

А. А. БАБАОЯН, А. М. МКРТЧЯН

### ОБ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНИКА

Решается плоская задача теории упругости для прямоугольника, когда к серединам его краев приложены жесткие симметрично расположенные штампы, то есть на всех участках граничные условия заданы в смешанном виде.

Плоская задача для прямоугольника, когда на границе известны напряжения или перемещения, раньше рассматривалась в работах [1, 2].

Смешанная задача для прямоугольника, когда на двух противоположных кромках приложены штампы, исследована в [3]. Плоская задача для прямоугольника, сжимаемого по всем кромкам двумя одинаковыми симметрично расположенными у краев жесткими штампами, рассмотрена в работе [4].

1. Рассмотрим плоскую задачу для прямоугольника, сжимаемого по всем кромкам штампами, расположенными симметрично относительно осей прямоугольника (фиг. 1). Длины штампов, приложенных к противоположным кромкам, одинаковы, а к смежным — разные. Предполагается, для простоты выкладок, что внешние нагрузки, приложенные как к штампам, так и к участкам контура прямоугольника вне штампов симметричны относительно главных осей прямоугольника. Касательные напряжения на границе отсутствуют.

Граничные условия данной задачи следующие:

$$\tau_{xy}(x = \pm a, y) = \tau_{xy}(x, y = \pm b) = 0$$

$$\begin{aligned} u(\pm a, y) &= f_1(y) \quad (|y| < c) & v(x, \pm b) &= f_2(x) \quad (|x| < d) \\ \sigma_x(\pm a, y) &= (r_1) y \quad (c < |y| < b) & \tau_y(x, \pm b) &= f_3(x) \quad (d < |x| < a) \end{aligned} \quad (1.1)$$

В силу симметрии функции Эйри будем определять только в четвертой части основной области, удовлетворяя при этом условиям симметрии на осях  $x = 0, y = 0$

$$u(0, y) = v(x, 0) = \tau_{xy}(x, 0) = \tau_{xy}(0, y) = 0$$

Напряжения и перемещения определяются через бигармоническую функцию Эйри по формулам

$$\begin{aligned} z_x &= \frac{\partial \Phi}{\partial y^2}, \quad z_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad z_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \\ E_u &= \int_0^a \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} dx - \nu \frac{\partial \Phi}{\partial x} - l_0 y + f_0 \\ E_v &= \int_0^b \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} dy - \nu \frac{\partial \Phi}{\partial y} - l_0 x - g_0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

В силу симметрии задачи функцию напряжений Ээри ищем в виде

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= c_1 x^2 + c_2 y^2 + \sum_{k=1}^{\infty} [B_k \operatorname{ch} z_k y + C_k z_k y \operatorname{sh} z_k y] \cos z_k x + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} [F_k \operatorname{ch} z_k x + G_k z_k x \operatorname{sh} z_k x] \cos z_k y; \quad z_k = \frac{k\pi}{a}, \quad z_k = \frac{k\pi}{b} \end{aligned} \quad (1.3)$$

При выборе функции  $\Phi(x, y)$  в виде (1.3) и при  $l_0 = g_0 = f_0 = 0$  условия симметрии удовлетворяются автоматически.

Удовлетворяя условиям равенства нулю тангенциальных напряжений на кромках прямоугольника, между коэффициентами  $F_k$ ,  $G_k$ ,  $B_k$  и  $C_k$  получим соотношения

$$B_k = -C_k(1 + z_k b \operatorname{oth} z_k b); \quad F_k = -G_k(1 - z_k a \operatorname{oth} z_k a) \quad (1.4)$$

Удовлетворяя затем смешанным условиям (1.1), учитывая (1.4) и отображая одномерные области  $(0 < x < a)$  и  $(0 < y < b)$  на области  $(0 < \xi < \pi)$  и  $(0 < \eta < \pi)$  соответственно, получим следующую систему парных тригонометрических рядов-уравнений:

$$\begin{aligned} z_1 X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} X_k (1 - N_k) \cos k\xi &= \nu_1 Y_0 + F_1(\xi) \quad (0 < \xi < \pi) \\ X_0 &= \sum_{k=1}^{\infty} X_k \cos k\xi = \frac{b^2}{a^2} \sum_{p=1}^{\infty} (1 - 1)^{p-1} \frac{(1 - M_p) Y_p}{\operatorname{sh} z_p b} \\ \left[ \operatorname{ch} p \frac{b}{a} - z_p b \frac{\operatorname{ch} p \frac{b}{a} (\pi - \xi)}{\operatorname{sh} z_p b} - p \frac{b}{a} (\pi - \xi) \operatorname{sh} p \frac{b}{a} \right] &= F_1(\xi) \\ & \quad (0 < \xi < \pi) \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$z_2 Y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} Y_k (1 - M_k) \cos k\eta = \nu_2 X_0 + F_2(\eta) \quad (0 < \eta < \pi)$$

$$Y_0 = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k \cos k\eta = \frac{a^2}{b^2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(1 - 1)^{p-1} (1 - N_p) X_p}{\operatorname{sh} z_p a}$$

$$\times \left[ \operatorname{chp} \frac{a}{b} \xi - \xi_0 a \frac{\operatorname{chp} \frac{a}{b} (\pi - \xi)}{\operatorname{sh}^2 \xi_0 a} - p \frac{a}{b} (\pi - \xi) \operatorname{shp} \frac{a}{b} \xi \right] + F_2(\xi) \quad (\xi_1 < \xi < \pi)$$

Здесь введены обозначения

$$X_k = k^2 G_k \left( \operatorname{ch} \xi_k a + \frac{\xi_k a}{\operatorname{sh} \xi_k a} \right); \quad Y_k = k^2 C_k \left( \operatorname{ch} \tau_k b - \frac{\tau_k b}{\operatorname{sh} \tau_k b} \right)$$

$$X_0 = 2 \frac{b^2}{\pi^2} c_0; \quad Y_0 = 2 \frac{a^2}{\pi^2} c_1$$

$$N_k = \frac{2\xi_k a + 1 - e^{-2\xi_k a}}{\operatorname{sh} 2\xi_k a + 2\xi_k a}; \quad M_k = \frac{2\tau_k b + 1 - e^{-2\tau_k b}}{\operatorname{sh} 2\tau_k b + 2\tau_k b}$$

$$F_1(\eta) = \frac{b^2}{\pi^2} f_1\left(\frac{\eta b}{\pi}\right); \quad F_2(\eta) = E \frac{b}{2\pi} f_2\left(\frac{\eta b}{\pi}\right)$$

$$F_3(\xi) = \frac{a^2}{\pi^2} f_3\left(\frac{\xi a}{\pi}\right); \quad F_4(\xi) = E \frac{a}{2\pi} f_4\left(\frac{\xi a}{\pi}\right)$$

$$\xi_0 = \frac{\pi c}{b}, \quad \xi_1 = \frac{\pi d}{a}, \quad \tau_1 = \frac{\pi a}{2b}, \quad \tau_2 = \frac{\pi b}{2a} \quad (1.6)$$

Считая правые части вариальных уравнений (1.5) известными и пользуясь решением такого рода уравнений [5], приведем (1.5) к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} X_k &= \sum_{n=1}^{\infty} a_{nk}^{(1)} X_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_{nk}^{(1)} Y_n + \gamma_k^{(1)} \\ Y_k &= \sum_{n=1}^{\infty} a_{nk}^{(2)} Y_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_{nk}^{(2)} X_n + \gamma_k^{(2)} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Коэффициенты при неизвестных (1.7) определяются формулами

$$\begin{aligned} a_{nk}^{(1)} &= \frac{k}{2} N_k J_n(\gamma_1); & b_{nk}^{(1)} &= \frac{k}{2} \frac{b^2}{a^2} (-1)^n (1 - M_n) J_{k,n}(\gamma_1) \\ a_{nk}^{(2)} &= \frac{k}{2} M_k J_n(\tau_1); & b_{nk}^{(2)} &= \frac{k}{2} \frac{a^2}{b^2} (-1)^n (1 - N_n) J_{k,n}(\tau_1) \end{aligned} \quad (1.8)$$

а свободные члены — выражениями

$$\begin{aligned} \gamma_k^{(1)} &= \frac{k}{2} \int_0^{\xi_1} G_2(\eta) z_k(\cos \eta) \operatorname{ctg} \frac{\eta}{2} d\eta - \\ &= \frac{k}{2} \int_0^{\xi_1} G_1(\eta) z_k(\cos \eta) \operatorname{ctg} \frac{\eta}{2} d\eta + X_k \theta_k(\cos \tau_1) \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$z_k^{(2)} = \frac{k}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} G_i(b) z_k(\cos b) \operatorname{ctg} \frac{b}{2} db - \frac{k}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} G_i(b) z_k(\cos b) \operatorname{ctg} \frac{b}{2} db = Y_{k, \nu_i}(\cos z_i) \quad (1.9)$$

Здесь функции  $G_i(b)$  ( $i = 1 - 4$ ) имеют вид

$$G_i(b) = \frac{2 \sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{F_i(t) \sin \frac{t}{2} dt}{|\cos^2 t - \cos^2 b|} \quad (i = 1, 3)$$

$$G_i(b) = \frac{2 \sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{F_i^*(t) \sin \frac{t}{2} dt}{|\cos^2 t - \cos^2 b|} \quad (i = 2, 4) \quad (1.10)$$

В формулах (1.8) введены обозначения

$$L_k(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} z_k(\cos b) z_k(\cos b) \operatorname{ctg} \frac{b}{2} db$$

$$J_{k, \nu_i}(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} z_k(\cos b) L_{\nu_i}(\cos b) \operatorname{ctg} \frac{b}{2} db \quad (1.11)$$

$$L_{\nu_i}(\cos b) = \frac{2 \sqrt{2}}{\pi \operatorname{sh} p \pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \operatorname{ch} p x - p \tau \frac{\operatorname{ch} p(\pi - x)}{\operatorname{sh} p \pi} \right.$$

$$\left. - p(\pi - x) \operatorname{sh} p x \right| \frac{\sin \frac{x}{2} dx}{|\cos^2 b - \cos^2 x|}$$

Функции  $y_k(\cos b)$  и  $z_k(\cos b)$  представляют собой частные случаи функций Якоби и выражаются суммой и разностью полиномов Лежандра соответственно. Дифференциальные соотношения и интегральные представления для этих функций приводятся в работе [5].

2. Приведем некоторые свойства функции  $L_{\nu_i}(x)$ . Отметим, что с функцией  $L_{\nu_i}(x)$  тесно связаны функции  $H_{\nu_i}(x)$ ,  $R_{\nu_i}(x)$  и  $K_{\nu_i}(x)$ , которые выражаются формулами

$$H_{\nu_i}(\cos b) = \frac{2 \sqrt{2}}{\pi \operatorname{sh} p \pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \operatorname{sh} p x - p \tau \frac{\operatorname{sh} p(\pi - x)}{\operatorname{sh} p \pi} \right.$$

$$\left. - p(\pi - x) \operatorname{ch} p x \right| \frac{\cos \frac{x}{2} dx}{|\cos^2 b - \cos^2 x|} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned}
 R_p(\cos \theta) &= \frac{2\sqrt{2}}{\pi \operatorname{sh} p\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{ch} p x \sin \frac{x}{2} dx}{1 - \cos^2 \theta - \cos x} \\
 K_p(\cos \theta) &= \frac{2\sqrt{2}}{\pi \operatorname{sh} p\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sh} p x \cos \frac{x}{2} dx}{1 - \cos^2 \theta - \cos x}
 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Непосредственной подстановкой нетрудно убедиться, что  $L_p(x)$  и вспомогательные функции (2.1) удовлетворяют следующим дифференциальным соотношениям:

$$\begin{aligned}
 L_p'(x) &= -\frac{p}{1+x} [H_p(x) - K_p(x)], \quad R_p'(x) = \frac{p}{1-x} K_p'(x) \\
 H_p'(x) &= -\frac{p}{1-x} [L_p(x) + R_p(x)] = \frac{2\sqrt{2}}{\pi(1-x)\sqrt{1-x}} \\
 K_p'(x) &= -\frac{p}{1-x} R_p(x) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi(1-x)\sqrt{1+x}}
 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Из (2.2) следует, что функции  $L_p(x)$  и  $K_p(x)$  являются решениями дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
 (1-x)[(1+x)L_p'(x)]' - p^2 L_p(x) &= 2p^2 R_p(x) = \frac{4\sqrt{2}p}{\pi(1-x)} \\
 (1-x)[(1-x)K_p'(x)]' - p^2 K_p(x) &= -\frac{2\sqrt{2}p}{\pi(1-x)}
 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Пользуясь теперь дифференциальным уравнением для  $z_k(x)$  [5] и (2.3), вычислим второй интеграл (1.11), рассматривая его как интеграл типа Ломмеля [6]

$$\begin{aligned}
 \int \frac{z_k(x) L_p(x)}{1-x} dx &= \frac{ky_k(x) L_p(x) - pz_k(x) [H_p(x) - K_p(x)]}{k^2 - p^2} \\
 &= \frac{2p^2}{(k^2 - p^2)^2} [ky_k(x) K_p(x) - pz_k(x) K_p'(x)] \\
 &+ \frac{4\sqrt{2}k^2 p}{(k^2 - p^2)^2} \int \frac{z_k(x) dx}{(1-x)\sqrt{1-x}}
 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Отметим, что функции  $L_p(x)$ ,  $H_p(x)$ ,  $R_p(x)$ ,  $K_p(x)$  при больших  $p$  имеют следующий асимптотический порядок:

$$L_p(\cos \theta) \sim O\left(e^{-\pi p \sin \frac{\theta}{2}} \frac{1}{p^3}\right) \quad (0 < \theta < \pi) \quad (2.5)$$

$$H_\nu(\cos \theta), \quad K_\nu(\cos \theta) \sim O\left(\frac{1}{p^\nu}\right)$$

$$R_\nu(\cos \theta) \sim O\left(\frac{1}{p}\right) \quad (0 < \theta < \pi) \quad (2.5)$$

а на концах основного интервала  $[0, \pi]$  принимают следующие значения:

$$L_\nu(1) = H_\nu(-1) = K_\nu(-1) = 0, \quad K_\nu(1) = \frac{2}{p^\nu}$$

$$K_\nu(-1) = 2\operatorname{cth} p\nu, \quad L_\nu(-1) = 2\left(\operatorname{cth} p\nu - \frac{p^\nu}{\operatorname{sh} p\nu}\right)$$

$$H_\nu(1) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(-1)^{k+1} [p^\nu - k^\nu]}{[p^\nu - k^\nu]^2}$$

$$K_\nu(1) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(-1)^{k+1}}{p^\nu + k^\nu} \quad (2.6)$$

3. Исследуем бесконечные системы (1.7).

Докажем, что в общем случае бесконечные системы (1.7) квазишоломе регулярны. Для этого нужно оценить ряды

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} |a_{\mu k}^{(i)}|, \quad \sum_{\mu=1}^{\infty} |b_{\mu k}^{(i)}| \quad (i=1, 2)$$

Из (1.6) видно, что числа  $N_\mu$  и  $M_\mu$ , входящие в вышеуказанные ряды, при любом „ $p$ “ остаются меньше единицы и при больших значениях индекса стремятся к нулю как  $N_\mu \sim O(p\epsilon^{-\mu})$  и  $M_\mu \sim O(p\epsilon^{-\mu})$ , где  $\epsilon = 2 - a/b$ ,  $\gamma = 2 - b/a$ . Вследствие быстрой сходимости вышеуказанных рядов, их суммы будут по индексу „ $k$ “ иметь такой же порядок убывания, как и их общие члены, то есть

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} |a_{\mu k}^{(i)}| \leq O(k^{-1/2}) \quad (3.1)$$

Далее, пользуясь значением интеграла  $J_{\mu}(x)$  и (2.5), будем иметь

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} |b_{\mu k}^{(i)}| \leq \left| k^{-1} \sum_{\mu=1}^{\infty} e^{-\mu} \left\{ \frac{Ak + Bp}{[p(k^2 + i)p]} - \frac{kpG + p^2D}{(k^2 + i)p^2} \right\} \right|$$

$$= \left| k^{-1} \sum_{\mu=1}^{\infty} \left\{ \frac{kp^2E + F}{k^2 + i)p} + \frac{kpG + p^2H}{(k^2 + i)p^2} \right\} \right| \sim O(k^{-1/2})$$

$$h_1 = \frac{(b-c)\pi}{a}, \quad h_2 = \frac{(a-d)\pi}{b}$$

$$\tau_1 = \frac{b^2}{a^2}, \quad \tau_2 = \frac{a^2}{b^2} \quad (h_i > 0) \quad (i = 1, 2) \quad (3.2)$$

Полученные оценки стремятся к нулю при  $k \rightarrow \infty$ , поэтому, начиная с некоторого значения  $k_0$ , сумма модулей коэффициентов при неизвестных станет меньше единицы, то есть система (1.7) квазилинейно регулярна.

Накладывая обычные условия на граничные функции [4], легко показать, что функции  $G_i(b)$  (1.10) непрерывные. При этом свободные члены  $\tau_i^{(0)}$  бесконечной системы (1.7) имеют порядок  $O(k^{-1/2})$ . Применяя метод последовательных приближений, нетрудно показать, что  $X_i$  и  $Y_i$  также имеют порядок  $O(k^{-1/2})$ .

Неизвестные  $X_i$  и  $Y_i$ , определяемые из (1.7), выражаются через неизвестные постоянные  $X_0$ ,  $Y_0$  и удовлетворяют первым уравнениям (1.5) с точностью до постоянного слагаемого (так как при получении системы (1.7) эти уравнения были проинтегрированы). Удовлетворяя первым уравнениям (1.5) [4], пользуясь формулами (2.4) и (1.6), для определения  $X_0$ ,  $Y_0$  получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} & \tau_1 X_0 \left[ 1 - \frac{4b}{a^2} \ln \left( \sin \frac{b}{2} \right) \right] - \tau_1 Y_0 - \frac{E b}{2\pi} f_2(0) - \\ & \quad - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} X_n M_n \frac{y_n(\cos^2 \tau_1)}{\rho} - \\ & \quad - \frac{1}{2} \int_0^{\tau_1} G_1(b) \operatorname{ctg} \frac{b}{2} d\theta - \frac{1}{2} \int_0^{\tau_1} G_2(b) \operatorname{ctg} \frac{b}{2} d\theta - \\ & \quad - \frac{b}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \tau_1) Y_n (1 - M_n) \frac{1}{\rho} [K_{n+1/2}(\cos^2 \tau_1) - H_{n+1/2}(\cos^2 \tau_1)] - \\ & \quad - Y_0 \left[ 1 - \frac{4a}{b^2} \ln \left( \sin \frac{a}{2} \right) \right] - \tau_1 X_0 - \frac{E a}{2\pi} f_1(0) - \\ & \quad - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} Y_n M_n \frac{y_n(\cos^2 \tau_1)}{\rho} - \\ & \quad - \frac{1}{2} \int_0^{\tau_1} G_1(b) \operatorname{ctg} \frac{b}{2} d\theta - \frac{1}{2} \int_0^{\tau_1} G_2(b) \operatorname{ctg} \frac{b}{2} d\theta - \\ & \quad - \frac{a}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \tau_1) X_n (1 - M_n) \frac{1}{\rho} [K_{n+1/2}(\cos^2 \tau_1) - H_{n+1/2}(\cos^2 \tau_1)] \end{aligned} \quad (3.3)$$

При получении (3.3) было использовано также значение интеграла

$$\int_0^{\tau} \frac{K_{n+1/2}(x) dx}{1-x} = \frac{1}{\rho} [K_n(x) - H_n(\tau)]$$

4. Приведем формулы для напряжений и перемещений.

Подставляя в выражения (1.2) значение функции (1.3) и учитывая при этом (1.4) и (1.6), для определения перемещений и напряжений во всех точках области получим следующие выражения:

$$\begin{aligned}
 E u(x, y) &= \frac{\pi}{a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Y_k(1-M_k)}{k} \sin \alpha_k x \\
 &\times \left[ (1-\nu) \frac{\operatorname{ch} \alpha_k y}{\operatorname{sh} \alpha_k b} - (1+\nu) \left( \alpha_k b \frac{\operatorname{ch} \alpha_k (b-y)}{\operatorname{sh}^2 \alpha_k b} - \alpha_k (b-y) \frac{\operatorname{sh} \alpha_k y}{\operatorname{sh} \alpha_k b} \right) \right] + \\
 &= \frac{\pi}{b} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k(1-N_k)}{k} \cos \beta_k y \left\{ 2 \frac{\operatorname{sh} \beta_k x}{\operatorname{sh} \beta_k a} - (1-\nu) \left[ \beta_k a \frac{\operatorname{sh} \beta_k (a-x)}{\operatorname{sh}^2 \beta_k a} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \beta_k (a-x) \frac{\operatorname{ch} \beta_k x}{\operatorname{sh} \beta_k a} \right] \right\} + \pi^2 x \left( \frac{X_0}{b^2} - \nu \frac{Y_0}{a^2} \right) \\
 \tau_x(x, y) &= \frac{\pi}{a^2} \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(1-M_k) \cos \alpha_k x \\
 &\times \left[ \frac{\operatorname{ch} \alpha_k y}{\operatorname{sh} \alpha_k b} - \alpha_k b \frac{\operatorname{ch} \alpha_k (b-y)}{\operatorname{sh}^2 \alpha_k b} - \alpha_k (b-y) \frac{\operatorname{sh} \alpha_k y}{\operatorname{sh} \alpha_k b} \right] + \\
 &= \frac{\pi}{b^2} \sum_{k=1}^{\infty} X_k(1-N_k) \cos \beta_k y \left[ \frac{\operatorname{ch} \beta_k x}{\operatorname{sh} \beta_k a} + \beta_k a \frac{\operatorname{ch} \beta_k (a-x)}{\operatorname{sh}^2 \beta_k a} \right. \\
 &\quad \left. - \beta_k (a-x) \frac{\operatorname{sh} \beta_k x}{\operatorname{sh} \beta_k a} \right] - \frac{\pi^2}{b^2} X_0 \\
 \tau_{xy}(x, y) &= \frac{\pi}{a^2} \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(1-M_k) \sin \alpha_k x \\
 &\times \left[ \alpha_k b \frac{\operatorname{sh} \alpha_k (b-y)}{\operatorname{sh}^2 \alpha_k b} - \alpha_k (b-y) \frac{\operatorname{ch} \alpha_k y}{\operatorname{sh} \alpha_k b} \right] + \\
 &= \frac{\pi}{b^2} \sum_{k=1}^{\infty} X_k(1-N_k) \sin \beta_k y \\
 &\times \left[ \beta_k a \frac{\operatorname{sh} \beta_k (a-x)}{\operatorname{sh}^2 \beta_k a} - \beta_k (a-x) \frac{\operatorname{ch} \beta_k x}{\operatorname{sh} \beta_k a} \right] \quad (4.1)
 \end{aligned}$$

Аналогичные формулы получим для определения перемещения  $v(x, y)$  и нормального напряжения  $\tau_y(x, y)$  посредством замены в (4.1)

$$X_k \leftrightarrow Y_k, \quad x \leftrightarrow y, \quad a \leftrightarrow b, \quad \alpha_k \leftrightarrow \beta_k, \quad N_k \leftrightarrow M_k, \quad P \leftrightarrow Q \quad (4.2)$$

Эти формулы верны для всех значений  $x$  и  $y$ . Но поскольку некоторые ряды, входящие в выражения перемещений и напряжений, на границе прямоугольника сходятся медленно (условно), улучшим сходимость этих рядов на границе области. Для этого в выражения (4.1) подставим значения неизвестных  $X_n$  и  $Y_n$  из (1.7). После ряда выкладок [4] для контактного напряжения  $\sigma_z(x, y)$  получается следующее выражение:

$$\begin{aligned} \sigma_z\left(a, \frac{b}{2}, z\right) &= \frac{K \cos \frac{\gamma}{2}}{1 - \cos \gamma - \cos^2 \gamma} + \frac{\pi^2}{2b^2} G_1(\pi) \\ &+ \frac{\pi^2}{1 - 2/b^2} \cos \frac{\gamma}{2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \rho X_n Y_n \int_0^{\frac{\gamma}{2}} y_n(\cos \theta) \frac{\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta}{1 - \cos \theta - \cos^2 \theta} \right. \\ &+ \int_0^{\frac{\gamma}{2}} \frac{G_2(\theta) d\theta}{1 - \cos \theta - \cos^2 \theta} - \int_0^{\frac{\gamma}{2}} \frac{G_3(\theta) d\theta}{1 - \cos \theta - \cos^2 \theta} + \frac{b^2}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \rho Y_n (1 - M_n) \cdot \\ &\left. \int_0^{\frac{\gamma}{2}} \frac{|H_{n,1}(\cos \theta) - A_{n,1}(\cos \theta)| \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta}{1 - \cos \theta - \cos^2 \theta} \right\} \quad (0 \leq z \leq z_0) \quad (4.3) \end{aligned}$$

Здесь коэффициент  $K$  при особенности нормального напряжения  $\sigma_z(a, y)$  определяется формулой

$$\begin{aligned} K &= \frac{\pi^2}{1 - 2/b^2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} X_n Y_n (\cos \gamma_n) - G_2(\gamma_n) - G_3(\gamma_n) - 2X_0 - \right. \\ &\left. \frac{b^2}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n Y_n (1 - M_n) L_{n,1}(\cos \gamma_n) \right\} \quad (4.4) \end{aligned}$$

Для определения перемещения  $u(a, y)$  вне штампов получим

$$\begin{aligned} Eu\left(a, \frac{b}{2}, z\right) &= E f_1(z) + \frac{2\pi}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n Y_n}{\rho} (1 - \cos \rho z) + \\ &\frac{1 - 2/b^2}{6} \sin \frac{\gamma}{2} \left\{ \int_0^{\frac{\gamma}{2}} \frac{G_4(\theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta}{1 - \cos \theta - \cos^2 \theta} \right. \\ &\left. + \int_0^{\frac{\gamma}{2}} \frac{G_5(\theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta}{1 - \cos \theta - \cos^2 \theta} - \sum_{n=1}^{\infty} X_n Y_n \int_0^{\frac{\gamma}{2}} \frac{\tau_n(\cos \theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta}{1 - \cos \theta - \cos^2 \theta} \right. \end{aligned}$$

$$\frac{4X_0}{|1 - \cos \gamma_1|} \ln \frac{|1 - \cos \gamma_1| + |\cos \gamma_{11} - \cos \gamma_1|}{|1 - \cos \gamma_{11}|} + \frac{b^2}{a^2} \sum_{p=1}^{\infty} Y_p (1 - M_p) (-1)^{p-1} \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \frac{L_{p+1}(\cos \theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}}{| \cos^p \theta - \cos \gamma |} d\theta \quad (4.5)$$

( $\gamma_1 = \gamma, \gamma_2 = \pi$ )

Аналогичные выражения для  $\sigma_y \left( \frac{ax}{\pi}, b \right)$  и  $v \left( \frac{ax}{\pi}, b \right)$  могут быть получены из (4.3) — (4.5) заменой  $\gamma_1 = \pi$  и (4.2).

Имея формулы контактных напряжений, нетрудно получить связи между силами  $P, Q$ , действующими на штампы (фиг. 1) и осадками этих штампов

$$P = \frac{\pi^2}{a^2} Y_0 - \frac{a}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_3 \left( \frac{ax}{\pi} \right) dx$$

$$Q = \frac{\pi^2}{b^2} X_0 - \frac{b}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_3 \left( \frac{bx}{\pi} \right) dx$$

5. Рассмотрим некоторые частные случаи значений параметров.

а)  $a = b, c = d$ . В этом случае  $X_2 = Y_2, X_0 = Y_0$ , и решение задачи сводится к определению неизвестных  $X_1$  из одной бесконечной системы линейных уравнений.

б)  $c = b$ , то есть штамп приложен по всей длине стороны. Из первых уравнений (1.7) с учетом (2.6) получим

$$X_k = \frac{2k}{\pi(1 - N_k)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F_2(\gamma) \operatorname{cosec} k\gamma d\gamma$$

$$\gamma_2 X_1 - \gamma_1 Y_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F_2(\gamma) d\gamma \quad (5.1)$$

и решение сводится к определению  $Y_1$  из второго уравнения (1.7) с учетом (5.1).

В случае полосы под действием симметричных периодических штампов  $F_2(\gamma) = 0$  из (5.1) получим  $X_1 = 0$ . Регулярность оставшейся системы можно улучшить введением нового неизвестного  $Z_k = Y_k k$ . Из второго уравнения (1.7) получается

$$Z_k = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{pa_{kp}^{(1)}}{k} Z_p + \frac{r_k^{(1)}}{k} \quad (5.2)$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} \left| \frac{p}{k} a_{2p}^{(2)} \right| \sim O(k^{-3/2}); \quad \frac{v_2^{(2)}}{k} \sim O(k^{-3/2}) \quad (5.2)$$

в)  $c = 0$ , то есть стороны  $BC$  и  $DA$  свободны от штампов и на них действуют нормальные напряжения.

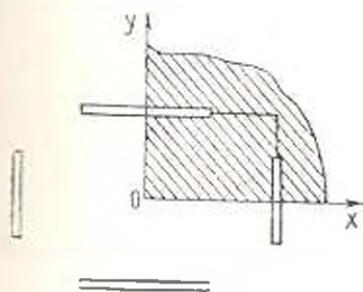
В этом случае первое уравнение бесконечной системы (1.7) и первое равенство (3.3) принимают соответственно вид

$$X_0 = \frac{2b^3k(-1)^1}{\pi a^2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p(-1)^{p-1}(1-M_0)Y_p}{\left| \left( p \frac{b}{a} \right)^2 + k^2 \right|^2} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F_1(\eta) \operatorname{cosh} k \eta d\eta$$

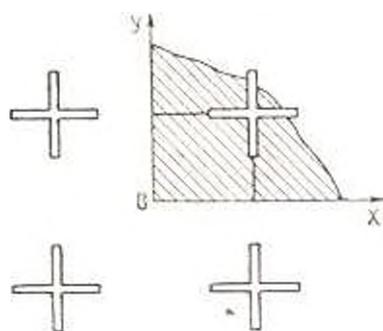
$$X_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F_1(\eta) d\eta \quad (5.3)$$

Полученная здесь система для данного случая ((5.3) и второе уравнение (1.7)) также квазиволне регуляриза. При этом нетрудно получить решение рассматриваемой задачи в случаях  $a \rightarrow \infty$  или  $b \rightarrow \infty$ .

г)  $c = d = 0$ , то есть по всему контуру заданы напряжения. В этом случае решение приводится к определению неизвестных коэффициентов из вполне регуляризованной бесконечной системы [1].



Фиг. 2



Фиг. 3.

Отметим, наконец, что задача, рассмотренная в работе [4], при  $f_2(y) = f_1(x) = 0$  соответствует плоской задаче для неограниченной плоскости с двоякопериодическими прямолинейными разрезами (фиг. 2), а рассмотренная здесь задача при  $f_2(y) = f_1(x) = 0$  соответствует уже плоской задаче теории упругости для бесконечной плоскости, ослабленной двоякопериодическими крестообразными разрезами (фиг. 3).

Аналогично может быть рассмотрена задача в том случае, когда между штампами и материалом прямоугольника существует кулоновское трение или жесткое сцепление.

Институт математики и механики  
АН Армянской ССР

Получена 15 IV 1971

Ա. Ա. ԲԱԲԼՅԱՆ, Ա. Մ. ՄՔՐՏՉԻԱՆ

## ՄԻՋՊԱՆՈՅՑԱՆ ԶԱՐԿՐ ՄԻ ԵԱՐՔԱԿԱՆ ԿԱՐԿՐ ՄԱՍԻՆ

Ս. Մ. Փ. Ս. Փ. Ս. Փ.

Իրադրվում է առանձգականության տեսության շարժ խնդիրը ուղղանկյան ճամար, երբ ուղղանկյան բոլոր կողմերի վրա կիրառվեն պայմաններ տրված են խառը ձևով: Էնդրանվում է, որ տրտարին չորսափող շարժումները բացակայում են և ուղղանկյունը սեղմվում է կողմերի կենտրոններում գրգռված բուցարձակ կոչա գրոշմների միջոցով, որոնց կողմերի կրկարությունները տարբեր են: Ենթադրվում է նաև, որ կա սրմանոթիաչի երկու առանցք:

Խնդիրը լուծվում է ձուրչի մեթոդով: Շարքերի գործակիցների սրոչման ճամար սկզբում ստացվում են եռանկյունաչափական գոյու ճափասարումներ, ափսոհան՝ ճամբա ճափական անվերջ սխտեմներ: Տուչց է տրվում այլ սխտեմների բխալի-լիտիկ սեղուչարությունը: Ստացվում են բանաձևեր անգուփախումների և կոնտակտաչի շարժումների ճափման ճամար:

Իրադրվում են մասնավոր դեպքեր պարամետրերի սահմանաչին սրմանների և սրոչ կիրառվին պայմանների ճամար:

## A MIXED PROBLEM FOR A RECTANGULAR REGION

A. A. BABLOYAN, A. M. MKRTCHIAN

### S u m m a r y

A plane problem for a rectangular region is solved where on all its areas the boundary conditions are given in a mixed form.

The tangent strains along the contour are assumed to be absent and the rectangle to be pressed on all its sides with rigid punches symmetrically spaced at its centres. The length of the punches applied on opposite sides is the same while that acting on the neighbouring ones is different.

The problem is reduced to a system of dual trigonometrical equations, and then to a quasiregular infinite system of linear algebraic equations.

Some particular cases for the limit values of parameters and for different boundary conditions are considered.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамян Б. А. К плоской задаче теории упругости для прямоугольника ПММ, т. XXI, вып. 1, 1957.
2. Абрамян Б. А., Манукян М. М. Решение плоской задачи теории упругости для прямоугольника в перемещениях. Докл. АН Арм. ССР, т. XXV, № 4, 1957, 177—184.
3. Баблоян А. А., Мушкоян А. П. Об одной смешанной задаче плоской теории упругости. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XXIII, № 5, 1970.
4. Баблоян А. А., Гулякин П. О. Об одной смешанной задаче для прямоугольника. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XXII, № 1, 1969.
5. Баблоян А. А. Решение некоторых вариал уравнений, встречающихся в задачах теории упругости. ПММ, т. XXXI, вып. 2, № 4, 1967.
6. Говсон Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. ИЛ, М., 1952.