ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXIV, № 4, 1971 Механика

А. Р. ГУЛКАНЯН

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ОБДЕЛОК ТОННЕЛЯ КРУГЛОГО СЕЧЕНИЯ С УЧЕТОМ ПОЛЗУЧЕСТИ ГОРНЫХ ПОРОД

Изменение во времени напряженного состояния обделок подземных сооружений является следствием проявления свойств ползучести горных пород [4].

Исследование развития во времени напряженного состояния несущих обделок подземных сооружений в условиях ползучести горных пород нами проводится на моделях поляризационно-оптическим методом.

Деформирование однородного упруго-ползучего изотропного горного массива хорошо описывается уравнением Больцмана-Вольтерра линейной теории наследственности [4]

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E}\left[\sigma(t) + \int_0^t L(t, \tau)\, \sigma(\tau)\, d\tau\right] \tag{1}$$

где $\varepsilon(t)$ и $\sigma(t)$ — соответственно относительная деформация и напряжение в момент времени t, отсчитываемый от начала нагружения; E — мгновенный модуль упругости.

Для описания кривых ползучести применяется двучленное экспоненциальное ядро вида [2. 5]

$$L(t, \tau) = \delta_1 \exp[-\beta_1(t-\tau)] + \delta_2 \exp[-\beta_2(t-\tau)] \tag{2}$$

где δ_1, δ_2, β_1, β_2 — постоянные коэффициенты.

Задача о напряженном состоянии обделок рассматривается в работе [3], когда взаимодействие обделки с окружающим массивом обусловлено только ползучестью горных пород.

Для обеспечения подобия напряженно-деформированного состояния модели и натуры необходимо выполнять ряд условий (критериев подобия), позволяющих решать задачу методами физического моделирования.

Ранее, с помощью метода анализа размерности, а также теории подобия, нами [3] были получены критерии подобия для суммы экспоненциальных ядер. Для двучленного экспоненциального ядра вида (2) эти условия можно представить в виде

$$(\nu_{об})_м = (\nu_{об})_н \tag{3}$$

$$(\nu_{мас})_м = (\nu_{мас})_н \tag{4}$$

$$\left(\frac{E_{об}}{E_{мас}}\right)_м = \left(\frac{E_{об}}{E_{мас}}\right)_н \tag{5}$$

$$\left(\frac{P}{\sigma l^2}\right)_м = \left(\frac{P}{\sigma l^2}\right)_н \tag{6}$$

$$(\beta t)_м = (\beta t)_н \tag{7}$$

$$\left(\frac{\theta_i}{\beta_i}\right)_м = \left(\frac{\theta_i}{\beta_i}\right)_н \quad i = 1, 2, \tag{8}$$

$$\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)_м = \left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)_н \tag{9}$$

Здесь l — геометрический размер, *см*; P — нагрузка, *кГ*; $E_{об}$ и $E_{мас}$ — модули упругости, соответственно обделки и породы массива, *кГ/см*^{2}; $\nu_{об}$ и $\nu_{мас}$ — коэффициенты Пуассона, соответственно обделки и массива; t — время, *мин*; θ_1, θ_2 — постоянные коэффициенты, *мин*$^{-1}$; β_1, β_2 — параметры ползучести, *мин*$^{-1}$.

При $\theta_i = A_i \beta_i E_{мас}$ ($i = 1, 2$) появляются дополнительные критерии подобия, которые определяются из условия (7) — (9):

$$\left(\frac{A_1}{A_2}\right)_м = \left(\frac{A_1}{A_2}\right)_н \tag{10}$$

$$(A_1 E_{мас})_м = (A_1 E_{мас})_н \tag{11}$$

где A_1 и A_2 — постоянные коэффициенты, *см*^{2}/*кГ*.

Сходственные моменты времени определяются из условия (7) при обязательном соблюдении критериев (8) и (9):

$$t_н = \frac{\beta_м}{\beta_н} t_м \tag{12}$$

Связь между напряжениями в натуре и модели в сходственные моменты времени определяется из условия (6):

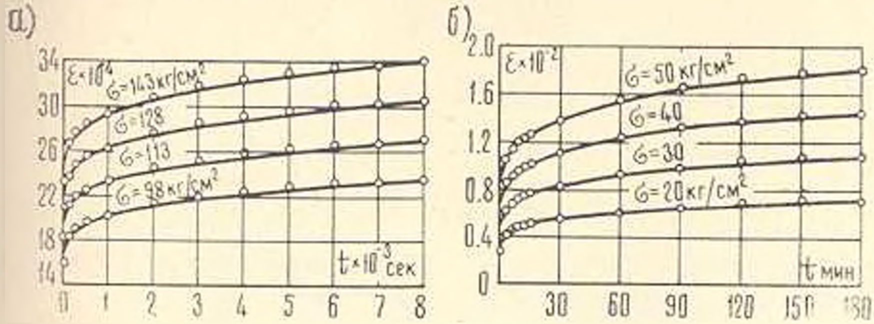
$$\sigma_н = \frac{P_н l_м^2}{P_м l_н^2} \sigma_м \tag{13}$$

1. В качестве примера рассмотрим задачу о напряженном состоянии упругой обделки круглого сечения при проходке тоннеля в горном массиве (алевролит) в условиях его ползучести.

Кривые ползучести (фиг. 1а) алевролита [4] хорошо аппроксимируются уравнением (1) линейной теории наследственности с ядром вида (2)

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E_{\text{мас}}} + \int\limits_0^t \{A_1\beta_1 \exp[-\beta_1(t-\tau)] + A_2\beta_2 \exp[-\beta_2(t-\tau)]\}\, \sigma(\tau)\, d\tau \tag{14}$$

Кривые ползучести материала модели (фиг. 1б) также аппроксимированы выражением (14).



Фиг. 1. Кривые ползучести алевролита (а) и материалы модели (б).

Приведенные в табл. 1 значения постоянных $E_{\text{м.с}}$, A_1, A_2, β_1, β_2 для материалов натуры и модели определены на ЭВМ БЭСМ-6 методом наименьших квадратов.

Таблица 1

Параметр	Материал	
	модель	алевролит
$E_{\text{м.с}}$, *кГ/см*^{2}	7500	$0.62 \cdot 10^5$
A_1, *см*^{2}/*кГ*	$0.84306 \cdot 10^{-4}$	0.028774
A_2, *см*^{2}/*кГ*	$1.49568 \cdot 10^{-4}$	0.051048
β_1, *мин*$^{-1}$	0.5245625	0.6540
β_2, *мин*$^{-1}$	0.0154	0.0192

На фиг. 1 точками показаны величины деформаций ползучести для различных моментов времени, полученные по формуле (14).

Исследования проводились на плоских моделях под действием внешних сил, моделирующих силы собственного веса вышележащей породы и бокового распора. В качестве материала, моделирующего ползучесть породы массива, применяли эпоксидную смолу, отвержденную тиоколом. Обделки изготовляли из упругого оптически-чувствительного материала ЭД-6М. Напряжения в них определены обычными методами фотоупругости [9].

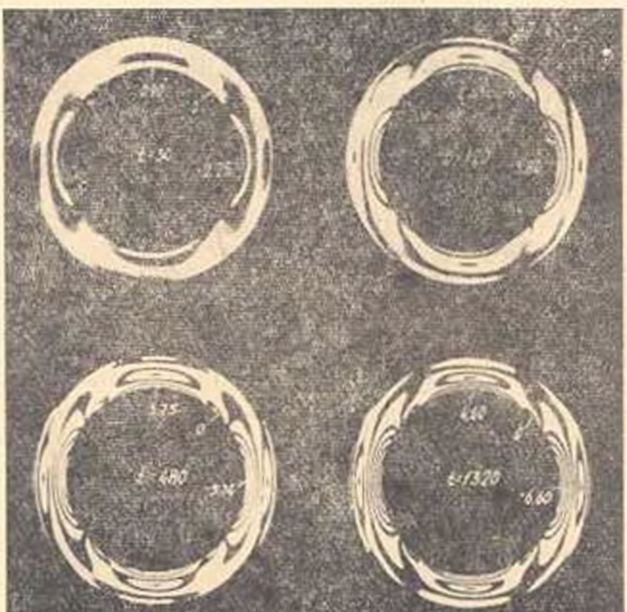
Для того, чтобы мгновенная упругая деформация массива не передавалась на крепь, последнюю вклеивали в нагруженную модель ($\sigma_{\text{об}}|_{t=0} = 0$).

Учитывая, что горная порода и материал модели обладают свойством линейной ползучести, в экспериментах был использован принцип наложения. Для круглой обделки была исследована одна модель, которую загружали равномерно распределенной нагрузкой $p = -\gamma H$, соответствующей вертикальному давлению, а напряженное состояние, соответствующее нагрузке $q = -\lambda\gamma H$, ввиду симметрии обделки, легко определяется из предыдущего эксперимента (γ — объемный вес, H — глубина заложения выработки, $\lambda = \frac{\nu}{1-\nu}$ — коэффициент бокового распора, ν — коэффициент Пуассона модели).

Если результаты исследования по модели представить в виде коэффициентов концентрации напряжений $K_1 = \frac{\sigma_\theta^{(1)}}{p}$ и $K_2 = \frac{\sigma_\theta^{(2)}}{q}$, то искомые напряжения в модели для произвольной точки j определяются через эти коэффициенты по следующей формуле:

$$\sigma_\theta^{(j)} = K_1^{(j)} (\gamma H)_{мод} + K_2 \frac{\nu_{мод}}{1-\nu_{мод}} (\gamma H)_{мод} \tag{15}$$

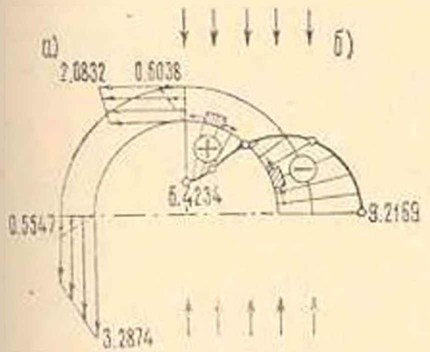
На фиг. 2 показаны примеры характерных картин полос, изменяющихся во времени.



Фиг. 2. Картина полос для различных моментов времени в круглой обделке при действии вертикальной нагрузки.

При действии вертикальной нагрузки на внутреннем контуре обделки в своде и подошве возникают растягивающие тангенциальные напряжения σ_θ (фиг. 3б), а боковые стенки сжаты. Горизонтальная нагрузка вызывает растяжение внутренних волокон, сжатие свода и подошвы обделки.

Нормальные и тангенциальные напряжения на контакте „обделка—массив“ при совместном действии вертикальной и горизонтальной нагрузок, при $\lambda = 0.923$, всюду сжимающие, и по толщине обделки распределяются практически по линейному закону (фиг. 4а, 3а).



Фиг. 3. Эпюры коэффициентов концентрации напряжений в обделке ($R/R_1 = 1.3793$; $E_{об}/E_{мас} = 1$; $\lambda = 0.923$; $t_0 = 1320$ *мин*). а) — $\sigma_\theta/\gamma H$; ---- — $\sigma_r/\gamma H$ — при одновременном действии вертикальной и горизонтальной нагрузок; б) — $\sigma_\theta/\gamma H$ — на внутреннем контуре обделки и при действии вертикальной нагрузки

Фиг. 4. Эпюры коэффициентов концентрации напряжений в обделке при действии вертикальной и горизонтальной нагрузок ($R/R_1 = 1.3793$; $E_{об}/E_{мас} = 1$; $\lambda = 0.923$; $t_0 = 1320$ *мин*). а) — $\sigma_r/\gamma H$ и — $\tau_{r\theta}/\gamma H$ — на контакте „обделка-массив“; б) — $\sigma_\theta/\gamma H$ — по внутреннему контуру обделки —о— $\sigma_\theta/\gamma H$; —о— $\tau/\gamma H$; — эксперимент; ---- теоретическое решение.

На фиг. 5 приведены графики изменения нормальных напряжений во времени для характерных точек на контакте „обделка—массив“. Из рисунка видно, что в начальном участке времени характерно нарастание напряжений (давление на обделку) с большой скоростью. Далее скорость затухает и примерно через 480 *мин* давление на обделку в модели стабилизируется.

В табл. 2 и 3 приведены значения тангенциальных $\frac{\tau_\theta}{\gamma H}$ и нормальных $\frac{\sigma_r}{\gamma H}$ напряжений на внутреннем контуре обделки и на контакте „обделка—массив“ в характерных точках для двухосного напряженного состояния.

Таблица 2

$\sigma_\theta/\gamma H$									
0		30°		45°		60°		90°	
R_1	R	R_1	R	R_1	R	R_1	R	R_1	R
3.2871	1.7468	2.9841	1.8548	2.5853	1.9628	2.3823	2.0708	2.0832	2.1788

Таблица 3

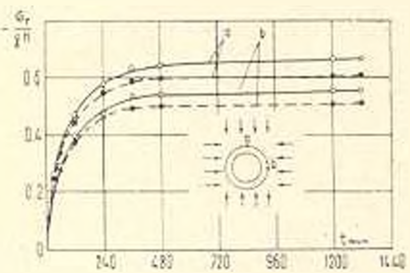
$-\sigma_r/\gamma H$				
0°	30°	45°	60°	90°
R	R	R	R	R
0,5547	0,5820	0,6093	0,6364	0,6638

2. Для проверки предложенной методики рассмотренная задача решалась также теоретически. Предполагалось, что обделка включается в работу в условиях сцепления с массивом (фиг. 6) с граничными условиями на бесконечности соответственно

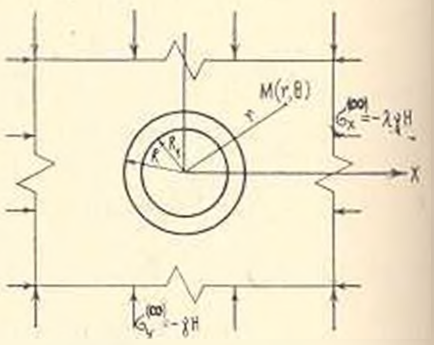
$$\sigma_x^{(\infty)} = -\lambda\gamma H, \quad \sigma_y^{(\infty)} = -\gamma H, \quad \tau_{xy}^{(\infty)} = 0 \tag{16}$$

и на контакте „обделка—массив"

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r^{об} &= 0 \\ \tau_{r\theta}^{об} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ при } r = R_1, \qquad \left.\begin{aligned} \sigma_r^{об} &= \sigma_r^{мас} \\ \tau_{r\theta}^{об} &= \tau_{r\theta}^{мас} \\ v_r^{об} &= v_r^{мас} \\ v_\theta^{об} &= v_\theta^{мас} \end{aligned}\right\} \text{ при } r = R \tag{17}$$



Фиг. 5. Графики изменения нормальных напряжений во времени для характерных точек обделки на контакте „обделка-массив" при одновременном действии вертикальной и горизонтальной нагрузок ($R/R_1 = 1{,}3793$; $E_{об}/E_{мас} = 4$, $\lambda = 0{,}923$; $t_0 = 1320$ мин). —— эксперимент, - - - теоретическое решение



Фиг. 6. Расчетная схема обделки

Компоненты напряжений в обделке ($R_1 \leqslant r \leqslant R$) согласно [8] примем в виде

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{\gamma H}{2}\left[\left(a_1 - \frac{b_{-1}}{2}\frac{R^2}{r^2}\right) + \left(\frac{b_1}{2} - 2a_{-1}\frac{R^2}{r^2} - \frac{3}{2}b_{-3}\frac{R^4}{r^4}\right)\cos 2\theta\right] \\ \sigma_\theta &= -\frac{\gamma H}{2}\left[\left(a_1 + \frac{b_{-1}}{2}\frac{R^2}{r^2}\right) - \left(\frac{b_1}{2} - 6a_3\frac{r^2}{R^2} - \frac{3}{2}b_{-3}\frac{R^4}{r^4}\right)\cos 2\theta\right] \end{aligned} \tag{18}$$

Здесь коэффициенты приняты зависящими от времени, а расчетные формулы для них приведены в работе [1].

Для определения механических характеристик упруго-ползучей среды G_t и $\varkappa_t$, входящих в коэффициенты уравнений (18), воспользуемся их операторным представлением [6]:

$$G_t = \frac{\bar{E}}{2(1+\bar{\nu})}, \qquad \varkappa_t = 3 - 4\bar{\nu} \tag{19}$$

Здесь

$$\bar{E} = E(1 - \Gamma^*) \tag{20}$$

Из условия постоянства оператора объемного сжатия легко находим

$$\bar{\nu} = \nu\left(1 + \frac{1-2\nu}{2\nu}\Gamma^*\right) \tag{21}$$

где Γ^* — оператор резольвенты ядра ползучести (2). Преобразуем выражение $\dfrac{1}{2(1+\bar{\nu})}$:

$$\frac{1}{2(1+\bar{\nu})} = \frac{1}{2(1+\nu)}\,\frac{1}{1+\dfrac{1-2\nu}{2(1+\nu)}\Gamma^*} = \frac{1}{2(1+\nu)}(1 - R^*) \tag{22}$$

где R^* — оператор, имеющий своим ядром резольвенту ядра оператора $\dfrac{1-2\nu}{2(1+\nu)}\Gamma^*$.

Подставляя (20), (21) и (22) в (19), получим

$$\begin{aligned} G_t &= G[1 - \Gamma^* - R^* + \Gamma^* R^*] \\ \varkappa_t &= 3 - 4\nu\left(1 + \frac{1-2\nu}{2\nu}\Gamma^*\right) \end{aligned} \tag{23}$$

Для нахождения операторов Γ^* и R^* необходимо найти решения соответствующих им интегральных уравнений.

Воспользуемся методом интегральных преобразований Лапласа, который по существу при постоянных граничных условиях эквивалентен операторному методу Работнова [6].

Напишем ядро ползучести (2) в следующем виде:

$$L(t') = \delta_1 e^{-\beta_1 t'} + \delta_2 e^{-\beta_2 t'}, \quad t' = t - \tau \tag{24}$$

Образ ядра ползучести (24) будет

$$L^*(s) = \frac{\delta_1}{s+\beta_1} + \frac{\delta_2}{s+\beta_2} \tag{25}$$

Используя формулу (7)

$$\Gamma^*(s) = \frac{L^*(s)}{1 + L^*(s)} \tag{26}$$

найдем образ оператора Γ^* в следующем виде:

$$\Gamma^*(s) = \theta \frac{s + \dfrac{b}{\theta}}{(s - s_1)(s - s_2)} \tag{27}$$

где

$$\theta = \theta_1 + \theta_2, \quad b = \theta_1 \beta_2 + \theta_2 \beta_1, \quad s_1 = -a + d, \quad s_2 = -a - d$$

$$a = \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2 + \theta), \quad d = \sqrt{a^2 - e}, \quad e = \beta_1 \beta_2 + b$$

Имея образ (27), легко находим его оригинал:

$$\Gamma(t') = \theta (A e^{s_1 t'} + B e^{s_2 t'}), \tag{28}$$

где

$$A = \frac{s_1 + \dfrac{b}{\theta}}{2d}, \quad B = \frac{s_2 + \dfrac{b}{\theta}}{-2d}$$

Уравнение (29) не что иное, как ядро наследственности, соответствующее оператору Γ^*, который в свою очередь при действующей на тело постоянной нагрузке находится по следующей формуле:

$$\Gamma^* 1 = \int_0^t \Gamma(t')\, 1\, dt' \tag{29}$$

Выполняя интегрирование, получим

$$\Gamma^* 1 = \theta \Big| A \frac{1}{s_1} (e^{s_1 t} - 1) + B \frac{1}{s_2} (e^{s_2 t} - 1) \Big| \tag{30}$$

Аналогичным образом находим

$$R^* 1 = \frac{1 - 2\nu}{2(1 + \nu)} \theta \Big| M \frac{1}{\lambda_1} (e^{\lambda_1 t} - 1) + K \frac{1}{\lambda_2} (e^{\lambda_2 t} - 1) \Big| \tag{31}$$

где

$$M = \frac{\lambda_1 + N}{2n}, \quad K = \frac{\lambda_2 + N}{-2n}, \quad \lambda_1 = -l + n, \quad \lambda_2 = -l - n,$$

$$l = \frac{1}{2}\left(-s_1 - s_3 + \frac{1-2\nu}{2(1+\nu)} q\right), \qquad n = \sqrt{F - m}$$

$$m = s_1 s_3 + \frac{1-2\nu}{2(1+\nu)} N.$$

Отметим, что входящие в уравнения (30) и (31) постоянные s_1, s_3, l_1, l_2 меньше нуля.

Имея формулы (30) и (31) и подставляя их значения в формулу (23), можем найти значения G_t и $\varkappa_t$ для любого момента времени.

Перейдем к решению примера с исходными данными, соответствующими исследованной модели: радиус тоннеля в свету — $R_1 = 0.58$ *см*, толщина упругой обделки — 0.22 *см*; $R = 0.58 + 0.22 = 0.80$ *см*, $n = \frac{R}{R_1} = 1.3793$. Для упругой обделки: $E_{об} = 30\,000$ *кГ/см*², $\nu_{об} = 0.33$, $G_{об} = \frac{E_{об}}{2(1+\nu_{об})} = 11278$ *кГ/см*², $\varkappa_{об} = 3 - 4\nu_{об} = 1.68$. Для упруго-ползучего материала, согласно экспериментальным данным: $A_1 = 0.84306 \cdot 10^4$ *см*²/*кГ*, $A_2 = 1.49568 \cdot 10^{-1}$ *см*²/*кГ*, $\gamma_1 = 0.52456$ *мин*$^{-1}$, $\beta_2 = 0.0154$ *мин*$^{-1}$, $E_{мас} = 7500$ *кГ/см*², $\nu = 0.18$ ($\iota = 0.923$).

Значения операторов (19) и коэффициентов, входящих в уравнение (18), для момента времени $t_0 = 1320$ *мин* приведены в табл. 4.

Таблица 4

t	G_t	$\varkappa_t$	b_{-1}	a_1	b_{-3}	a_{-1}	b_1	a_3
1320	883	1.03	2.4550	2.3353	0.2036	−0.4104	−1.3491	−0.2278

Подставляя значения коэффициентов в уравнения (18), найдем тангенциальные и нормальные напряжения в обделке и на контакте „обделка—массив" (табл. 5 и 6).

Таблица 5

	$-\sigma_\theta/\gamma H$				
r \ θ	0	30	45	60	90
R_1	2.8661	2.6007	2.3353	2.0699	1.8045
$R_1 + \frac{R-R_1}{3}$	2.3148	2.2018	2.0888	1.9758	1.8628
$R_1 + \frac{2(R-R_1)}{3}$	1.9127	1.9139	1.9130	1.9131	1.9133
R	1.5880	1.6847	1.7844	1.8781	1.9748

Таблица 6

r \ θ	$-\sigma_r/\gamma H$				
	0°	30°	45°	60°	90°
R_1	0	0	0	0	0
$R_1+\frac{R-R_1}{3}$	0.2262	0.2363	0.2465	0.2566	0.2668
$R_1+\frac{2(R-R_1)}{3}$	0.3946	0.4084	0.4223	0.4362	0.4500
R	0.5043	0.5291	0.5539	0.5787	0.6035

Сопоставление результатов теоретического расчета с экспериментальными данными показывает их хорошее соответствие (фиг. 3, 5). Максимальное отличие напряжений наблюдается на внутреннем контуре обделки для $-\sigma_r/\gamma H$ и не превышает 13%. На контакте „обделка—массив" оба решения для нормальных и тангенциальных напряжений дают практически одинаковые результаты (фиг. 3).

Московский инженерно-строительный
институт им. В. В. Куйбышева

Поступила 8 II 1971

Ա. Ռ. ԳՈՒԼՔԱՆՅԱՆ

ԿԼՈՐ ԿՏՐՎԱԾՔ ՈՒՆԵՑՈՂ ԹՈՒՆԵԼԻ ՇՐՋԱՆԱԿԻ ԼԱՐՎԱԾԱՅԻՆ ՎԻՃԱԿԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒԹՅՈՒՆԸ ԼԵՌՆԱՅԻՆ ԱՊԱՐՆԵՐԻ ՍՈՂՔԻ ՀԱՇՎԱՌՈՒՄՈՎ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Աշխատանքում ստացված են նմանության անհրաժեշտ չափանիշներ, նմանության պայմաններին համապատասխանող նոր օպտիկա-ակտիվ առաձգա-սողքային նյութեր, մշակված է մեթոդիկա և որպես օրինակ օպտիկա-բևեռային մի մեթոդով ուսումնասիրված է կլոր կտրվածք ունեցող շրջանակի լարվածային վիճակը: Քննարկված խնդիրը լուծված է նաև տեսականորեն, որտեղ գտնված են առաձգա-սողքային միջավայրի G_1 և η_1 մեխանիկական բնութագրերի հաշվարկային բանաձևեր՝ ժառանգականության գծային տեսության Բոլցման-Վոլտերի ինտեգրալ հավասարման երկանդամ էքսպոնենտային միջուկի համար: Երկու լուծումների արդյունքների համադրումը ցույց է տալիս նրանց լավ համապատասխանությունը:

STUDY ON STRESSED STATE OF CIRCULAR CROSS-SECTION TUNNEL FACING WITH REGARD TO THE CREEP OF ROCKS

A. R. GULKANIAN

S u m m a r y

Necessary criteria of similarity, new optical-sensitive elastic-creepy materials which meet the requirements of similarity are obtained; the appropriate method is developed and a problem on the stressed state of circular cross-section tunnel facing is studied as an example by the optical-polarization method. The above problem is also solved theoretically and the calculation formulas for mechanical characteristics of elastic-creepy medium G_t and $\varkappa_t$ for the chosen two-membered exponential core of the Boltzman-Volterra integral equation of the linear heredity theory are found. The comparison of the results of both solutions shows their good correlation.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Айталиев Ш. М.* Исследование работы обделки напорного тоннеля кругового очертания под действием неустановившегося горного давления. В кн.: „Реологические вопросы механики горных пород". Изд-во АН КазССР, 1964.
2. *Вайсман А. М., Кунин И. А., Тапицын К. К.* Воздействие горного давления на вертикальную выработку в условиях ползучести горных пород. „Вопросы горного давления", Изд-во СО АН СССР, вып. 13, 1962.
3. *Дмоховский А. В., Варданян Г. С., Гулканян А. Р.* Моделирование напряженного состояния подземных сооружений с учетом ползучести горных пород. Сб. Трудов МИСИ „Моделирование задач динамики, термоупругости и статики поляризационно-оптическим методом". М., № 73, 1970.
4. *Ержанов Ж. С.* Теория ползучести горных пород и ее приложения. Изд. „Наука", Алма-Ата, 1964.
5. *Месчян С. Р.* Ползучесть глинистых грунтов. Изд. АН АрмССР, Ереван, 1967.
6. *Работнов Ю. Н.* Равновесие упругой среды с последействием. „Прикл. математ. и механ.", т. XII, вып. 1, 1948.
7. *Ржаницын А. Р.* Теория ползучести. Изд-во литературы по строительству, М., 1968.
8. *Савин Г. Н.* Концентрация напряжений около отверстий. ГИТТЛ, М.-Л., 1951.
9. *Фрохт Г. Н.* Фотоупругость, т. I. Гостехиздат, М.-Л., 1948.