

А. С. ХАЧИКЯН

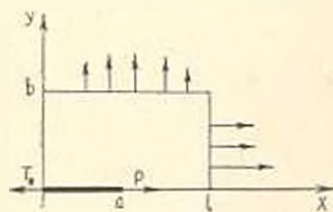
ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНИКА С ТОНКОСТЕННЫМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Рассматривается плоская задача теории упругости для прямоугольника с симметричным тонкостенным включением, подвергнутого действию симметричной внешней нагрузки. Решение этой задачи приводится к квази-полной регулярной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений.

Задачи определения напряженного состояния плоскости и полуплоскости с неограниченными стрингерами впервые были рассмотрены Меланом [1]. В работах [2-8] исследованы различные задачи для неограниченных областей с тонкостенными включениями и накладками конечной или бесконечной длины.

1. Рассмотрим прямоугольник $-l \leq x \leq l$, $-b \leq y \leq b$ с тонкостенным включением длиной $2a$, расположенным на оси абсцисс симметрично относительно начала координат. Пусть включение растягивается приложенными на его концах равными и противоположно направленными силами величиной $2P$ каждая и пусть внешняя нагрузка на кромках прямоугольника симметрична относительно обеих осей координат. Примем, для простоты, что на кромках прямоугольника касательные напряжения равны нулю.

В силу симметрии можно рассматривать только четверть прямоугольника (фиг. 1).



Фиг. 1.

На границе рассматриваемой области, согласно условиям задачи [9], имеем условия

$$\tau_{xy}|_{x=0} = \tau_{xy}|_{x=l} = \tau_{xy}|_{y=b} = u|_{x=0} = v|_{y=0} = 0 \quad (1.1)$$

$$\sigma_{xx}|_{x=l} = f_1(y); \quad f_1(y) = \frac{h_1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos \beta_k y \quad (1.2)$$

$$\tau_{xy}|_{x=a} = f_2(x); \quad f_2(x) = \frac{\alpha_1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos z_k x \quad (1.3)$$

$$\tau_{xy}|_{y=0} = 0 \quad \text{при } a < x < l \quad (1.4)$$

$$Eu' + \beta T = 0 \quad \text{при } 0 < x < a, y = 0 \quad (1.5)$$

где $f_1(y)$ и $f_2(x)$ — заданные функции; σ_{xx} , σ_{yy} , τ_{xy} , u , v — напряжения и перемещения; E , ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала прямоугольника;

$$\beta = \frac{E(1 - \nu_{\text{вл}}^2)}{E_{\text{вл}} h}, \quad z_k = \frac{k\pi}{l}, \quad \beta_k = \frac{k\pi}{b} \quad (1.6)$$

$2h$ — толщина включения; $2T$ — натяжение включения

$$T = P = \int_0^a \tau_{xy} dx \quad (1.7)$$

Напряжения и перемещения выражаются через функцию напряжений Эйри формулами

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad (1.8)$$

$$Eu = \int_0^x \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} dx - \nu \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad Ev = \int_0^y \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} dy - \nu \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

Представим функцию напряжений в виде

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) = & \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \operatorname{ch} z_k y + B_k \operatorname{sh} z_k y + z_k y (C_k \operatorname{ch} z_k y + \\ & D_k \operatorname{sh} z_k y)] \cos z_k x + \sum_{k=1}^{\infty} [E_k \operatorname{ch} \beta_k x + F_k \operatorname{sh} \beta_k x + \\ & + \beta_k x (G_k \operatorname{ch} \beta_k x + H_k \operatorname{sh} \beta_k x)] \cos \beta_k y + l_1 x^2 + l_2 y^2 \end{aligned} \quad (1.9)$$

Удовлетворяя условиям (1.1), получим

$$F_k = G_k = 0, \quad (1 + \nu) B_k = (1 - \nu) C_k$$

$$E_k = -H_k (1 + \beta_k l \operatorname{cth} \beta_k l) \quad (1.10)$$

$$(A_k + D_k) \operatorname{sh} z_k b + (B_k + C_k) \operatorname{ch} z_k b + z_k b (C_k \operatorname{sh} z_k b + D_k \operatorname{ch} z_k b) = 0$$

Условия (1.2) — (1.5) с учетом (1.7), (1.10) и обозначений

$$\alpha = \frac{l}{\pi} \gamma, \quad \alpha_k = \frac{a\pi}{l}, \quad \gamma_k = \frac{l}{b} k \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} \alpha_k (D_k \operatorname{sh} \alpha_k b - C_k \operatorname{ch} \alpha_k b) &= i \sqrt{\alpha_k} X_k \\ -\frac{b}{i} \beta_l H_l \operatorname{sh} \beta_l l &= i \sqrt{\beta_l} Y_l, \quad \alpha_k^2 C_k = Z_k \end{aligned} \quad (1.12)$$

приводят к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} i \sqrt{\beta_l} Y_l \left(\operatorname{cth} \beta_l l + \frac{\beta_l l}{\operatorname{sh}^2 \beta_l l} \right) &= b_l - \frac{4}{b} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p \alpha_p}{\alpha_p^2 + \beta_l^2} \left[\frac{i \sqrt{\alpha_p} X_p \beta_l (-1)^{p+1}}{\alpha_p^2 + \beta_l^2} + \right. \\ &\quad \left. + Z_p \alpha_p^{-1} \left| \frac{1}{1+\nu} - \frac{\beta_l^2}{\alpha_p^2 - \beta_l^2} \right| \right] \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} i \sqrt{\alpha_k} X_k \left(\operatorname{cth} \alpha_k b - \frac{\alpha_k b}{\operatorname{sh}^2 \alpha_k b} \right) &+ \frac{Z_k}{\alpha_k^2} \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{1}{\operatorname{sh} \alpha_k b} - \frac{\alpha_k b \operatorname{ch} \alpha_k b}{\operatorname{sh}^2 \alpha_k b} \right) = \\ &= a_l - \frac{4 \beta_l^2 (-1)^l}{b} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p \beta_l l}{(\beta_p^2 + \beta_l^2)^2} \sqrt{\beta_p} Y_p \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$r_2 = \frac{b_0}{4}, \quad t_1 = \frac{a_0}{4} \quad (1.15)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} Z_k \alpha_k^{-1} \sin k \gamma = 0 \quad \text{при } 0 < \gamma < \pi \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} Z_k \alpha_k^{-1} \cos k \gamma &= \frac{1}{3-\nu} \sum_{p=1}^{\infty} \left[\frac{i \sqrt{\alpha_p} X_p}{\operatorname{sh} \alpha_p b} \left| 1-\nu - (1+\nu) \alpha_p b \operatorname{cth} \alpha_p b \right| + \right. \\ &\quad \left. - \frac{Z_p}{\alpha_p^2} \left| \frac{(1+\nu) \alpha_p b}{\operatorname{sh}^2 \alpha_p b} - (3-\nu) (1 - \operatorname{cth} \alpha_p b) - \frac{2\beta_p^2}{1+\nu} \frac{1}{\alpha_p} \right| \right] \cos k \gamma + \\ &\quad - \frac{l}{b(3-\nu)} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{i \sqrt{\beta_l} Y_l}{\operatorname{sh} \beta_l l} \left[(1-\nu) \operatorname{ch} \alpha_l \gamma + (1+\nu) \beta_l l \operatorname{cth} \beta_l l \operatorname{ch} \alpha_l \gamma - \right. \\ &\quad \left. - (1-\nu) \alpha_l \gamma \operatorname{sh} \alpha_l \gamma \right] + \frac{2\beta_p^2}{(1-\nu)(3-\nu)} \sum_{l=1}^{\infty} Z_l \alpha_l^{-1} \cos \alpha_l a + \\ &\quad + \frac{2t_1 - 2at_1 + \beta p}{3-\nu} \quad \text{при } 0 < \gamma < \pi \end{aligned} \quad (1.17)$$

Используя решение парных рядов-уравнений, данное А. А. Блб-
допом и [10], из (1.16)–(1.17) для неизвестных коэффициентов Z_k
получим

$$Z_k = \frac{k \alpha_k^{\frac{1}{2}}}{2(3-\nu)} \sum_{p=1}^{\infty} \left[\frac{i \sqrt{\alpha_p} X_p}{\operatorname{sh} \alpha_p b} \left| 1-\nu - (1+\nu) \alpha_p b \operatorname{cth} \alpha_p b \right| + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{Z_p}{1 - \nu} \left[\frac{(1 + \nu) z_p b}{\operatorname{sh}^2 z_p b} - (3 - \nu) (\operatorname{cth} z_p b - 1) - \frac{2\beta}{1 + \nu} \frac{1}{z_p} \right] J_{kp} + \\
& + \frac{b^2 k}{2(3 - \nu)} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{\beta_p l}{2}} \left[(1 - \nu + (1 + \nu) \beta_p \operatorname{cth} \frac{\beta_p l}{2}) J_{kp} - (1 + \nu) \gamma_k K_{kp} \right] \\
& + \frac{k^2}{2(3 - \nu)} \left[\frac{4\beta}{1 - \nu} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{Z_p}{z_p} \cos z_p a + 4(l_2 - \nu l_1) + 2\beta P \right] I_k \quad (1.18)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
J_{kp} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} y_k(\cos \theta) y_p(\cos \theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta \\
J_{kp} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} y_k(\cos \theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{ch} \gamma_k \tau \cos \frac{\tau}{2} d\tau}{(\cos \tau - \cos \theta)^{1/2}} \\
K_{kp} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} y_k(\cos \theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sh} \gamma_k \tau \cos \frac{\tau}{2} d\tau}{(\cos \tau - \cos \theta)^{1/2}} \\
I_k &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} y_k(\cos \theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta \\
y_1(\cos \theta) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos k\tau \cos \frac{\tau}{2} d\tau}{(\cos \tau - \cos \theta)^{1/2}} \quad (1.19)
\end{aligned}$$

Все искомые коэффициенты могут быть определены решением бесконечных систем (1.13)–(1.15) и (1.18).

2. Докажем, что бесконечные системы (1.13)–(1.15) и (1.18) квази-полне регулярны. Для этого достаточно воспользоваться следующими оценками:

$$\begin{aligned}
\frac{4k |k| l |b^2|}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p \sqrt{p}}{(p^2 b^2 + k^2 l^2)^2} &= \frac{1}{12} + O\left(\frac{1}{k}\right) \\
b^2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p}{p^4 (b^2 p^2 + k^2 l^2)} &= O(k^{-1}) \quad (2.1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k^{-1} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{sh} \tau_p b} I_{kp} &= O(k^{-1}), & k^{-1} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{I_{kp}}{p^1} &= O\left(\frac{\ln k}{k^1}\right) \\
k^{-1} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{J_{kp}}{\operatorname{sh} \beta_p l} &= O(k^{-1}), & k^{-1} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{K_{kp}}{\operatorname{sh} \beta_p l} &= O(k^{-1}) \\
k^{-1} \sum_{p=1}^{\infty} p^{-1} I_2 \cos \tau_p a &= O(k^{-1}), & I_2 &= O(2k^{-1}) \quad (2.2)
\end{aligned}$$

Свободные члены систем (1.13)–(1.15) и (1.18) при обычных предположениях относительно заданных функций $f_1(y)$, $f_2(x)$ вследствие (2.2) ограничены и при больших k убывают не медленнее, чем k^{-1} .

При получении оценок (2.1)–(2.2) были использованы значения интегралов I_{kp} , J_{kp} , K_{kp} , I_2 , асимптотические разложения функций $y_1(\cos \psi)$, $x_1(\cos \psi)$, $Y_p(\cos \psi)$, $V_p(\cos \psi)$, приведенных в работах [10, 11].

3. В окрестности концов включения напряжения имеют особенность. Приведем выражения для напряжений на линии $y = 0$, содержащие в виде множителя эту особенность

$$\begin{aligned}
\sigma_{xy} \Big|_{y=0} &= \frac{2\sqrt{2}}{1+\nu} \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\cos \frac{\pi}{2} - \cos \tau} \left\{ \frac{1}{2(3-\nu)} \sum_{p=1}^{\infty} M_1 y_p(\cos \tau) + \right. \\
&\quad \left. - \frac{l}{2b(3-\nu)} \sum_{p=1}^{\infty} M_2 Y_p(\cos \tau) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{l(1+\nu)}{2b(3-\nu)} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{Y_p \beta_p}{\operatorname{sh} \beta_p l} V_p(\cos \tau) + M_1 \right\} \\
&\quad + \frac{1}{(1+\nu)(3-\nu)} \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} p M_1 \sum_{k=1}^{\infty} L_1 \sin \tau_k x - \right. \\
&\quad \left. - \frac{l}{b} \sum_{p=1}^{\infty} \tau_p M_2 \sum_{k=1}^{\infty} L_2 \sin \tau_k x + \frac{l(1+\nu)}{b} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{sh} \beta_p l} Y_p \tau_p \sum_{k=1}^{\infty} L_3 \sin \tau_k x \right\} \\
\sigma_{xx} \Big|_{y=0} &= K_2 - \frac{3+\nu}{1+\nu} \left\{ \frac{1}{2(3-\nu)} \sum_{p=1}^{\infty} M_1 \left| y_p(\cos \tau) - p \sum_{k=1}^{\infty} L_1 \cos \tau_k x \right| + \right. \\
&\quad \left. + \frac{l}{2b(3-\nu)} \sum_{p=1}^{\infty} \left| M_2 Y_p(\cos \tau) - M_2 \sum_{k=1}^{\infty} L_2 \cos \tau_k x - \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{(1+\nu) l \sqrt{\beta_p} Y_p}{\operatorname{sh} \beta_p l} \left(V_{\beta_p}(\cos z) - \sum_{k=1}^{\infty} L_k \cos z_k x \right) \Big| + M_2 \Big\} + \\
& + \frac{H(x-a) \sqrt{2} \sin \frac{z}{2}}{1 - \cos z - \cos z_1} \frac{3+\nu}{2(1+\nu)(3-\nu)} \Big| \sum_{p=1}^{\infty} M_1 y_p(\cos z) + \\
& + \frac{l}{b} \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ M_2 Y_{\beta_p}(\cos z) - \frac{(1+\nu) l \sqrt{\beta_p} Y_p}{\operatorname{sh} \beta_p l} V(\cos z) \right\} + M_3 \Big\} \\
\sigma_{yy}|_{y=0} = & N_1 + \frac{1-\nu}{2(1+\nu)(3-\nu)} \left\{ \sum_{p=1}^{\infty} M_1 \left[y_p(\cos z) - p \sum_{k=1}^{\infty} L_k \cos z_k x \right] + \right. \\
& + \frac{l}{b} \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ M_2 \left(Y_{\beta_p}(\cos z) - \sum_{k=1}^{\infty} L_k \cos z_k x \right) - \right. \\
& - \frac{(1-\nu) \gamma_p l \sqrt{\beta_p} Y_p}{\operatorname{sh} \beta_p l} \left(V_{\beta_p}(\cos z) - \sum_{k=1}^{\infty} L_k \cos z_k x \right) \Big\} + 2(3-\nu) M_2 \Big\} + \\
& + \frac{(1-\nu) H(x-a) \sqrt{2} \sin \frac{z}{2}}{2(1+\nu)(\nu-3) \sqrt{1 - \cos z - \cos z_1}} \Big| \sum_{p=1}^{\infty} M_1 y_p(\cos z) + \\
& + \frac{l}{b} \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ M_2 Y_{\beta_p}(\cos z) - \frac{(1+\nu) \gamma_p l \sqrt{\beta_p} Y_p}{\operatorname{sh} \beta_p l} V_{\beta_p}(\cos z) \right\} + 2(3-\nu) M_3 \Big\}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
N_1 = & \frac{l}{b} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{l \sqrt{\beta_k} Y_k}{\operatorname{sh} \beta_k l} [\beta_k x \operatorname{sh} \beta_k x + \operatorname{ch} \beta_k x (1 - \beta_k l \operatorname{cth} \beta_k l)] + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{l \sqrt{z_k} X_k}{\operatorname{sh} z_k b} (1 + z_k b \operatorname{cth} z_k b) + \frac{Z_k}{z_k^4} \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} (\operatorname{cth} z_k b - 1) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{z_k b}{\operatorname{sh}^2 z_k b} \right) \right\} \cos z_k x \\
N_2 = & \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{l \sqrt{z_k} X_k}{\operatorname{sh} z_k b} (1 - z_k b \operatorname{cth} z_k b) - \frac{Z_k}{z_k^4} \left(\frac{3+\nu}{1+\nu} \operatorname{cth} z_k b - \frac{3-\nu}{1-\nu} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{z_k b}{\operatorname{sh}^2 z_k b} \right) \right\} \cos z_k x - \frac{l}{b} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{l \sqrt{\beta_k} Y_k}{\operatorname{sh} \beta_k l} [\beta_k x \operatorname{sh} \beta_k x + \operatorname{ch} \beta_k x (1 - \beta_k l \operatorname{cth} \beta_k l)] + 2l.
\end{aligned}$$

$$N_2 = \frac{1}{2(3-\nu)} \sum_{p=1}^{\infty} M_1 \left| y_p (\cos \alpha) - P \sum_{k=1}^{\infty} L_k \cos \alpha_k x \right| +$$

$$+ \frac{l}{2b(3-\nu)} \sum_{p=1}^{\infty} \left[M_2 Y_{\nu_p} (\cos \alpha) - \nu_p M_2 \sum_{k=1}^{\infty} L_k \cos \alpha_k x - \right.$$

$$\left. - \frac{(1+\nu) \eta_p \sqrt{\beta_p} Y_p}{\operatorname{sh} \beta_p l} \left(V_{\nu_p} (\cos \alpha) - \sum_{k=1}^{\infty} L_k \cos \alpha_k x \right) \right] + M_3$$

$$M_1 = \frac{\sqrt{\alpha_p} X_p}{\operatorname{sh} \alpha_p b} [1 - \nu - (1 + \nu) \alpha_p b \operatorname{cth} \alpha_p b] +$$

$$+ \frac{Z_p}{\alpha_p^{1.5}} \left| \frac{(1+\nu) \alpha_p b}{\operatorname{sh}^2 \alpha_p b} - (3-\nu) (\operatorname{cth} \alpha_p b - 1) - \frac{2\beta}{(1+\nu) \alpha_p} \right|$$

$$M_2 = \frac{\sqrt{\beta_p} Y_p}{\operatorname{sh} \beta_p l} [1 - \nu + (1 + \nu) \beta_p l \operatorname{cth} \beta_p l]$$

$$M_3 = \frac{2\beta}{(3-\nu)(1+\nu)} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{Z_p}{\alpha_p^{1.5}} \cos \alpha_p a + \frac{2(t_2 - \nu_1) - \beta P}{3-\nu}$$

$$L_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} z_k (\cos \theta) z_p (\cos \theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta$$

$$L_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} z_k (\cos \theta) Z_{\nu_p} (\cos \theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta$$

$$L_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} z_k (\cos \theta) [Z_{\nu_p} (\cos \theta) + \nu_p W_{\nu_p} (\cos \theta)] \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta$$

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \quad \text{— функция Хевисайда}$$

$$z_k (\cos \theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin kx \sin \frac{x}{2}}{(\cos \varphi - \cos \theta)^{1.5}} dx$$

$$Z_k (\cos \theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sh} kx \sin \frac{x}{2}}{(\cos x - \cos \theta)^{1.5}} dx$$

$$W_p(\cos \theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \operatorname{ch} px \sin \frac{x}{2} dx}{(\cos x - \cos \theta)^{3/2}} \quad (3.1)$$

$$Y_p(\cos \theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{ch} px \cos \frac{x}{2} dx}{(\cos x - \cos \theta)^{3/2}}$$

$$V_p(\cos \theta) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \operatorname{sh} px \cos \frac{x}{2} dx}{(\cos x - \cos \theta)^{3/2}}$$

Ряды, содержащиеся в выражениях для напряжений, очевидно, сходятся абсолютно и равномерно.

При получении этих формул использованы значения некоторых рядов и интегралов, а также свойства функций (1.20) и (3.1), полученные в работах [10, 11].

4. Рассмотрим некоторые частные случаи и видоизменения первоначальной задачи.

а) Полоса с периодическими включениями, параллельными кромкам.

Решение этой задачи получим, если в граничных условиях (1.1)–(1.5) заменим условие (1.2) на

$$u|_{x=0} = 0 \quad (4.1)$$

оставляя остальные неизменными.

Бесконечную систему для определения неизвестных коэффициентов в этой задаче получим из системы (1.18), если положим Y_1

$$1 - \operatorname{ch} \chi_k b \left(\operatorname{ch} \chi_k b + \frac{\chi_k b}{\operatorname{sh}^2 \chi_k b} \right) - \frac{Z_k}{\chi_k^{1/2}} \left(\frac{1 - \nu}{1 + \nu} \frac{1}{\operatorname{sh} \chi_k b} - \frac{\chi_k b \operatorname{ch} \chi_k b}{\operatorname{sh}^2 \chi_k b} \right) = a_1 \quad (4.2)$$

$$t_2 = \chi_{k1} b, \quad t_1 = \frac{a_0}{4}$$

б) Полоса с периодическими включениями, перпендикулярными к ее кромкам.

Решение этой задачи получим, если в граничных условиях (1.1)–(1.5) заменим условие (1.3) на

$$v|_{y=b} = 0 \quad (4.3)$$

оставляя остальные неизменными.

Бесконечные системы для определения неизвестных коэффициентов этой задачи получим из систем (1.13) и (1.18), если положим

$$X_k = 0, \quad t_1 = t_2, \quad t_2 = \frac{b_0}{4} \quad (4.4)$$

а) Плоскость с doublyкопериодическими включениями.

Выполняя одновременно замены в граничных условиях, выполненных в случаях а) и б), получим

$$X_k = 0, \quad Y_k = 0$$

$$Z_k = \frac{k\pi i}{2(3-\nu)} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{Z_p}{\alpha_p^{1/4}} \left| \frac{(1+\nu)\alpha_p b}{\operatorname{sh}^2 \alpha_p b} - (3-\nu)(\operatorname{cth} \alpha_p b - 1) - \frac{2\nu}{1+\nu} \frac{1}{\alpha_p} \right| / k_p + \frac{k\pi i}{2(3-\nu)} \left| \frac{4\nu}{1+\nu} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{Z_p}{\alpha_p^{1/4}} \cos \alpha_p a + 2\nu P \right| / k, \quad t_1 = t_2 = 0 \quad (4.5)$$

г) Переходя формально к пределу при $l \rightarrow \infty$ и $b \rightarrow \infty$ в системах (1.13)–(1.15), (1.18), получим интегральные уравнения задач для полосы или плоскости с единичными и doublyпериодическими включениями. Однако, более удобные для вычислений интегральные уравнения можно получить непосредственным рассмотрением названных задач.

Приведем интегральное уравнение задачи для плоскости с doublyпериодическими включениями, центры которых лежат на прямой $x = 0$, под действием равномерного, параллельного включения растягивающего напряжения на бесконечности.

Представляя функцию напряжений в виде

$$\Phi(x, y) = \int_0^{\pi} \{A(t) \operatorname{ch} iy + B(t) \operatorname{sh} iy - iy[C(t) \operatorname{ch} iy + D(t) \operatorname{sh} iy]\} \cos tx dt + ty^2$$

удовлетворяя соответствующим граничным условиям и условиям на бесконечности и постулируя аналогично [12], получим

$$D(t) = -C(t) \operatorname{cth} tb - \frac{\nu_2 b}{2 \operatorname{sh} tb}$$

$$A(t) = C(t) \left| \frac{tb}{\operatorname{sh}^2 tb} - \frac{1-\nu}{1+\nu} \operatorname{cth} tb \right| + \frac{\nu_2 b}{2 \operatorname{sh} tb} (1 + tb \operatorname{cth} tb)$$

$$B(t) = C(t) \frac{1-\nu}{1+\nu}, \quad t = \frac{\alpha_2}{2}$$

$$\psi(x) = \int_0^{\pi} \psi(y) H(x, y) dy + f(x) \quad (4.6)$$

где

$$\psi(x) = \frac{\varphi(x)}{x}, \quad z(\lambda) = \lambda^2 C(\lambda)$$

$$z(\lambda) = \int_0^x \varphi(y) J_1(\lambda y) dy$$

$$H(x, y) = \frac{\pi}{2} \int_0^x N(\lambda) J_1(\lambda y) H_0(x, \lambda) d\lambda +$$

$$+ \begin{cases} \frac{2\beta_0}{\pi} \left[E\left(\frac{y}{x}\right) - K\left(\frac{y}{x}\right) \right] & \text{при } y < x \\ \frac{2\beta_0}{\pi} \frac{y}{x} \left[E\left(\frac{x}{y}\right) - K\left(\frac{x}{y}\right) \right] & \text{при } y > x \end{cases}$$

$$N(\lambda) = \operatorname{cth} \lambda b - 1 + \frac{1 + \nu}{\nu - 3} \frac{\lambda b}{\operatorname{sh}^2 \lambda b}$$

$$f(x) = \int_0^x F(\lambda) H_0(\lambda x) d\lambda$$

$$F(\lambda) = \frac{\nu \lambda_0 b^2}{2 \operatorname{sh} \lambda b} [1 + \nu + (\nu - 1) \lambda b \operatorname{cth} \lambda b], \quad \beta_0 = \frac{2\beta}{(1 + \nu)(\nu - 3)}$$

β_0 — заданное напряжение на бесконечности; $E(k)$, $K(k)$ — полные эллиптические интегралы; $J_1(z)$ — функция Бесселя; $H_0(z)$ — функция Струве.

Уравнение (4.6) является уравнением Фредгольма второго рода.

д) Растяжение полосы с периодическими включениями, параллельными ее краям.

Решение этой задачи получим, если в граничных условиях (1.1)–(1.5) заменим условие (1.2) на

$$E_{II} \Big|_{x=f} = 2lfz_0 \quad (4.7)$$

где z_0 — заданное напряжение на бесконечности; f — постоянная, подлежащая определению.

Поступая аналогично п. 1, получаем бесконечную систему

$$\begin{aligned} Z_n = & \frac{k\alpha_n^{\frac{1}{2}}}{2(3-\nu)} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{Z_p}{\alpha_p^{\frac{3}{2}}} J_{3/2} \left(Q_p - \frac{2\beta}{1+\nu} \frac{1}{\alpha_p} \right) + \\ & + \frac{k\alpha_n^{\frac{1}{2}}}{2(3-\nu)} \left[\frac{4\beta}{1+\nu} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{Z_p}{\alpha_p^{\frac{3}{2}}} \cos \alpha_p a + 4f \right] J_1 \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$Y_k = 0, \quad t_1 = 0, \quad t_2 = \alpha_0 f \quad (4.9)$$

$$1 - \alpha_k X_k \left(\operatorname{cth} \alpha_k b + \frac{\alpha_k b}{\operatorname{sh}^2 \alpha_k b} \right) + \frac{Z_k}{\alpha_k^{1/4}} \left(\frac{1 - \nu}{1 + \nu} \frac{1}{\operatorname{sh} \alpha_k b} - \frac{\alpha_k b \operatorname{cth} \alpha_k b}{\operatorname{sh} \alpha_k b} \right) = 0$$

$$Q_p = \frac{(3 - \nu)(\alpha_p b - \exp(-\alpha_p b) \operatorname{ch} \alpha_p b) - (1 + \nu) \alpha_p^2 b^2 - \frac{(1 - \nu)^2}{1 + \nu}}{\operatorname{ch} \alpha_p b \operatorname{sh} \alpha_p b + \alpha_p b} \quad (4.10)$$

Постоянная f определяется из условия равновесия некоторой бесконечной части полосы

$$\alpha_0 b = \int_0^b \alpha_{x1} dy \quad (4.11)$$

где путь интегрирования проходит по некоторому сечению $x = d$, не проходящему через включение.

5. Рассмотрим более подробно задачу, решение которой приведено в п. 4д.

В этом случае, как и во всех рассмотренных выше случаях, бесконечной системе можно придать более удобный для вычислений вид.

Введем обозначение

$$Z_k = 4f(1 + C_0) \alpha_k^{1/4} \gamma_k$$

где

$$C_0 = \frac{\frac{4\beta}{1 + \nu} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\gamma_p}{\alpha_p} \cos \alpha_p a}{1 - \frac{4\beta}{1 + \nu} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\gamma_p}{\alpha_p} \cos \alpha_p a} \quad (5.1)$$

Система (4.8) примет вид

$$\gamma_k = \frac{k}{2(3 - \nu)} \sum_{p=1}^{\infty} \gamma_p I_{kp} \left(Q_p - \frac{2\beta}{(3 - \nu)\alpha_p} \right) + \frac{\alpha_k (\cos \alpha)}{2(3 - \nu)} \quad (5.2)$$

Решая эту систему, можно определить неизвестные заранее постоянные C_0 и f .

Из (4.11) для постоянной f получаем

$$f = \left[\frac{8(1 + C_0)}{\pi} \frac{1}{b} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \gamma_k}{k} \left(\frac{\alpha_k b \operatorname{cth} \alpha_k b - \frac{1 - \nu}{1 + \nu}}{\operatorname{ch} \alpha_k b + \frac{\alpha_k b}{\operatorname{sh} \alpha_k b}} - \frac{\nu}{1 + \nu} \right) \right]^{-1}$$

Были проведены вычисления при следующих значениях параметров:

$$\frac{l}{b} = 3, \quad \beta = \frac{15}{16} b; \quad \nu = 0.25$$

$$\frac{a}{l} = 0.25, \quad 0.50, \quad 0.75$$

Вычисления показывают, что при этих значениях параметров система (5.2) вполне регулярна.

Вычисленные значения натяжения включения $\left(\frac{2T}{2bz_0}\right)$ и коэффициента особенности напряжений ε_{yy} в окрестности конца включения $\left(\frac{A}{\varepsilon_0}\right)$ приведены в табл. 1.

Таблица 1

$\frac{a}{l}$	$\frac{x}{a}$	$\frac{T}{bz_0}$	ε_{yy}	$\frac{A}{\varepsilon_0}$	$\varepsilon_{\theta\theta}$
0.25	0	0.254	5.9	-0.419	0.24
	0.25	0.241	1.2		
	0.50	0.215	3.2		
	0.75	0.172	2.3		
0.50	0	0.392	1.0	-0.553	0.72
	0.25	0.385	1.8		
	0.50	0.353	3.1		
	0.75	0.268	2.2		
0.75	0	0.439	8.2	-0.453	9.0
	0.25	0.437	6.2		
	0.50	0.404	0.5		
	0.75	0.336	3.0		

Неизвестные коэффициенты определялись из укороченной системы (5.2) при $p = 16$ и $p = 20$. Разность результатов вычислений (5) увеличивается при больших $\frac{a}{l}$.

Вычисления показывают, что коэффициент особенности напряжений уменьшается по модулю при $\frac{a}{l} \rightarrow 0$ или $\frac{a}{l} \rightarrow 1$.

Автор выражает благодарность К. С. Чобаняну за ценные советы в ходе решения задачи.

Ա. Ս. ԽԱՉԻԿՅԱՆ

ԱՌՈՒՋԻՍԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐԹ ԽՆԴԻՐԸ ԲԱՐԱԿԱՓԱՏ
ՆԵՐՄԱԿՈՎ ՈՒՂՂԱՆԿՅԱՆ ՀԱՄԱՐ

Ա Վ Փ Ո Փ Ո Ւ Վ

Դիտարկվում է առանցիկանության տեսության հարթ խնդիրը սիմետրիկ արտաքին բեռի ազդեցության տակ գտնվող բարակապատ ենթդրակով ուղղանկյան համար: Խնդիրը բերվում է գծային հանրահաչվական հավասարումների թվային-լիովին ռեզուլյար երեք անփերջ սխառմանների լուծման:

Բերված են նաև բարակապատ ենթդրակներով շերտի և անփերջ հարթության համար մի յանի պարբերական խնդիրների լուծումները: Դիտարկվում է թվային օրինակ:

ON A PLANE PROBLEM OF THE THEORY OF ELASTICITY
FOR A RECTANGULAR REGION WITH THIN-WALLED
INCLUSION

A. S. KHACHIKIAN

S u m m a r y

A plane problem of the theory of elasticity for a rectangular region with thin-walled inclusion under the action of symmetrical external forces is considered.

The problem is reduced to the three quasi-regular infinite systems of linear algebraic equations.

Solutions of some periodical problems for a strip and infinite plane with thin-walled inclusion are also presented.

A numerical example is given.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Melun E. Ein Beitrag zur Theorie geschweißter Verbindungen. Ing.-Archiv, 1932. Bd. 3, Heft 2, s. 123.
2. Reissner E. Note on the problem of the distribution of stress in a thin stiffened elastic sheet. Proc. Nat. Acad. of Sci. U.S.A., 1940. Vol. 26, p. 300.
3. Kotter W. T. On the diffusion of load from a stiffener into a sheet. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1955, vol. 8, p. 164.
4. Դիակիան Ա. Ս. Передача нагрузки от стрингера конечной длинны и бесконечной и полубесконечной пластине. Докл. АН СССР, т. 154, № 4, 1964.
5. Мухи, Стернберг. Передача нагрузки от растягиваемого поперечного стержня в полубесконечной упругой пластине. Прикл. механ., Тр. ASME, № 4, 1968.
6. Արտյունի Հ. Մ. Контактная задача для полуплоскости с упругим приращением. ПММ, т. 32, № 4, 1968.
7. Արտյունի Հ. Մ., Մхитарян Ս. Մ. Периодическая контактная задача для полуплоскости с упругими накладками. ПММ, т. 33, № 5, 1969.

8. Хачикян А. С. Равновесие плоскости с тонкостенным упругим включением конечной длины. Изв. АН АрмССР, Механика, т. XXIII, № 3, 1970.
9. Чобанян К. С., Хачикян А. С. Плоское деформированное состояние упругого тела с тонкостенным гибким включением. Изв. АН АрмССР, Механика, т. XX, № 6, 1967.
10. Библоян А. А. Решение некоторых парных уравнений, встречающихся в задачах теории упругости. ПММ, т. 31, в. 4, 1967.
11. Библоян А. А., Гулканян Н. О. Об одной смешанной задаче для прямоугольника. Изв. АН АрмССР, Механика, т. XXII, № 1, 1969.
12. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М.-Л., 1963.