контуру прямоугольника отсутствуют.

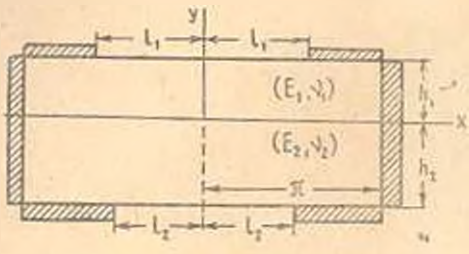
А. А. Баблояном и Н. О. Гулканян [3] была решена плоская задача теории упругости для прямоугольника, когда краевые условия на всех участках границы заданы в смешанном виде. При помощи парных тригонометрических уравнений задача приведена к решению двух квази-вполне регулярных систем линейных алгебраических уравнений. Плоская смешанная задача для прямоугольника, заделанного в стенку обоими концами на некоторую глубину, в случае симметричных граничных условий относительно вертикальной оси рассмотрена в работе [4]. Как и в работе [3], здесь задача решена способом приведения ее к решению парных тригонометрических уравнений.

В настоящей работе рассматривается плоская смешанная задача линейной термоупругости для прямоугольника, составленного из двух различных материалов, когда прямоугольник находится в стационарном температурном поле, а граничные условия заданы в смешанном виде, то есть на части верхнего и нижнего участков границы заданы напряжения, а на остальных частях границы — нормальное перемещение и касательное напряжение.

Задача решается методом Фурье. Задача сначала сводится к решению системы парных уравнений, а затем к квази-вполне регулярным бесконечным системам линейных алгебраических уравнений. Приводится подробное исследование этих систем. Получены удобные для вычислений формулы для контактных напряжений и нормальных перемещений в точках границы вне участков контакта.

В конце приведен числовой пример. Вычислены значения контактных напряжений и нормального перемещения в центре прямоугольника в зависимости от влияния температуры и способа заделки.

1. Рассмотрим плоскую задачу для прямоугольника, составленного из двух прямоугольных слоев различных материалов с толщинами h_1 и h_2 (фиг. 1). Прямоугольник находится под влиянием стационарного температурного поля. На участке границы $y = h_1$, $|x| \leqslant l_1$ действует равномерно распределенная нормальная нагрузка с интенсивностью P, участок $y = -h_2$, $|x| \leqslant l_2$ свободен от внешних усилий, а на остальных частях границы известны нормальные перемещения. Касательные напряжения на контуре прямоугольника отсутствуют.



Фиг. 1.

Как известно [6], в плоской задаче теории упругости напряжения и перемещения при наличии стационарного температурного поля ($\nabla^2 T = 0$) могут быть выражены через одну бигармоническую функцию $\Phi(x, y)$ соотношениями

$$\sigma_x = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x \partial y} \tag{1.1}$$

$$u = \frac{1}{E}\left\{\int \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\,dx - \nu\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right\} + \alpha\int T(x, y)\,dx - C_0 y + C_2$$

$$v = \frac{1}{E}\left\{\int \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\,dy - \nu\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right\} + \alpha\int T(x, y)\,dy + C_0 x + C_1$$

где E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона, α — коэффициент линейного расширения материала, $T(x, y)$ — температура точек прямоугольника (для простоты, в нашей задаче принято $T = T_0 = \text{const}$).

Граничные условия для бигармонической функции $\Phi(x, y)$ имеют вид

$$\tau_{xy}(x, h_1) = \tau_{xy}(x, -h_2) = \tau_{xy}(\pm\pi, y) = 0$$

$$\sigma_y(x, h_1) = -p\ (|x| \leqslant l_1), \quad \sigma_y(x, -h_2) = 0\ \ (|x| \leqslant l_2) \tag{1.2}$$

$$v(x, \pm h_i) = 0\ \ (l_i \leqslant |x| \leqslant \pi), \quad u(\pi, y) = a_0 + b_0 y\ \ (i = 1, 2)$$

В силу симметрии функцию $\Phi(x, y)$ будем искать только в области $x \geqslant 0$, удовлетворяя при этом условиям симметрии

$$u(0, y) = \tau(0, y) = 0 \tag{1.3}$$

Функцию $\Phi(x, y)$ в каждой подобласти ищем в виде ряда Фурье

$$\Phi(x, y) = \begin{cases} \Phi_1(x, y) & (x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0) \\ \Phi_2(x, y) & (x \geqslant 0, \quad y \leqslant 0) \end{cases}$$

$$\Phi_i(x, y) = P_1^{(i)}x^2 + P_2^{(i)}y^3 + P_3^{(i)}y^2 + P_4^{(i)}y + \sum_{k=1}^{\infty}[A_k^{(i)}\operatorname{sh} ky +$$

$$+ B_k^{(i)}\operatorname{ch} ky + ky\,(C_k^{(i)}\operatorname{sh} ky + D_k^{(i)}\operatorname{ch} ky)]\cos kx \quad (i = 1, 2) \qquad (1.4)$$

При этом в формулах (1.1) напряжения, перемещения, а также упругие постоянные нужно брать с индексом 1 или 2 соответственно.

Кроме граничных условий и условий симметрии функция $\Phi(x, y)$ (Φ_1 и Φ_2) должна удовлетворять условиям непрерывности перемещений и соответствующих напряжений, то есть

$$u_1 = u_2, \quad v_1 = v_2, \quad \sigma_y^{(1)} = \sigma_y^{(2)}, \quad \tau_{xy}^{(1)} = \tau_{xy}^{(2)} \quad (y = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi) \qquad (1.5)$$

Удовлетворяя граничным условиям (1.2), (1.3) и (1.5), для неизвестных коэффициентов $A_k^{(i)}$, $B_k^{(i)}$, $C_k^{(i)}$, $D_k^{(i)}$, а также для коэффициентов многочлена вне ряда получаем следующие выражения:

$$C_0 = C_2 = 0, \quad P_1^{(1)} = P_1^{(2)}, \quad \nu_2 E_1 P_4^{(2)} = \nu_1 E_2 P_4^{(1)}$$

$$P_2^{(i)} = \frac{b_0}{6\pi}E_i, \quad P_3^{(i)} = \nu_i P_1^{(i)} + \frac{E_i}{2}\left(\frac{a_i}{\pi} - T_0\alpha_i\right) \quad (i = 1, 2)$$

$$A_k^{(1)} = \frac{(1 + \nu_1)\,\alpha_k^{(1)} X_k}{2k\delta_k \operatorname{sh}\lambda_k^{(1)}} + \frac{(1 + \nu_2)\,\beta_k^{(1)} Y_k}{E_2 k\delta_k \operatorname{sh}\lambda_k^{(2)}}$$

$$A_k^{(2)} = \frac{(1 + \nu_2)\,\alpha_k^{(2)} Y_k}{2k\delta_k \operatorname{sh}\lambda_k^{(2)}} + \frac{(1 + \nu_1)\,\beta_k^{(2)} X_k}{E_1 k\delta_k \operatorname{sh}\lambda_k^{(1)}}$$

$$B_k^{(1)} = B_k^{(2)} = \frac{(1 + \nu_1)\,\gamma_k^{(1)} X_k}{E_1 k\delta_k \operatorname{sh}\lambda_k^{(1)}} - \frac{(1 + \nu_2)\,\gamma_k^{(2)} Y_k}{E_2 k\delta_k \operatorname{sh}\lambda_k^{(2)}}$$

$$C_k^{(1)} = -\frac{(1 + \nu_1)\,e_k^{(1)} X_k}{2k\delta_k \operatorname{sh}\lambda_k^{(1)}} + \frac{(1 + \nu_2)\,r_k^{(1)} Y_k}{E_2 k\delta_k \operatorname{sh}\lambda_k^{(2)}} \qquad (1.6)$$

$$C_k^{(2)} = \frac{(1 + \nu_2)\,e_k^{(2)} Y_k}{2k\delta_k \operatorname{sh}\lambda_k^{(2)}} - \frac{(1 + \nu_1)\,r_k^{(2)} X_k}{E_1 k\delta_k \operatorname{sh}\lambda_k^{(1)}}$$

$$D_k^{(1)} = -\frac{(1 + \nu_1)\,f_k^{(1)} X_k}{2k\delta_k \operatorname{sh}\lambda_k^{(1)}} - \frac{(1 + \nu_2)\,g_k^{(1)} Y_k}{E_2 k\delta_k \operatorname{sh}\lambda_k^{(2)}}$$

$$D_k^{(2)} = -\frac{(1 + \nu_2)\,f_k^{(2)} Y_k}{2k\delta_k \operatorname{sh}\lambda_k^{(2)}} - \frac{(1 + \nu_1)\,g_k^{(2)} X_k}{E_1 k\delta_k \operatorname{sh}\lambda_k^{(1)}}$$

где введены следующие обозначения:

$$\alpha_k^{(1)} = \frac{4\operatorname{cth}\lambda_k^{(1)}}{E_1E_2} + \frac{\Delta_2}{\Delta_1}\left(\frac{8}{E_1E_2} - \Delta_3\Delta_5\right)\operatorname{cth}\lambda_k^{(2)} + \lambda_k^{(1)}\left[\frac{4}{E_1E_2} + \right.$$

$$\left. + \left(\Delta_3\Delta_5 - \frac{4}{E_1E_2}\right)\frac{\operatorname{cth}\lambda_k^{(1)}}{\operatorname{th}\lambda_k^{(2)}}\right] - \frac{\Delta_3^2\lambda_k^{(2)}}{\operatorname{sh}^2\lambda_k^{(2)}} + \frac{\Delta_3\Delta_4\lambda_k^{(1)}\lambda_k^{(2)}}{\operatorname{sh}^2\lambda_k^{(2)}\operatorname{th}\lambda_k^{(1)}}$$

$$\alpha_k^{(2)} = \frac{4\,\mathrm{cth}\,\lambda_k^{(2)}}{E_1E_2} + \frac{\Delta_2}{\Delta_1}\left(\Delta_2\Delta_4 - \frac{8}{E_1E_2}\right)\mathrm{cth}\,\lambda_k^{(1)} + \lambda_k^{(2)}\left[\frac{4}{E_1E_2} + \right.$$

$$\left. + \left(\Delta_2\Delta_4 - \frac{4}{E_1E_2}\right)\frac{\mathrm{cth}\,\lambda_k^{(2)}}{\mathrm{th}\,\lambda_k^{(1)}}\right] + \frac{\Delta_2^2\lambda_k^{(2)}}{\mathrm{sh}^2\,\lambda_k^{(1)}} - \frac{\Delta_1\Delta_2\lambda_k^{(1)}\lambda_k^{(2)}}{\mathrm{sh}^2\,\lambda_k^{(1)}\,\mathrm{th}\,\lambda_k^{(2)}}$$

$$\beta_k^{(1)} = \frac{2}{E_1}\,\mathrm{cth}\,\lambda_k^{(1)} + \frac{2}{E_2}\,\mathrm{cth}\,\lambda_k^{(2)} - \frac{\Delta_2\lambda_k^{(1)}}{\mathrm{sh}^2\,\lambda_k^{(2)}} +$$

$$+ \lambda_k^{(2)}\left(\Delta_3 + \frac{2}{E_1}\mathrm{cth}\,\lambda_k^{(1)}\,\mathrm{cth}\,\lambda_k^{(2)}\right) - \frac{\Delta_1\lambda_k^{(1)}\lambda_k^{(2)}}{\mathrm{sh}^2\,\lambda_k^{(1)}\,\mathrm{th}\,\lambda_k^{(2)}}$$

$$\beta_k^{(2)} = \frac{2}{E_2}\,\mathrm{cth}\,\lambda_k^{(2)} + \frac{2}{E_1}\,\mathrm{cth}\,\lambda_k^{(1)} - \frac{\Delta_3\lambda_k^{(2)}}{\mathrm{sh}^2\,\lambda_k^{(2)}} +$$

$$+ \lambda_k^{(1)}\left(\Delta_2 + \frac{2}{E_2}\,\mathrm{cth}\,\lambda_k^{(2)}\,\mathrm{cth}\,\lambda_k^{(1)}\right) + \frac{\Delta_1\lambda_k^{(2)}\lambda_k^{(1)}}{\mathrm{sh}^2\,\lambda_k^{(2)}\,\mathrm{th}\,\lambda_k^{(1)}}$$

$$\gamma_k^{(1)} = \frac{2\,\mathrm{cth}\,\lambda_k^{(1)}}{E_1\,\mathrm{th}\,\lambda_k^{(2)}} + \frac{2}{E_2}\,\mathrm{cth}^2\lambda_k^{(2)} +$$

$$+ \frac{\lambda_k^{(1)}}{\mathrm{th}\,\lambda_k^{(2)}}\left(\Delta_2 + \frac{2\,\mathrm{cth}\,\lambda_k^{(1)}}{E_2\,\mathrm{th}\,\lambda_k^{(2)}}\right) + \frac{2\lambda_k^{(2)}\,\mathrm{cth}\,\lambda_k^{(1)}}{E_1\,\mathrm{sh}^2\,\lambda_k^{(2)}} + \frac{\Delta_1\lambda_k^{(1)}\lambda_k^{(2)}}{\mathrm{sh}^2\,\lambda_k^{(2)}}$$

$$\gamma_k^{(2)} = \frac{2\,\mathrm{cth}\,\lambda_k^{(2)}}{E_2\,\mathrm{th}\,\lambda_k^{(1)}} + \frac{2}{E_1}\,\mathrm{cth}^2\lambda_k^{(1)} + \tag{1.7}$$

$$+ \frac{\lambda_k^{(2)}}{\mathrm{th}\,\lambda_k^{(1)}}\left(\Delta_3 + \frac{2\,\mathrm{cth}\,\lambda_k^{(2)}}{E_1\,\mathrm{th}\,\lambda_k^{(1)}}\right) + \frac{2\lambda_k^{(1)}\,\mathrm{cth}\,\lambda_k^{(2)}}{E_2\,\mathrm{sh}^2\,\lambda_k^{(1)}} - \frac{\Delta_1\lambda_k^{(1)}\lambda_k^{(2)}}{\mathrm{sh}^2\,\lambda_k^{(1)}}$$

$$e_k^{(1)} = \frac{2\Delta_2\,\mathrm{cth}\,\lambda_k^{(1)}}{E_1\,\mathrm{th}\,\lambda_k^{(2)}} + \frac{4\,\mathrm{cth}^2\lambda_k^{(2)}}{E_1E_2} + \frac{\Delta_1\Delta_3\lambda_k^{(1)}}{\mathrm{th}\,\lambda_k^{(2)}} +$$

$$+ \frac{2\Delta_1\lambda_k^{(2)}\,\mathrm{cth}\,\lambda_k^{(1)}}{E_1\,\mathrm{sh}^2\,\lambda_k^{(2)}} + \frac{\Delta_1^2\lambda_k^{(1)}\lambda_k^{(2)}}{\mathrm{sh}^2\,\lambda_k^{(2)}}$$

$$e_k^{(2)} = \frac{2\Delta_3\,\mathrm{cth}\,\lambda_k^{(2)}}{E_2\,\mathrm{th}\,\lambda_k^{(1)}} + \frac{4\,\mathrm{cth}^2\lambda_k^{(1)}}{E_1E_2} - \frac{\Delta_1\Delta_4\lambda_k^{(2)}}{\mathrm{th}\,\lambda_k^{(1)}} -$$

$$- \frac{2\Delta_1\lambda_k^{(1)}\,\mathrm{cth}\,\lambda_k^{(2)}}{E_2\,\mathrm{sh}^2\lambda_k^{(1)}} + \frac{\Delta_1^2\lambda_k^{(1)}\lambda_k^{(2)}}{\mathrm{sh}^2\,\lambda_k^{(1)}}$$

$$r_k^{(1)} = \mathrm{cth}\,\lambda_k^{(1)}\left[\frac{2}{E_2}\,\mathrm{cth}\,\lambda_k^{(2)} + \Delta_2\,\mathrm{cth}\,\lambda_k^{(1)} + \Delta_1\lambda_k^{(2)}\left(\mathrm{cth}\,\lambda_k^{(1)}\,\mathrm{cth}\,\lambda_k^{(2)} - 1\right)\right]$$

$$r_k^{(2)} = \mathrm{cth}\,\lambda_k^{(2)}\left[\frac{2}{E_1}\,\mathrm{cth}\,\lambda_k^{(1)} + \Delta_3\,\mathrm{cth}\,\lambda_k^{(2)} - \Delta_1\lambda_k^{(1)}\left(\mathrm{cth}\,\lambda_k^{(2)}\,\mathrm{cth}\,\lambda_k^{(1)} - 1\right)\right]$$

$$f_k^{(1)} = \frac{\Delta_1\Delta_3}{\operatorname{th}\lambda_k^{(2)}} + \frac{4}{E_1E_2}(\operatorname{cth}\lambda_k^{(1)} - \operatorname{cth}\lambda_k^{(2)}) -$$

$$- \frac{\Delta_1\Delta_5\lambda_k^{(1)}}{\operatorname{th}\lambda_k^{(1)}\operatorname{th}\lambda_k^{(2)}} + \frac{\Delta_1\Delta_3\lambda_k^{(2)}}{\operatorname{sh}^2\lambda_k^{(2)}} - \frac{\Delta_1^2\lambda_k^{(1)}\lambda_k^{(2)}}{\operatorname{sh}^2\lambda_k^{(2)}\operatorname{th}\lambda_k^{(1)}}$$

$$f_k^{(2)} = \frac{\Delta_2\Delta_4}{\operatorname{th}\lambda_k^{(1)}} + \frac{4}{E_1E_2}(\operatorname{cth}\lambda_k^{(2)} - \operatorname{cth}\lambda_k^{(1)}) +$$

$$+ \frac{\Delta_1\Delta_4\lambda_k^{(2)}}{\operatorname{th}\lambda_k^{(1)}\operatorname{th}\lambda_k^{(2)}} - \frac{\Delta_1\Delta_2\lambda_k^{(1)}}{\operatorname{sh}^2\lambda_k^{(1)}} - \frac{\Delta_1^2\lambda_k^{(1)}\lambda_k^{(2)}}{\operatorname{sh}^2\lambda_k^{(1)}\operatorname{th}\lambda_k^{(2)}}$$

$$g_k^{(1)} = \frac{2}{E_2}\operatorname{cth}\lambda_k^{(2)} + \Delta_2\operatorname{cth}\lambda_k^{(1)} + \Delta_1\lambda_k^{(2)}(\operatorname{cth}\lambda_k^{(1)}\operatorname{cth}\lambda_k^{(2)} - 1)$$

$$g_k^{(2)} = \frac{2}{E_1}\operatorname{cth}\lambda_k^{(1)} + \Delta_3\operatorname{cth}\lambda_k^{(2)} - \Delta_1\lambda_k^{(1)}(\operatorname{cth}\lambda_k^{(2)}\operatorname{cth}\lambda_k^{(1)} - 1)$$

$$\delta_k = \left(\Delta_4\operatorname{cth}\lambda_k^{(1)} - \frac{\Delta_1\lambda_k^{(1)}}{\operatorname{sh}^2\lambda_k^{(1)}}\right)\left(\Delta_5\operatorname{cth}\lambda_k^{(2)} + \frac{\Delta_1\lambda_k^{(2)}}{\operatorname{sh}^2\lambda_k^{(2)}}\right) +$$

$$+ \frac{4}{E_1E_2}(\operatorname{cth}\lambda_k^{(1)} - \operatorname{cth}\lambda_k^{(2)})^2$$

$$\Delta_1 = \frac{1+\nu_1}{E_1} - \frac{1+\nu_2}{E_2}, \qquad \Delta_2 = \frac{1+\nu_1}{E_1} + \frac{1-\nu_2}{E_2}, \qquad \Delta_3 = \frac{1-\nu_1}{E_1} + \frac{1+\nu_2}{E_2}$$

$$\Delta_4 = \frac{3-\nu_1}{E_1} + \frac{1+\nu_2}{E_2}, \qquad \Delta_5 = \frac{1+\nu_1}{E_1} + \frac{3-\nu_2}{E_2}, \qquad \lambda_k^{(1)} = kh_1, \quad \lambda_k^{(2)} = kh_2$$

Отметим, что через X_k и Y_k обозначены выражения

$$\begin{aligned} -2k(D_k^{(1)}\operatorname{ch}\lambda_k^{(1)} + C_k^{(1)}\operatorname{sh}\lambda_k^{(1)}) &= (1+\nu_1)X_k \\ -2k(D_k^{(2)}\operatorname{ch}\lambda_k^{(2)} - C_k^{(2)}\operatorname{sh}\lambda_k^{(2)}) &= (1+\nu_2)Y_k \end{aligned} \tag{1.8}$$

Они определяются из формул

$$X_k = \frac{1}{\omega_k}[b_k^{(2)}U_k^{(1)} - b_k^{(1)}U_k^{(2)}], \qquad Y_k = \frac{1}{\omega_k}[a_k^{(2)}U_k^{(1)} - a_k^{(1)}U_k^{(2)}] \tag{1.9}$$

где

$$a_k^{(1)} = \frac{1+\nu_1}{2\delta_k}\left|\frac{4\operatorname{cth}\lambda_k^{(1)}}{E_1E_2} + \frac{\Delta_3}{\Delta_1}\left(\frac{8}{E_1E_2} - \Delta_2\Delta_5\right)\operatorname{cth}\lambda_k^{(2)} +\right.$$

$$+ \frac{4\operatorname{cth}^2\lambda_k^{(1)}}{E_1^2\operatorname{th}\lambda_k^{(2)}} + \frac{4\operatorname{cth}^2\lambda_k^{(2)}}{E_1E_2\operatorname{th}\lambda_k^{(1)}} + \frac{4(E_1E_2)^{-1}\lambda_k^{(1)}}{\operatorname{sh}^2\lambda_k^{(1)}\operatorname{sh}^2\lambda_k^{(2)}} -$$

$$\left. - \frac{\lambda_k^{(2)}}{\operatorname{sh}^2\lambda_k^{(2)}}\left(\Delta_5^2 - \frac{4}{E_1^2}\operatorname{cth}^2\lambda_k^{(1)}\right) + \frac{\Delta_1\Delta_5\lambda_k^{(1)}}{\operatorname{sh}^2\lambda_k^{(1)}\operatorname{th}\lambda_k^{(2)}} + \frac{\Delta_1^2\lambda_k^{(1)}\lambda_k^{(2)}}{\operatorname{sh}^2\lambda_k^{(1)}\operatorname{sh}^2\lambda_k^{(2)}}\right|$$

$$a_k^{(2)} = \frac{(1+\nu_1)(E_1\delta_k)^{-1}}{\operatorname{sh}\lambda_k^{(1)}\operatorname{sh}\lambda_k^{(2)}}\left[\frac{2}{E_1}\operatorname{cth}\lambda_k^{(1)} + \frac{2}{E_2}\operatorname{cth}\lambda_k^{(2)} + \lambda_k^{(1)}\left(\Delta_2 + \frac{2\operatorname{cth}\lambda_k^{(1)}}{E_2\operatorname{th}\lambda_k^{(2)}}\right) + \right.$$

$$\left. + \lambda_k^{(2)}\left(\Delta_3 + \frac{2\operatorname{cth}\lambda_k^{(1)}}{E_1\operatorname{th}\lambda_k^{(2)}}\right) - \Delta_1\lambda_k^{(1)}\lambda_k^{(2)}(\operatorname{cth}\lambda_k^{(1)} - \operatorname{cth}\lambda_k^{(2)})\right] \qquad (1.10)$$

$$b_k^{(1)} = \frac{(1+\nu_2)(E_2\delta_k)^{-1}}{\operatorname{sh}\lambda_k^{(1)}\operatorname{sh}\lambda_k^{(2)}}\left|\frac{2}{E_2}\operatorname{cth}\lambda_k^{(2)} + \frac{2}{E_1}\operatorname{cth}\lambda_k^{(1)} + \lambda_k^{(1)}\left(\Delta_2 + \frac{2\operatorname{cth}\lambda_k^{(1)}}{E_2\operatorname{th}\lambda_k^{(2)}}\right) + \right.$$

$$\left. + \lambda_k^{2}\left(\Delta_3 + \frac{2\operatorname{cth}\lambda_k^{(1)}}{E_1\operatorname{th}\lambda_k^{(2)}}\right) - \Delta_1\lambda_k^{(1)}\lambda_k^{(2)}(\operatorname{cth}\lambda_k^{(1)} - \operatorname{cth}\lambda_k^{(2)})\right|$$

$$b_k^{(2)} = \frac{1+\nu_2}{2\delta_k}\left|\frac{4\operatorname{cth}\lambda_k^{(2)}}{E_1E_2} + \frac{\Delta_2}{\Delta_1}\left(\Delta_3\Delta_4 - \frac{8}{E_1E_2}\right)\operatorname{cth}\lambda_k^{(1)} + \right.$$

$$+ \frac{4\operatorname{cth}^2\lambda_k^{(2)}}{E_2^2\operatorname{th}\lambda_k^{(1)}} + \frac{4\operatorname{cth}^2\lambda_k^{(1)}}{E_1E_2\operatorname{th}\lambda_k^{(2)}} + \frac{4(E_1E_2)^{-1}\lambda_k^{(2)}}{\operatorname{sh}^2\lambda_k^{(1)}\operatorname{sh}^2\lambda_k^{(2)}} -$$

$$\left. - \frac{\lambda_k^{(1)}}{\operatorname{sh}^2\lambda_k^{(1)}}\left(\Delta_2^2 - \frac{4}{E_2^2}\operatorname{cth}^2\lambda_k^{(2)}\right) - \frac{\Delta_3\Delta_4\lambda_k^{(2)}}{\operatorname{sh}^2\lambda_k^{(2)}\operatorname{th}\lambda_k^{(1)}} + \frac{\Delta_2^2\lambda_k^{(1)}\lambda_k^{(2)}}{\operatorname{sh}^2\lambda_k^{(1)}\operatorname{sh}^2\lambda_k^{(2)}}\right|$$

$$\omega_k = a_k^{(1)}b_k^{(2)} - b_k^{(1)}a_k^{(2)}$$

а $U_k^{(1)}$ и $U_k^{(2)}$ являются решениями следующих парных уравнений:

$$\sum_{k=1}^{\infty} kU_k^{(i)}\cos k\varphi = Q_1^{(i)} \qquad (0 \leqslant \varphi \leqslant l_i)$$

$$(i=1,\ 2) \qquad (1.11)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} U_k^{(i)}\cos k\varphi = Q_2^{(i)} + \sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k^{(i)}\cos k\varphi \qquad (l_i \leqslant \varphi \leqslant \pi)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$Q_1^{(1)} = 2P_1^{(1)} + P, \quad 2Q_2^{(1)} = 2h_1P_1^{(1)} - \nu_1(3h_1^2P_2^{(1)} + 2h_1P_3^{(1)} + P_4^{(1)}) +$$

$$+ T_0\alpha_1E_1h_1 + E_1C_2$$

$$Q_1^{(2)} = 2P_1^{(2)}, \quad 2Q_2^{(2)} = 2h_2P_1^{(2)} + \nu_2(3h_2^2P_2^{(2)} - 2h_2P_3^{(2)} + P_4^{(2)}) +$$

$$+ T_0\alpha_2E_2h_2 - E_2C_1$$

$$\gamma_k^{(1)} = N_k^{(1)}U_k^{(1)} + M_k^{(1)}U_k^{(2)}, \qquad \gamma_k^{(2)} = N_k^{(2)}U_k^{(2)} + M_k^{(2)}U_k^{(1)} \qquad (1.12)$$

$$N_k^{(1)} = 1 - \frac{(1+\nu_1)b_k^{(2)}}{2\omega_k}, \qquad N_k^{(2)} = 1 - \frac{(1+\nu_2)a_k^{(1)}}{2\omega_k}$$

$$M_k^{(1)} = \frac{(1+\nu_1)b_k^{(1)}}{2\omega_k}, \qquad M_k^{(2)} = \frac{(1+\nu_2)a_k^{(2)}}{2\omega_k}$$

причем последние величины имеют порядок

$$N_k^{(i)} = O(e^{-2hk}), \quad M_k^{(i)} = O(ke^{-2hk}), \quad h = \min\{h_1,\ h_2\} \quad (i = 1,\ 2) \qquad (1.13)$$

Таким образом, для окончательного определения неизвестных коэффициентов (1.6), нужно определить $U_k^{(1)}$ и $U_k^{(2)}$ из системы парных рядов-уравнений (1.11). Далее могут быть найдены компоненты напряжений и перемещений в любой точке прямоугольника.

2. Применив известные методы решения парных рядов-уравнений по косинусам [5], уравнения (1.11) сводим к следующей системе двух бесконечных систем линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} U_n^{(1)} &= \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{(1)} U_k^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk}^{(1)} U_k^{(2)} + d_n^{(1)} \\ U_n^{(2)} &= \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{(2)} U_k^{(2)} + \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk}^{(2)} U_k^{(1)} + d_n^{(2)} \end{aligned} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \qquad (2.1)$$

где введены обозначения

$$a_{nk}^{(i)} = 2^{-1} k N_k^{(i)} I_{nk}(l_i), \qquad b_{nk}^{(i)} = 2^{-1} k M_k^{(i)} I_{nk}(l_i), \qquad d_n^{(i)} = Q_1^{(i)} n^{-1} z_n(\cos l_i)$$

$$I_{nk}(x) = \int_x^{\pi} y_k(\cos\theta)\, y_n(\cos\theta)\, \mathrm{tg}\frac{\theta}{2}\, d\theta =$$

$$= \frac{k z_k(\cos x)\, y_n(\cos x) - n z_n(\cos x)\, y_k(\cos x)}{n^2 - k^2} \qquad (n \neq k) \qquad (2.2)$$

$$I_{kk}(x) = \frac{2 + 4\cos x + P_k^2(\cos x) - P_{k-1}^2(\cos x) - 2P_{k-1}(\cos x) P_k(\cos x)}{2k} +$$

$$+ \frac{2}{k} \sum_{m=1}^{k-1} P_m(\cos x)\,[P_m(\cos x)\cos x - P_{m-1}(\cos x)]$$

Здесь $P_k(x)$ — полиномы Лежандра, а $y_k(x)$ и $z_k(x)$ имеют вид

$$y_k(x) = P_{k-1}(x) + P_k(x), \qquad z_k(x) = P_{k-1}(x) - P_k(x) \qquad (|x| \leqslant 1) \quad (2.3)$$

Из второго и четвертого уравнений системы (1.11), подставляя в них (2.1), для коэффициентов полинома в выражении (1.4) получим следующую систему двух алгебраических уравнений:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^{(i)} z_k(\cos l_i) - 4Q_1^{(i)} \ln\cos\frac{l_i}{2} = 2Q_2^{(i)} \qquad (i = 1, 2) \qquad (2.4)$$

В силу соотношений (1.6) и (1.12) решение системы (2.1) $U_k^{(1)}$ и $U_k^{(2)}$ выражено через $P_1^{(1)}$, $P_4^{(1)}$, a_0, b_0. Подставляя эти значения $U_k^{(1)}$ и $U_k^{(2)}$ в (2.4) и разрешая полученную систему относительно $P_1^{(1)}$, $P_4^{(1)}$, определим их значения через a_0 и b_0. После этого найденные значения $P_1^{(1)}$ и $P_4^{(1)}$ подставим в $U_k^{(1)}$, $U_k^{(2)}$ и выразим последние через a_0 и b_0. Постоянные же a_0, b_0, характеризующие линейный закон перемещения бокового штампа, будем определять из условия равенства нулю главного вектора R и главного момента M сил, действующих на боковом штампе, то есть

$$\int_{-h_2}^{h_1} \sigma_x dy = 0, \qquad \int_{-h_2}^{h_1} y\sigma_x dy = 0 \tag{2.5}$$

Интересен также тот случай, когда $a_0 = b_0 = 0$, то есть боковой штамп неподвижен. Докажем, что полученная выше бесконечная система (2.1) квази-вполне регулярна. Для этого нужно оценить ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_{nk}^{(i)}|$ и $\sum\limits_{q=1}^{\infty} |b_{nk}^{(i)}|$. На основании (1.13), с использованием свойств функций $y_k(x)$ $z_k(x)$ [5], а также интегрального неравенства Буняковского, нетрудно получить

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}^{(i)}| < \frac{A_i}{n^{3/2}} + \frac{B_i}{e^{kn}}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |b_{nk}^{(i)}| < \frac{C_i}{n^{3/2}} + \frac{D_i n}{e^{kn}} \quad (i = 1,\ 2) \tag{2.6}$$

Каждая из полученных оценок стремится к нулю при $n \to \infty$. Поэтому, начиная с некоторого значения n_0, сумма модулей коэффициентов при неизвестных станет меньше единицы. Следовательно, бесконечная система (2.1), свободные члены которой стремятся к нулю как $d_n^{(i)} = o(n^{-3/2})$, квази-вполне регулярна. В оценке (2.6) A_i, B_i, C_i, D_i — постоянные, значения которых зависят от геометрии и физических свойств материалов.

3. Подставляя в выражение (1.1) значения функции $\Phi(x, y)$ из (1.4), учитывая при этом (1.6), для определения перемещений и напряжений получим следующие формулы:

$$\sigma_y^{(1)} = 2P_1^{(1)} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{\lambda_k} \left\{ \frac{(1+\nu_1)\operatorname{sh} ky}{2\operatorname{sh} kh_1} X_k \left[\alpha_k^{(1)} + \frac{2}{E_1} \gamma_k^{(1)} \operatorname{cth} ky - \right.\right.$$

$$\left. - ky\,(e_k^{(1)} + f_k^{(1)} \operatorname{cth} ky) \right] +$$

$$\left. + \frac{(1+\nu_2)\operatorname{sh} ky}{E_2 \operatorname{sh} kh_2} Y_k \left[\beta_k^{(1)} - \gamma_k^{(2)} \operatorname{cth} ky + ky\,(r_k^{(1)} - g_k^{(1)} \operatorname{cth} ky) \right] \right\} \cos kx$$

$$\tau_{xy}^{(1)} = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{\lambda_k} \left\{ \frac{(1+\nu_1)\operatorname{sh} ky}{2\operatorname{sh} kh_1} X_k \left[\frac{\alpha_k^{(1)} - f_k^{(1)}}{\operatorname{th} ky} + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{2}{E_1} \gamma_k^{(1)} - e_k^{(1)} - ky\,(f_k^{(1)} + e_k^{(1)} \operatorname{cth} ky) \right] +$$

$$\left. + \frac{(1+\nu_2)\operatorname{sh} ky}{E_2 \operatorname{sh} kh_2} Y_k \left[\frac{\beta_k^{(1)} - g_k^{(1)}}{\operatorname{th} ky} + r_k^{(1)} - \gamma_k^{(2)} - ky\,(g_k^{(1)} - r_k^{(1)} \operatorname{cth} ky) \right] \right\} \sin kx$$

$$v_1(x, y) = C_1 - \frac{\nu_1}{E_1} P_4^{(1)} + \left[\frac{2(1-\nu_1^2)}{E_1} P_1^{(1)} - \frac{\nu_1}{\pi} a_0 + (1+\nu_1)\alpha_1 T_0 \right] y -$$

$$- \frac{\nu_1}{\pi} b_0 y^2 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+\nu_1}{E_1 \delta_k} \left\{ \frac{(1+\nu_1)\,\mathrm{sh}\, ky}{2\,\mathrm{sh}\, kh_1} X_k \left[\frac{\alpha_k^{(1)} - \nu_0 f_k^{(1)}}{\mathrm{th}\, ky} + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{2}{E_1} \gamma_{ik}^{(1)} + \nu_0 e_k^{(1)} - ky(f_k^{(1)} + e_k^{(1)}\,\mathrm{cth}\, ky) \right] + \tag{3.1}$$

$$+ \frac{(1+\nu_2)\,\mathrm{sh}\, ky}{E_2\,\mathrm{sh}\, kh_2} Y_k \left[\frac{\beta_k^{(1)} + \nu_0 g_k^{(1)}}{\mathrm{th}\, ky} - \gamma_{ik}^{(2)} - \nu_0 r_k^{(1)} - \right.$$

$$\left.\left. - ky(g_k^{(1)} - r_k^{(1)}\,\mathrm{cth}\, ky) \right] \right\} \cos kx$$

где

$$\nu_0 = (1-\nu_1):(1+\nu_1)$$

Эти формулы верны для той части прямоугольника, которая соответствует первому материалу. Аналогичные формулы получим и для нижнего материала, если в (3.1) во всех величинах (кроме C_1) индексы „1" и „2" заменить местами, а также

$$h_1 \rightleftarrows -h_2, \quad \alpha_k^{(1)} \rightleftarrows -\alpha_k^{(2)}, \quad \beta_k^{(1)} \rightleftarrows -\beta_k^{(2)}, \quad f_k^{(1)} \rightleftarrows -f_k^{(2)}, \quad g_k^{(1)} \rightleftarrows -g_k^{(2)}$$

$$X_k \rightleftarrows Y_k \tag{3.2}$$

Поскольку некоторые ряды, входящие в выражения перемещений и напряжений, на границе прямоугольника сходятся медленно (условно), улучшим сходимость этих рядов на границах области с выделением особенностей. Для этого в выражения (3.1) для $\sigma_y^{(i)}$, v_i подставим значения X_k, Y_k из бесконечных систем (2.1). После ряда выкладок для контактных напряжений $\sigma_y^{(i)}$ под штампами и перемещений v_i вне штампа получим следующие пригодные для расчета формулы:

$$-\sigma_y^{(i)} = \frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} k\gamma_{ik}^{(i)} \int_{l_i}^{\varphi} \frac{y_k'(\cos\theta)\, d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\varphi}} +$$

$$+ \frac{2^{-\frac{1}{2}} \sin\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{\cos l_i - \cos\varphi}} \left[\sum_{k=1}^{\infty} k\gamma_{ik}^{(i)} y_k(\cos l_i) - 2Q_1^{(i)} \right] - \frac{1-(-1)^i}{2} p \quad (l_i < \varphi < \pi)$$

$$(i = 1, 2) \tag{3.3}$$

$$\frac{(-1)^{i-1}}{2} E_i v_i = \frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{2}} \left[\sum_{k=1}^{\infty} k\gamma_{ik}^{(i)} \int_{\varphi}^{l_i} \frac{y_k(\cos\theta)\,\mathrm{tg}\frac{\theta}{2}\, d\theta}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\theta}} - \right.$$

$$
-2Q_1^{(i)}\int\limits_{\varphi}^{l_i}\frac{\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\,d\theta}{\sqrt{\cos\varphi-\cos\theta}}\Bigg|\qquad (0<\varphi<l_i)
$$

Аналогично могут быть получены формулы для $\sigma_x^{(i)}(\pi, y)$ и $U_i(\pi, y)$. Как видно из этих формул, в соответствующих точках и конце штампов $x=l_i$ имеет место концентрация напряжений.

4. В качестве численного примера рассмотрим две прямоугольные пластинки одинаковой толщины $h_1=h_2=\frac{\pi}{6}$, составленные из меди и стали, находящиеся в контакте одной кромкой и сжимаемые жесткими штампами, симметрично расположенными у краев относительно главных осей прямоугольника. Физико-механические характеристики выбранных материалов имеют следующие значения:

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1=17\cdot10^{-6}\,\frac{1}{град}, \quad E_1=1.12\cdot10^{6}\,\frac{кг}{см^2}, \quad \nu_1=0.34\\
&\alpha_2=12\cdot10^{-6}\,\frac{1}{град}, \quad E_2:E_1=1.91, \quad \nu_2=0.28
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

а размеры прямоугольника выберем $l_1=l_2=l=\frac{2}{3}\pi$, $l=4h=\frac{2}{3}\pi$.

Таблица

x	y	$R=0,\quad M=0$	$a_0=b_0=0$
$5\pi/6$	$\pi/6$	$-1.3301\,T_0-0.9103\,p$	$-4.1778\,T_0-0.9524\,p$
$5\pi/6$	$-\pi/6$	$-1.4521\,T_0-1.9968\,p$	$-4.5609\,T_0-2.0427\,p$
$2\pi/3$	$\pi/12$	$-0.7918\,T_0-1.0463\,p$	$-2.4835\,T_0-1.0714\,p$
$5\pi/6$	$\pi/12$	$-0.7472\,T_0-0.9851\,p$	$-2.3502\,T_0-1.0090\,p$
π	$\pi/12$	$-0.1923\,T_0-0.7652\,p$	$-0.6109\,T_0-0.7713\,p$
$2\pi/3$	0	$-0.7572\,T_0-1.1893\,p$	$-2.4200\,T_0-1.2139\,p$
$5\pi/6$	0	$-0.3786\,T_0-0.7417\,p$	$-1.1926\,T_0-0.7538\,p$
π	0	$-0.2249\,T_0-0.5329\,p$	$-0.7132\,T_0-0.5401\,p$
$2\pi/3$	$-\pi/12$	$-0.8277\,T_0-1.4754\,p$	$-2.5961\,T_0-1.5017\,p$
$5\pi/6$	$-\pi/12$	$-0.7864\,T_0-1.2744\,p$	$-2.4271\,T_0-1.2994\,p$
π	$-\pi/12$	$-0.1133\,T_0-0.0530\,p$	$-0.3642\,T_0-0.0567\,p$

Для определения основных величин нужно решить бесконечную систему (2.1). Поскольку коэффициенты при неизвестных $U_k^{(1)}$ и $U_k^{(2)}$ убывают достаточно быстро (по строкам—порядка $O(n^{-3/2})$, а по столбцам — $O(e^{-hm})$), оставаясь меньше единицы, то взяв по четыре члена из каждого ряда, получим неоднородную систему линейных алгебраических уравнений с восемью неизвестными. Решая систему, получим значения $U_k^{(1)}$ и $U_k^{(2)}$, выраженные через постоянную $P_1^{(1)}$. Подставляя эти значения в (2.4) и (2.5), а также и уравнения, получившиеся из условий равенства нулю в какой-либо точке под штампом (взято $x = 5\pi/6$) перемещения v_1, относительно $P_1^{(1)}$, $P_1^{(2)}$, a_0, b_0 и C_1 получим пять уравнений, откуда и найдем значения этих коэффициентов, а, следовательно, и $U_k^{(1)}$, и $U_k^{(2)}$ в зависимости от температуры T и нормальной нагрузки p. Значения напряжений $\sigma_y^{(i)}$ $(i = 1, 2)$ в нескольких точках прямоугольника при $R = M = 0$ и $a_0 = b_0 = 0$ приведены в таблице.

Для перемещения точки $O(0, 0)$ получим

$$-E_1 v_1 = 5.3763\, T_0 + 0.2041\, p \quad \text{при} \quad R = 0, \quad M = 0$$

$$-E_1 v_1 = 9.2784\, T_0 + 0.1216\, p \quad \text{при} \quad a_0 = b_0 = 0$$

Автор выражает благодарность А. А. Баблояну за руководство работой и за ценные советы.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 6 IV 1971

Մ. Գ. ՄԵԼՔՈՆՅԱՆ

ԲԱՂԱԴՐՅԱԼ ՈՒՂՂԱՆԿՅԱՆ ՀԱՄԱՐ ՋԵՐՄԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐԹ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ՄԻ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկվում է գծային ջերմառաձգականության հարթ խառը խնդիրը բաղադրյալ ուղղանկյան համար, որը գտնվում է ստացիոնար ջերմային դաշտում և բոլոր ճակատներով սեղմվում է կոշտ դրոշմներով, որոնք ուղղանկյան ուղղաձիգ առանցքի նկատմամբ դասավորված են համաչափ։

Ընդունված է արտաքին շոշափող լարումների բացակայություն։ Խնդիրը լուծվում է Ֆուրիեի մեթոդով։ Լուծումը նախ բերվում է եռանկյունաչափական զույգ հավասարումների սիստեմի լուծմանը, իսկ ապա՝ հանրահաշվական հավասարումների անվերջ սիստեմների, որոնք քվազի-լիովին ռեգուլյար են։ Բերված է այդ սիստեմների մանրամասն հետազոտումը։ Ստացված են կոնտակտային լարումների և նորմալ տեղափոխումների համար բանաձևեր։

Բերված է թվային օրինակ։

A CONTACT PROBLEM OF THERMOELASTICITY FOR A COMPOSITE RECTANGLE

M. G. MELKONIAN

Summary

A plane problem of thermoelasticity for a composite rectangular region with mixed boundary conditions is considered. The rectangle is assumed to be in a stationary heat field and compressed by rigid stamps placed in the rectangle's corners symmetrically with respect to its vertical axis. Shear stresses are supposed to vanish throughout the rectangular region boundary. The problem is solved by the Fourier method. The solution is reduced to a system of dual trigonometric equations which are solved by infinite sets of quasi-regular linear equations. A numerical example is presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абрамян Б. Л.* Об одном случае плоской задачи теории упругости для прямоугольника. Докл. АН Арм.ССР, т. XXI, № 5, 1955.
2. *Абрамян Б. Л.* К плоской задаче теории упругости для прямоугольника. ПММ, т. XXI, вып. 1, 1957.
3. *Баблоян А. А., Гулканян Н. О.* Об одной смешанной задаче для прямоугольника. Изв. АН Арм.ССР, Механика, т. XXII, № 1, 1969.
4. *Баблоян А. А., Мелконян А. П.* Об одной смешанной задаче плоской теории упругости. Изв. АН Арм.ССР, Механика, т. XXIII, № 5, 1970.
5. *Баблоян А. А.* Решение некоторых парных уравнений, встречающихся в задачах теории упругости. ПММ, т. 31, вып. 4, 1967.
6. *Гилфаян П. О., Чобанян К. С.* Решение одной контактной задачи для упругого прямоугольника. ПММ, т. 30, вып. 3, 1966.
7. *Чобанян К. С., Гилфаян П. О.* Об одной задаче теории упругости для составного прямоугольника. Изв. АН Арм.ССР, сер. физ.-мат. наук, т. XVI, вып. 2, 1963.
8. *Кац А. М.* Теория упругости. Гостехиздат, М., 1956.