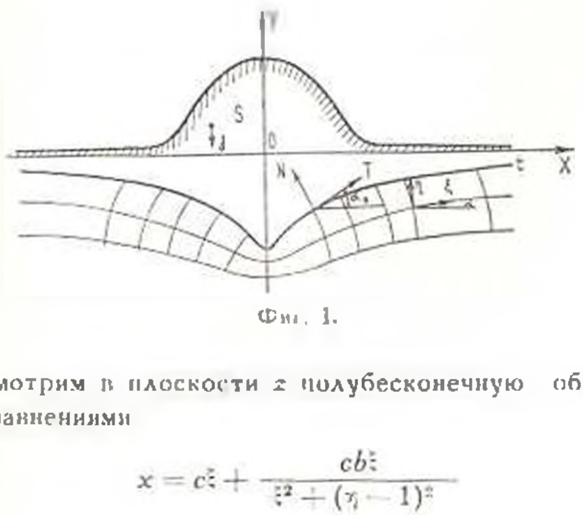
ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXIV, № 3, 1971 Механика

Д. М. АХПАТЕЛОВ, З. Г. ТЕР-МАРТИРОСЯН

О НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ ВЕСОМЫХ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ ОБЛАСТЕЙ

Многие проблемы геомеханики часто приводятся к рассмотрению задач о напряженно-деформированном состоянии горных массивов в поле гравитации.

В работе рассматривается напряженное состояние однородного, изотропного горного массива и каньона (фиг. 1) в рамках плоской задачи теории упругости, с использованием функции комплексных переменных. Решение задачи дается в замкнутом виде в криволинейных координатах.



Фиг. 1.

1. Рассмотрим в плоскости z полубесконечную область S, описываемую уравнениями

$$x = c\xi + \frac{cb\xi}{\xi^2 + (\eta - 1)^2}$$

$$y = c\eta - \frac{cb(\eta - 1)}{\xi^2 + (\eta - 1)^2} \tag{1.1}$$

где c — коэффициент пропорциональности, b — постоянная величина, ξ и η — действительные переменные.

Пусть в каждой точке области S действуют силы гравитации γ, направленные вдоль отрицательных y.

Формула (1.1) вытекает из соотношения

$$z = \omega(\zeta) = c\left[\zeta + \frac{b}{\zeta - i}\right], \quad (z = x + iy, \quad \zeta = \xi + i\eta, \quad \eta < 0) \tag{1.2}$$

осуществляющего отображение нижней полуплоскости на S.

При $-1 < b < 0$ область представляет собой полуплоскость с вырезом. Глубина выреза равна cb, а радиус кривизны в основании дается формулой

$$\rho = \frac{c(1+b)^2}{2b}$$

Для $b = -1$ радиус кривизны равен 0, и вырез принимает остроугольную форму. Случай $b = 0$ соответствует полуплоскости без выреза, а $b > 0$ соответствует выступу на полуплоскости.

Отношение глубины выреза к его радиусу кривизны определяется выражением

$$\lambda = \frac{2b^2}{1+b^2}$$

На фиг. 1 представлены границы областей, построенные при $b = -0.8$ и $b = +0.25$.

2. Как известно [1], система уравнений, описывающая напряженно-деформированное состояние в случае плоской задачи, дается в форме:

уравнения равновесия

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \sigma_x^0}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^0}{\partial y} = 0 \\ &\frac{\partial \tau_{xy}^0}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y^0}{\partial y} = \gamma \end{aligned} \tag{2.1}$$

условие совместности

$$\Delta^2 (\sigma_x^0 + \sigma_y^0) = 0 \tag{2.2}$$

граничные условия

$$\begin{aligned} &N^0 = \frac{\sigma_x^0 + \sigma_y^0}{2} + \frac{\sigma_x^0 - \sigma_y^0}{2} \cos 2\alpha_0 + \tau_{xy}^0 \sin 2\alpha_0 = 0 \\ &T^0 = -\frac{\sigma_x^0 - \sigma_y^0}{2} \sin 2\alpha_0 + \tau_{xy}^0 \cos 2\alpha_0 = 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Здесь σ_x^0, σ_y^0, τ_{xy}^0 — нормальные и касательные напряжения, N^0 и T^0 — соответственно нормальная и касательная нагрузки, действующие на границе, γ — сила гравитации, равная объемному весу тела, составляющего область, α_0 — угол между нормальной внешней нагрузкой и осью Ox, отсчитываемый от Ox в положительном направлении.

Для решения задачи методом комплексных потенциалов необходимо в неоднородном уравнении (2.1) освободиться от неоднородности, то есть привести задачу к случаю отсутствия массовых сил. Для этого положим

$$
\begin{aligned}
\sigma_x^0 &= \sigma_x + \sigma_x' \\
\sigma_y^0 &= \sigma_y + \sigma_y' \\
\tau_{xy}^0 &= \tau_{xy} + \tau_{xy}'
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

где σ_x', σ_y', τ_{xy}' — некоторое частное решение уравнения (2.1), характеризующее напряженное состояние весомой полуплоскости до образования выреза, а σ_x, σ_y, τ_{xy} — дополнительные напряжения, обусловленные наличием этого выреза.

Частное решение берем в виде

$$
\sigma_x' = K\gamma y; \quad \sigma_y' = \gamma y; \quad \tau_{xy}' = 0 \tag{2.5}
$$

где K — коэффициент бокового давления.

Дополнительные напряжения σ_x, σ_y, τ_{xy} теперь будут удовлетворять однородному уравнению (2.1). Кроме того, принимаем, что они на бесконечности равны 0.

Граничные условия для них определятся из выражения (2.3) подстановкой туда (2.4) и (2.5)

$$
\begin{aligned}
N &= \frac{\gamma y}{2}\left[(K-1)\cos 2\alpha_0 - (K+1)\right] \\
T &= \frac{\gamma y}{2}(K-1)\sin 2\alpha_0
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

3. Выразим граничные условия (2.6) в комплексной форме через точки границы полуплоскости t

$$
N + iT = \frac{\gamma y}{2}\left[(K-1)e^{2i\alpha} - (K+1)\right] \tag{3.1}
$$

Воспользуемся следующей формулой [1]:

$$
e^{2i\alpha} = \frac{\omega'(\zeta)}{\overline{\omega'(\zeta)}}
$$

где α есть угол, составляемый осью (ξ) с осью Ox и отсчитываемый от Ox в положительном направлении. Обращаясь к фигуре, легко установить, что на границе, для $\zeta = t$, при $\xi = 0$ угол α_0 равен α. Учитывая также, что $y = \frac{z - \bar{z}}{2i} = \frac{\omega(t) - \overline{\omega(t)}}{2i}$ (в данном и последующих соотношениях черта над некоторыми величинами означает знак сопряженности), выражение (3.1) перепишем в виде

$$
N + iT = \frac{\gamma}{2}\,\frac{\omega(t) - \overline{\omega(t)}}{2i}\left[(K-1)\frac{\omega'(t)}{\overline{\omega'(t)}} - (K+1)\right] \tag{3.2}
$$

При отображающей функции (1.2) имеем

$$N+iT=\frac{\gamma cb}{2}\left\{(K-1)\frac{[(t-i)^2-b](t+i)}{(t-i)^3[(t+i)^2-b]}-(K+1)\frac{1}{(t+i)(t-i)}\right\} \tag{3.3}$$

4. Используя общеизвестное граничное условие [1]

$$N+iT=\Phi(t)+\overline{\Phi(t)}+\frac{1}{\overline{\omega'(t)}}\left[\overline{\omega(t)}\,\Phi'(t)+\omega'(t)\,\Psi(t)\right] \tag{4.1}$$

и ему сопряженное, а также свойства интегралов с ядрами Коши находим:

$$\Phi(\zeta)=\frac{1}{b-(\zeta-i)^2}\left[(\zeta-i)^2J_1-b\overline{\Phi(-i)}\right]$$

$$\Psi(\zeta)=\frac{(\zeta-i)^2}{b-(\zeta-i)^2}\left\{J_2+\Phi(\zeta)-\frac{b}{(\zeta+i)^2}\left[\Phi(\zeta)-\Phi(-i)\right]-\right.$$

$$\left.-\left[\zeta+\frac{b}{\zeta+i}\right]\Phi'(\zeta)\right\} \tag{4.2}$$

где

$$\Phi(-i)=\frac{1}{2(b+2)}\left\{b\left[\overline{J_2(-i)}-J_1(-i)\right]-4J_1(-i)\right\}$$

$$J_1=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{(t-i)^2-b}{(t-i)^2(t-\zeta)}(N-iT)\,dt \tag{4.3}$$

$$J_2=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{(t+i)^2-b}{(t+i)^2(t-\zeta)}(N+iT)\,dt$$

Подставляя выражение (3.3) и ему сопряженное в (4.3) и интегрируя от $-\infty$ до $+\infty$, находим

$$J_1=a_2\left[\frac{1}{2(\zeta-i)^2}-\frac{i}{(\zeta-i)^3}\right]-\frac{a_1 i}{(\zeta-i)}$$

$$J_2=a_3\left[\frac{1}{2(\zeta-i)^2}-\frac{i}{(\zeta-i)^3}\right]-\frac{a_1 i}{(\zeta-i)} \tag{4.4}$$

$$\Phi(-i)=a_4$$

где

$$a_1=\frac{\gamma cb(b-4)}{8},\quad a_2=\frac{\gamma cb^2(K+1)}{4},\quad a_3=\frac{\gamma cb^2(K-1)}{4}$$

$$a_4=-\frac{\gamma cb[b(K+2)+4]}{8(b+2)}$$

Подстановка (4.2) и (4.4) в известные [1] формулы

$$
\begin{aligned}
&\sigma_\xi + \sigma_\eta = 2[\Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)}] \\
&\sigma_\eta - \sigma_\xi + 2i\tau_{\xi\eta} = \frac{2}{\omega'(\zeta)} [\overline{\omega(\zeta)}\Phi'(\zeta) + \omega'(\zeta)\Psi(\zeta)]
\end{aligned}
\qquad (4.5)
$$

дает выражения для дополнительных напряжений

$$
\begin{aligned}
&\sigma_\xi = 2(\varphi_1 - \varphi_3) \\
&\sigma_\eta = 2(\varphi_1 + \varphi_3) \qquad (4.6) \\
&\tau_{\xi\eta} = \frac{r_3^4}{E_{13}^2 + E_{14}^2}[E_{55}\varphi_4 + E_{56}\varphi_3 + E_{13}\varphi_2 + E_{14}\varphi_1]
\end{aligned}
$$

Здесь введены следующие обозначения:

1) $$r_2^2 = \xi^2 + (\eta + 1)^2, \quad r_3^2 = \xi^2 + (\eta - 1)^2$$

$$E_0 = \xi^2 - (\eta - 1)^2, \quad E_1 = E_0 - b, \quad E_2 = 2\xi(\eta - 1), \quad E_3 = E_2$$

$$E_4 = \frac{2b\xi}{r_2^4}(\eta + 1), \quad E_5 = \frac{b}{r_2^4}[\xi^2 - (\eta + 1)^2], \quad E_6 = \frac{1}{E_1^2 + E_2^2}$$

$$E_{13} = E_0E_1 + E_2E_3, \quad E_{14} = E_0E_2 - E_1E_3$$

$$E_{21} = E_6^2[(E_1^2 - E_2^2)\xi + 2E_1E_2(\eta - 1)]$$

$$E_{22} = E_6^2[(E_1^2 - E_2^2)(\eta - 1) - 2E_1E_2\xi]$$

$$E_{29} = \xi(r_2^2 + b), \quad E_{30} = b(\eta - 1) - \eta r_2^2$$

$$E_{31} = \xi\left(1 + \frac{b}{r_2^2}\right), \quad E_{32} = \eta - \frac{b(\eta + 1)}{r_2^2}$$

$$E_{37} = (\eta - 1)[3\xi^2 - (\eta - 1)^2], \quad E_{38} = \xi[3(\eta - 1)^2 - \xi^2]$$

$$E_{45} = -[E_1E_{21} - E_2E_{22}], \quad E_{46} = -[E_1E_{22} + E_2E_{21}]$$

$$E_{47} = \xi E_{45} - (\eta - 1)E_{46}, \quad E_{48} = \xi E_{46} + (\eta - 1)E_{45}$$

$$E_{49} = E_0E_{21} - E_3E_{22}, \quad E_{50} = E_0E_{22} + E_3E_{21}$$

$$E_{51} = 2(E_{47} - E_{49}), \quad E_{52} = 2(E_{48} + E_{50})$$

$$E_{53} = E_{13}E_{29} - E_{14}E_{30}, \quad E_{54} = E_{13}E_{30} + E_{14}E_{29}$$

$$E_{55} = \frac{E_{53}}{r_3^2}, \quad E_{56} = \frac{E_{54}}{r_3^2}$$

2)
$$J_{11}^{(1)} = -a_2 \frac{\eta - 1}{r_3^2} - a_2 \left[\frac{E_6 r_3^2 - 2E_{31}}{2r_3^6} \right]$$

$$J_{12}^{(2)} = -a_1 \frac{\xi}{r_3^2} + a_2 \left[\frac{E_3 r_3^2 - 2E_{38}}{2r_3^6} \right]$$

$$J_{21}^{(1)} = -a_1 \frac{\eta - 1}{r_3^2} + a_2 \left[\frac{E_6 r_3^2 - 2E_{37}}{2r_3^6} \right]$$

$$J_{22}^{(2)} = -a_1 \frac{\xi}{r_3^2} - a_2 \left[\frac{E_3 r_3^2 - 2E_{38}}{2r_3^6} \right]$$

$$J_{31}^{(1)} = \frac{a_1 E_3}{r_3^4} - a_2 \left[\frac{r_3^2 E_{38} + 6E_2 E_6}{r_3^8} \right]$$

$$J_{32}^{(2)} = \frac{a_1 E_6}{r_3^4} - a_2 \left[\frac{E_{37} [r_3^2 - 3(\eta - 1)] - 3\xi E_{38}}{r_3^8} \right]$$

3)
$$\varphi_1 = E_8 [b a_4 E_1 - J_{11}^{(1)} E_{13} - J_{12}^{(2)} E_{11}]$$

$$\varphi_2 = E_8 [b a_1 E_2 + J_{12}^{(2)} E_{13} - J_{11}^{(1)} E_{11}]$$

$$\varphi_3 = E_{47} J_{31}^{(1)} - E_{48} J_{32}^{(2)} + E_{51} J_{11}^{(1)} - E_{52} J_{12}^{(2)} - 2b a_1 E_{21}$$

$$\varphi_4 = E_{48} J_{31}^{(1)} + E_{47} J_{32}^{(2)} + E_{51} J_{12}^{(2)} + E_{52} J_{11}^{(1)} - 2b a_1 E_{22}$$

4)
$$\psi_1 = -[J_{21}^{(1)} + \varphi_1 + E_1 \varphi_2 - E_2 (\varphi_1 - a_1) + \varphi_3 E_{31} - \varphi_4 E_{32}]$$

$$\psi_2 = -[J_{22}^{(2)} + \varphi_2 + E_1 (\varphi_1 - a_1) - E_2 \varphi_2 + \varphi_3 E_{32} + \varphi_4 E_{31}]$$

$$\psi_3 = \frac{r_3^4}{2[E_{12}^2 - E_{11}^2]} [E_{53} \varphi_3 - E_{54} \varphi_4 + E_{13} \psi_1 - E_{11} \psi_2]$$

5. Используя известные зависимости [1]

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_\xi + \sigma_\eta$$
$$(\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy}) e^{2i\alpha} = \sigma_\eta - \sigma_\xi + 2i\tau_{\xi\eta} \qquad (5.1)$$

выразим частное решение в криволинейных координатах ξ, η

$$\sigma_\xi^r = \frac{1}{2} (\varphi_1^r - \varphi_2^r)$$
$$\sigma_\eta^r = \frac{1}{2} (\varphi_1^r + \varphi_2^r) \qquad (5.2)$$
$$\tau_{\xi\eta}^r = \varphi_3^r$$

При этом пришлось ввести следующие обозначения:

$$1)\quad F_1 = \frac{E_6}{r_3^4}\left(r_3^4 - bE_0\right)E_{11},\quad F_2 = -\frac{bE_2E_8E_{12}}{r_3^4}$$

$$2)\quad \varphi_1^* = \gamma(K-1)\,c\left|\gamma_1 - \frac{b(\gamma_1 - 1)}{r_3^2}\right|$$

$$\varphi_2^* = -F_1(K-1)c\left|\gamma_1 - \frac{b(\gamma_1 - 1)}{r_3^2}\right|$$

$$\varphi_3^* = -F_2(K-1)c\left|\gamma_1 - \frac{b(\gamma_1 - 1)}{r_3^2}\right|$$

6. Суммируя (4.6) и (5.2), окончательно получим:

$$\sigma_y = 2(\varphi - \psi_3) + \frac{1}{2}(\varphi_1^* - \varphi_2^*)$$

$$\sigma_x = 2(\varphi_1 + \psi_3) + \frac{1}{2}(\varphi_1^* + \varphi_2^*)$$

$$\tau_{xy} = \frac{r_3^4}{E_{13}^2 + E_{14}^2}\left[E_{13}\varphi_1 + E_{14}\varphi_2 + E_{13}\psi_2 - E_{14}\psi_1\right] + \varphi_3^*$$

Всесоюзный научно-исследовательский институт
гидрогеологии и инженерной геологии

Поступила 16 IV 1970

Դ. Մ. ԱԽՓԱՏԵԼՈՎ, Զ. Գ. ՏԵՐ-ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ

ԿՇՌԱՅԻՆ ԿԻՍԱԱՆՎԵՐՋ ՏԻՐՈՒՅԹՆԵՐԻ ԼԱՐՎԱԾԱՅԻՆ ՎԻՃԱԿԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Հոդվածում դիտված է կիսաանվերջ տիրույթների լարվածային վիճակը սեփական կշռի ազդեցության տակ. հարթ խնդրի պայմաններում:

Խնդրի լուծումը տրված է վերջավոր տեսքով և հնարավորություն է տալիս գնահատել լեռնային զանգվածների և կիրճերի լարվածային վիճակը:

ON THE STRAINED STATE OF WEIGHABLE SEMI-INFINITE REGION

D. M. AKHPATELOV, Z. G. TER-MARTIROSIAN

S u m m a r y

In the condition of a plane problem the strained state of semi-infinite region under the action of their own wieght is considered.

The solution of the problem is given in a closed form, making it possible to estimate the strained states of mountain-masses and canyons.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. Наука, 1966.
2. *Курдин Н. С.* Напряженное состояние в полубесконечных областях с криволинейными границами. Инж. ж., № 4, 1968.
3. *Тер-Мартиросян З. Г., Ахпателов Д. М.* О напряженно-деформированном состоянии горных массивов в поле гравитации. Тематический сб. ВСЕГИНГЕО, вып. 15, М., 1969.