

Օ. Մ. САПОНДЖЯՆ

ПОСТРОЕНИЕ КОНФОРМНО ОТОБРАЖАЮЩИХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ДВУСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ К ЗАДАЧЕ КРУЧЕНИЯ

В работе указывается способ построения функций, конформно отображающих область кольца на некоторые двусвязные области, ограниченные простыми контурами. При построении приближенных отображающих функций применен известный метод Л. В. Канторовича [1].

Построенные отображающие функции могут применяться при решении ряда задач теории упругости и пластичности [2].

В качестве примера применения построенных функций рассмотрена задача о кручении призматического стержня с сечением, ограниченным извне окружностью, а изнутри — прямолинейным разрезом.

§ 1. Отображение области кольца на область с прямолинейным разрезом

1. Обозначим комплексную координату области кольца через $\zeta = re^{i\theta}$, а области с разрезом (область G) через $z = x + iy$. Внутренний радиус кольца пусть будет $r = r_0 < 1$, а внешний — $r = 1$. В области G имеется прямолинейный разрез вдоль конечного отрезка прямой, уравнение которой пусть будет $y = mx$ ($m = \text{const}$) или в комплексной форме

$$\bar{z} = \frac{(1 - im)^2}{1 + m^2} z \quad (\bar{z} = x - iy) \quad (1.1)$$

Конформное отображение области кольца на область G осуществляется рядом Лорана. Используя только условие перехода внутренней окружности кольца на разрез (1.1), указанный ряд приводим к виду

$$z = w(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \zeta^{-k} + \frac{(1 + im)^2}{1 + m^2} \bar{a}_k \frac{\bar{\zeta}^{-k}}{\zeta^k} \right] \quad (1.2)$$

где $a_k \neq 0$, $\text{Im} a_k = 0$.

Функция (1.2) обеспечивает наличие разреза (1.1) в G независимо от значения коэффициентов a_k . Последние определяются из условия перехода внешней окружности кольца на внешний контур области G .

2. В качестве первого примера определения α , рассмотрим случай, когда область G есть бесконечная полоса с разрезом вдоль отрезка оси x длиной $2d$ (фиг. 1). В этом случае в (1.2) надо положить $m = 0$, $\bar{a}_k = a_k$, $a_{2k} = 0$. Из условия перехода контура $y = b$ на внешнюю полуокружность кольца при $0 \leq \zeta \leq \pi$, то есть из условия

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} (1 - i^{4k+2}) \sin(2k+1)\zeta = b$$

определяем коэффициенты

$$a_{2k+1} = \frac{4b}{\pi(2k+1)(1-i^{4k+2})}$$

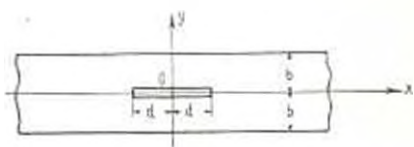
При этом отображающая функция (1.2) примет вид

$$z = w(\zeta) = \frac{4b}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\zeta^{2k+1} + \frac{\lambda^{4k+2}}{\zeta^{2k+1}}}{(2k+1)(1-i^{4k+2})} \quad (1.3)$$

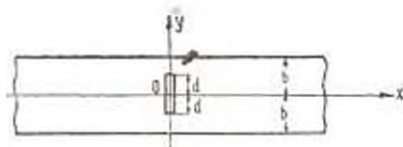
Отсюда при $\zeta = i$ для половины длины разреза будем иметь

$$d = \frac{8b}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k+1}}{(2k+1)(1-i^{4k+2})} \quad (1.4)$$

Придавая параметру i различные значения в интервале $0 < i < 1$, находим соответствующие значения d .



Фиг. 1.



Фиг. 2.

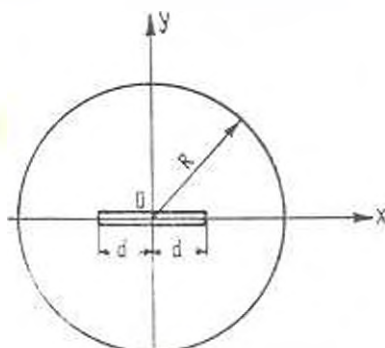
В случае, когда разрез длиной $2d$ проведен вдоль отрезка оси y и симметрично расположен относительно оси x (фиг. 2), отображающая функция (1.2) примет вид

$$z = w(\zeta) = \frac{4b}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\zeta^{2k+1} - \frac{\lambda^{4k+2}}{\zeta^{2k+1}}}{(2k+1)(1-i^{4k+2})} \quad (1.5)$$

откуда, при $\zeta = i$, будем иметь

$$d = \frac{8b}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k i^{2k+1}}{(2k+1)(1-i^{4k+2})} \quad (1.6)$$

3. Рассмотрим случай, когда область G есть круг с диаметральным разрезом длиной $2d < 2R$, симметрично расположенным относительно центра круга, принятого за начало координат (фиг. 3). Ось x проходит вдоль разреза.



Фиг. 3.

Из (1.2) для рассматриваемого случая имеем

$$z = w(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1} \left(\zeta^{2k+1} + \frac{\lambda^{2k+2}}{\zeta^{2k+1}} \right) \quad (1.7)$$

Уравнением внешнего контура области G будет $z\bar{z} = R^2$. Внеся в это уравнение (1.7) и приняв $\bar{\zeta} = e^{i\theta}$, приходим к бесконечной системе уравнений относительно a_{2k+1} :

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} (1 + \lambda^{8k+4}) a_{2k+1}^2 = R^2 \\ & \sum_{k=0}^{\infty} (1 - \lambda^{2k+2n+4}) a_{2k+1} a_{2n-2k-1} = \\ & + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{2k+2} a_{2k+1} a_{2n-2k-1} = 0 \quad (n = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

Решая эти уравнения с точностью до λ^8 методом последовательных приближений [1], находим

$$\begin{aligned} a_1 &= R(1 - \lambda^4 + 2\lambda^8), & a_3 &= -R\lambda^2(1 - 2\lambda^4) \\ a_5 &= R\lambda^4(1 - 2\lambda^4), & a_7 &= -R\lambda^6, & a_9 &= R\lambda^8 \end{aligned}$$

Пользуясь этими значениями, из (1.7) получим

$$\begin{aligned} z &= R \left[(1 - \lambda^4 + 2\lambda^8) \left(\zeta + \frac{\lambda^2}{\zeta} \right) - \lambda^2(1 - 2\lambda^4) \left(\zeta^3 + \frac{\lambda^6}{\zeta^3} \right) + \right. \\ & \left. + \lambda^4(1 - 2\lambda^4) \left(\zeta^5 + \frac{\lambda^{10}}{\zeta^5} \right) - \lambda^6 \left(\zeta^7 + \frac{\lambda^{14}}{\zeta^7} \right) + \lambda^8 \left(\zeta^9 + \frac{\lambda^{18}}{\zeta^9} \right) \right] \quad (1.8) \end{aligned}$$

Приняв в (1.8) $\zeta = \lambda$, с принятой точностью находим

$$d = 2R(1 - 2\lambda^2 + 5\lambda^3) \quad (1.9)$$

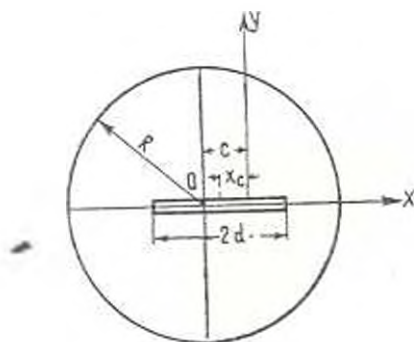
4. Рассмотрим теперь случай, когда область G есть круг с несимметричным относительно центра круга диаметральный разрезом длиной $2d < 2R$. Направив ось x вдоль разреза (фиг. 4) и приняв $m = 0$, $\bar{a}_k = a_k$, из (1.2) получим

$$z = w(\zeta) = \sum_1^{\infty} a_k \left(\zeta^k + \frac{b^{2k}}{\zeta^k} \right) \quad (1.10)$$

Уравнение внешнего контура области G представим в комплексной форме

$$z\bar{z} + c(z + \bar{z}) = R^2 - c^2 \quad (1.11)$$

где c — расстояние от центра круга до начала координат.



Фиг. 4.

Внеся (1.10) при $\zeta = e^{i\tau}$ в (1.11) и обозначив

$$\gamma = \frac{c}{R}, \quad a_k = Ru_k$$

приходим к бесконечной системе уравнений

$$\begin{aligned} u_1 &= (1 + \lambda^4)^{-1/2} \{ 1 - \gamma^2 - [(1 + \lambda^6)u_2^2 + (1 + \lambda^{12})u_3^2 + \dots] \}^{1/2} \\ u_{2n} &= -u_1^{-1} (1 + \lambda^{4n+2})^{-1/2} \{ (1 + \lambda^{4n+6})u_2 u_{2n-1} + \\ &+ \sum_{k=2}^{\infty} [(1 + \lambda^{8k+4n+2})u_{2k} u_{2n-2k-1} + (1 + \lambda^{8k+4n+6})u_{2k-1} u_{2n+2k-2}] + \\ &+ \sum_{k=1}^{n-1} (\lambda^{10-2k} u_{2k-1} u_{2n-2k} + \lambda^{4k} u_{2k} u_{2n-2k-1}) + \gamma (1 + \lambda^{4n+2}) u_{2n-1} \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{2n+1} = & -u_1^{-1} (1 + \lambda^{4n+4})^{-1} \left\{ (1 + \lambda^{4n+2}) u_2 u_{2n+1} + \right. \\
& + \sum_{k=2}^{\infty} \left| (1 + \lambda^{8k+4n}) u_{2k} u_{2k+2n} + (1 + \lambda^{8k+4n-1}) u_{2k-1} u_{2k+2n-1} + \right. \\
& \left. \left. + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda^{4k-1} u_{2k-1} u_{2n-2k-1} + \lambda^{1k} u_{2k} u_{2n-2k}) + (1 + \lambda^{4n}) u_{2n} \right| \right\} \\
u_0 = & 0 \quad (n = 1, 2, \dots)
\end{aligned}$$

Из этой системы уравнений методом последовательных приближений [1] могут быть найдены значения конечного числа коэффициентов u_k .

Определив эти коэффициенты для нечетных „ k “ с точностью до $\lambda^m \nu^n$ при $m+n=4$ ($m=0, 2, 4$; $n=0, 2, 4$), а для четных „ k “ с точностью до $\lambda^m \nu^n$ при $m+n=5$ ($m=0, 2, 4$; $n=1, 3, 5$) и приняв за исходное значение $u_1^{(0)} = u_2^{(0)} = \dots = 0$, отображающую функцию (1.10) представим в виде

$$\begin{aligned}
z = R \left[(1 - \nu^2 - \nu^2 \lambda^2 - \lambda^4) \left(\frac{z}{\lambda} + \frac{\lambda^2}{z} \right) - (\nu + 2\nu^2 - \lambda^3 - \right. \\
- 4\nu^2 \nu^3) \left(\frac{z^2}{\lambda^2} + \frac{\lambda^4}{z^2} \right) + (\nu^2 - \lambda^2 + 5\nu^2 \lambda^2 - \nu^4) \left(\frac{z^3}{\lambda^3} + \frac{\lambda^6}{z^3} \right) + \\
+ (2\nu \lambda^2 - \nu^3 + 4\nu \lambda^4 - 8\nu^3 \lambda^2 + \nu^5) \left(\frac{z^4}{\lambda^4} + \frac{\lambda^8}{z^4} \right) - \\
- (3\nu^2 \lambda^2 - \lambda^4 - \nu^4) \left(\frac{z^5}{\lambda^5} + \frac{\lambda^{10}}{z^5} \right) + \\
\left. + (4\nu^3 \lambda^2 - 3\nu \lambda^4 - \nu^5) \left(\frac{z^6}{\lambda^6} + \frac{\lambda^{12}}{z^6} \right) \right] \quad (1.12)
\end{aligned}$$

Приняв в (1.12) $z = \pm \lambda$ с принятой точностью находим

$$2d = 4R\nu(1 - \nu^2 - 2\lambda^4) \quad (1.13)$$

а для абсциссы срединной точки разреза будем иметь

$$x_c = -2R\lambda^2\nu(1 + 2\nu^2 - \nu^2) \quad (1.14)$$

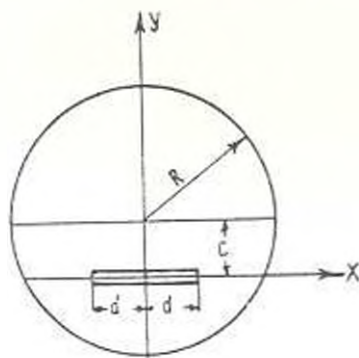
5. Рассмотрим также случай, когда область G есть круг с разрезом, показанным на фиг. 5.

В случае, когда область G симметрична только относительно оси y и ось x проведена вдоль разреза, отображающая функция (1.2) приведет к виду

$$z = w(\zeta) = \sum_1^{\infty} \left[a_{2k-1} \left(\zeta^{2k-1} + \frac{\lambda^{4k-2}}{\zeta^{2k-1}} \right) + i a_{2k} \left(\zeta^{2k} - \frac{\lambda^{4k}}{\zeta^{2k}} \right) \right] \quad (1.15)$$

Уравнение внешнего контура области G представим в комплексной форме

$$z \bar{z} + ic(z - \bar{z}) = R^2 - c^2$$



Фиг. 5.

В это уравнение внося (1.15) при $\zeta = e^{i\theta}$, приходим к бесконечной системе уравнений

$$\begin{aligned} u_1 &= (1 + \lambda^4)^{-1/2} \left[1 - \gamma^2 - \left[(1 + \lambda^4) u_2^2 + (1 + \lambda^{12}) u_4^2 + \dots \right] \right], \\ u_{2n} &= u_1^{-1} (1 + i^{2n-2})^{-1} \left\{ (1 + \lambda^{4n-2}) u_2 u_{2n-1} - \right. \\ &\quad - \sum_{k=2}^{\infty} \left[(1 + i^{8k-4n-2}) u_{2k-1} u_{2k-2n-1} - (1 + i^{8k-4n-2}) u_{2k} u_{2k-2n-1} \right] - \\ &\quad - \sum_{k=1}^{n-1} (i^{4k-2} u_{2k-1} u_{2n-2k} - i^{4k} u_{2k} u_{2n-2k-1}) - \gamma (1 + i^{4n-2}) u_{2n-1} \Big\}, \\ u_{2n-1} &= -u_1^{-1} (1 + i^{4n-1})^{-1} \left\{ (1 + i^{4n-3}) u_2 u_{2n-2} + \right. \\ &\quad + \sum_{k=2}^{\infty} \left[(1 + i^{4k-4n-1}) u_{2k-1} u_{2k+2n-1} + (1 + i^{4k-4n-1}) u_{2k} u_{2k+2n-1} \right] - \\ &\quad - \sum_{k=1}^n (i^{4k-2} u_{2k-1} u_{2n-2k+1} - i^{4k} u_{2k} u_{2n-2k}) - \gamma (1 + i^{4n}) u_{2n} \Big\} \\ u_0 &= 0 \quad (n = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

где

$$u_1 = \frac{a_k}{R}, \quad \gamma = \frac{c}{R}$$

Из приведенной бесконечной системы уравнений методом последовательных приближений, с оговоренной выше точностью, определяем $a_1, a_2, \dots, a_5$.

При этом отображающая функция (1.15) будет иметь вид

$$z = \sum_1^3 \left| a_{2k-1} \left(z^{2k-1} + \frac{z^{4k-2}}{z^{2k-1}} \right) + i a_{2k} \left(z^{2k} - \frac{z^{4k}}{z^{2k}} \right) \right| \quad (1.16)$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= R(1 - \nu^2 + \nu^2 \nu^2 - \nu^4), & a_2 &= -R(\nu - 2\nu^2 - \nu^3 + 4\nu^3 \nu^2) \\ a_3 &= -R(\nu^2 - \nu^2 - 5\nu^2 \nu^2 - \nu^4), & a_4 &= R(2\nu^2 - \nu^3 - 2\nu^4 - 8\nu^3 \nu^2 - \nu^5) \\ a_5 &= R(\nu^4 - 3\nu^2 \nu^2 - \nu^4), & a_6 &= -R(3\nu^4 - 4\nu^3 \nu^2 + \nu^5) \end{aligned} \quad (1.17)$$

Приняв в (1.16) $z = ie^{i\theta}$, получим значение абсциссы произвольной точки разреза

$$x = 2 \sum_1^3 |a_{2k-1}| e^{2k-1} \cos(2k-1)\theta - a_{2k} e^{2k} \sin 2k\theta \quad (1.18)$$

Для половины длины разреза имеем $d = x_{\max}$.

Если принять, например, $\nu = \nu = 0.25$, то из (1.18) найдем $d = 0.468R$ при $\theta = 6^\circ 41'$.

§2. Отображение области кольца на область, ограниченную внешне окружностью, а изнутри правильным многоугольником и наоборот

1. Обозначим через $w_0(z)$ функцию Кристоффеля-Шварца, конформно отображающую внешнюю область окружности радиуса $r = 1$ на внешнюю область правильного многоугольника. Эта функция разлагается в ряд

$$z_0 = w_0(z) = c \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{2k-1} z^{2k-1}}{z^{2k-1}} \right) \quad (2.1)$$

где c — постоянный параметр, m — число сторон многоугольника, a_{2k-1} — известные действительные постоянные, не зависящие от z .

Иногда (2.1) принимают за приближенное выражение функции, конформно отображающей область кольца радиусами $r = \nu < 1$ и $r = 1$ на область G , ограниченную изнутри правильным многоугольником, а внешне окружностью L . Точность такого приближения, очевидно, зависит от значения ν . Чем меньше ν , тем больше точность приближения.

Условие перехода внешней окружности кольца на окружность L выражается формулой

$$w_0(e^{\nu}) w_0(e^{-\nu}) = R^2 \quad (2.2)$$

где R — радиус окружности L .

Из (2.2), с учетом (2.1), получим

$$1 + \lambda^{2m} a_{m-1}^2 + \dots + 2\lambda^m a_{m-1} \cos m\theta + \\ + 2\lambda^{2m} a_{2m-1} \cos 2m\theta + \dots = \frac{R^2}{c^2} \quad (2.3)$$

Это уравнение будет точно выполняться тогда, когда все коэффициенты a_{mk-1} равны нулю, что можно было предвидеть заранее. Приблизленно (2.3) будет выполняться, если пренебречь в нем членами, содержащими множитель λ в степени m и больше. При этом из (2.3) получим

$$c = R \quad (2.4)$$

При указанной точности кривую L можно принять за окружность радиуса R .

Для повышения точности приближения кривой L к окружности радиуса R воспользуемся отображающей функцией

$$z = w(\zeta) = c \lambda^m a_{m-1} \zeta^{m+1} \quad (2.5)$$

Тогда взамен (2.3) будем иметь

$$1 - 2\lambda^{2m} a_{m-1}^2 + \dots + 2\lambda^{2m} a_{2m-1} \cos 2m\theta + \dots = \frac{R^2}{c^2} \quad (2.6)$$

Это уравнение приближенно удовлетворится, если в нем пренебречь членами, содержащими множитель λ в степени $2m$ и больше. При этом из (2.6) получится опять (2.4). Можно показать, что с той же точностью удовлетворяется условие перехода внутренней окружности кольца на внутренний контур области G .

Таким образом, функция (2.5), с учетом (2.4), с точностью $1 - \lambda^{2m} \approx 1$ осуществляет условие перехода контуров кольца на контуры области G .

Перепишем (2.5) в окончательном виде

$$z = w(\zeta) = R \left[\zeta + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{mk} a_{mk-1}}{\zeta^{mk-1}} - \lambda^m a_{m-1} \zeta^{m+1} \right] \quad (2.7)$$

В качестве примера рассмотрим случай отображения области кольца на область, ограниченную внутри квадратом, а внешне — окружностью.

За приближенное выражение функции, конформно отображающей внешность окружности радиуса $\rho = \lambda$ на внешность квадрата, с достаточной точностью можно принять первые три члена функции (2.1) при $m = 4$:

$$z_0 = c \left(\zeta - \frac{\lambda^8}{6\zeta^3} + \frac{\lambda^8}{56\zeta^5} \right) \quad (2.8)$$

Отображающая функция (2.7) примет вид

$$z = R \left(\zeta - \frac{\lambda^4}{6\zeta^2} + \frac{\lambda^8}{56\zeta^4} + \frac{\lambda^4}{6}\zeta^2 \right) \quad (2.9)$$

2. Обозначим через $w_0(\zeta)$ функцию Кристоффеля-Шварца, отображающую область единичного круга на область правильного многоугольника. Эта функция разлагается в ряд Тейлора

$$w_0(\zeta) = c \left(\zeta + \sum_{k=1}^{\infty} a_{mk+1} \zeta^{mk+1} \right) \quad (2.10)$$

где m — по-прежнему число сторон многоугольника, a_{mk+1} — известные действительные постоянные.

Аналогично случаю предыдущего пункта можно показать, что

$$z = w(\zeta) = \frac{R}{\lambda} \left[\zeta + \sum_{k=1}^{\infty} a_{mk+1} \zeta^{mk+1} - \frac{\lambda^{2m} a_{m+1}}{\zeta^{m-1}} \right] \quad (2.11)$$

является приближенным выражением функции, конформно отображающей область кольца радиусами $\lambda = r < 1$ и $r = 1$ на область G , ограниченную изнутри окружностью радиуса R , а извне — правильным многоугольником. Приближенность указанного выражения заключается в том, что условие перехода контуров кольца на контуры области G удовлетворяется с точностью $1 - \lambda^{2m} \approx 1$.

§ 3. Отображение области кольца на область, ограниченную изнутри правильным многоугольником с закругленными углами, а извне — замкнутой кривой, симметричной относительно осей симметрии указанного многоугольника

1. Известная функция

$$z = c \left[\zeta - \frac{\lambda^m}{(m-1)^2 \zeta^{m-1}} \right] \quad (3.1)$$

конформно отображает внешность окружности радиуса $r = \lambda$ на внешность правильного m -угольника с закругленными углами. Коэффициент при втором члене (3.1) выбран из условия равенства нулю кривизны контура многоугольника в средних точках его сторон [3].

Можно показать, что указанному условию удовлетворяет каждый член ряда

$$z = w(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{mk+1} \left[\zeta^{mk+1} - \frac{(mk+1)^2}{(mk+m-1)^2} \frac{\lambda^{2mk+m}}{\zeta^{mk+m-1}} \right] \quad (3.2)$$

причем $a_1 = 0$. Непосредственно видно, что первый член (3.2) совпадает с (3.1). Согласно (3.2), когда точка z описывает окружность радиуса $\rho = 1$, точка z , независимо от значений коэффициентов a_{mk+1} , будет описывать правильный m -угольник с закругленными углами.

Обобщенную функцию (3.2) можно использовать при отображении области кольца радиусами $\rho = r \leq 1$ и $\rho = 1$ на область G , ограниченную изнутри правильным m -угольником с закругленными углами, а извне — некоторой замкнутой кривой L , симметричной относительно осей симметрии указанного m -угольника. Уравнение в комплексной форме кривой L получится из (3.2) при $z = e^{i\theta}$:

$$z = \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_{mk+1} \right| e^{i(mk+1)\theta} = \frac{(mk+1)^2}{(mk+m-1)^2} e^{i(mk+m-1)\theta} \quad (3.3)$$

2. Рассмотрим случай отображения области указанного кольца на область G , ограниченную изнутри правильным m -угольником с закругленными углами, а извне — правильным m -угольником, оси симметрии которых совпадают.

При определении коэффициентов a_{mk+1} достаточно учесть уравнение той части контура внешнего m -угольника, для которой $-\frac{\pi}{m} \leq \theta \leq \frac{\pi}{m}$. В этом интервале $z = \cos \theta = a$, следовательно, согласно (3.3)

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_{mk+1} \right| \cos(mk+1)\theta = \frac{(mk+1)^2}{(mk+m-1)^2} e^{i(mk+m-1)\theta} \cos(mk+m-1)\theta = a \quad \left(-\frac{\pi}{m} \leq \theta \leq \frac{\pi}{m} \right) \quad (3.4)$$

В промежутке $\left(-\frac{\pi}{m}, +\frac{\pi}{m} \right)$ функции $\cos m\theta$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) образуют полную систему, поэтому для определения a_{mk+1} умножим (3.4) на $\cos m\theta d\theta$ и проинтегрируем результат от $-\frac{\pi}{m}$ до $\frac{\pi}{m}$.

Обозначив при этом

$$(-1)^k a_{mk+1} = \frac{\pi a}{m \ln \frac{\pi}{m}} u_{mk+1} \quad (3.5)$$

приходим к бесконечной системе уравнений относительно u_{mk+1}

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(mk+1) u_{mk+1}}{(mn-mk-1)(mn-mk+1)} = 1$$

$$\left| \frac{(mk+1)(mn-mk-1)(mn+mk+1)i^{2mk-m}}{(mk+m-1)(mn-mk-m+1)(mn+mk+m-1)} \right| = z_n$$

$$(n=0, 1, 2, \dots) \quad (3.6)$$

где

$$\sigma_n = -1, \quad z_1 = z_2 = \dots = 0 \quad (3.7)$$

Из уравнений (3.6) можно найти приближенные значения конечного числа коэффициентов u_{mk+1} , и тем самым из (3.2), с учетом (3.5), определить приближенное выражение отображающей функции.

Покажем, что систему (3.6), при некотором ограничении значений параметра i , можно привести к регулярному виду.

Легко проверить, что указанную систему можно видоизменить так:

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_{mk+1} \left| \frac{1}{mn-mk-1} - \frac{1}{mn+mk+1} - \frac{(mk+1)^2}{(mk+m-1)^2} i^{2mk-m} \right.$$

$$\left. \times \left(\frac{1}{mn-mk-m+1} - \frac{1}{mn+mk+m-1} \right) \right| = 2z_n \quad (3.8)$$

Заменив в (3.8) n на $n+1$ и вычтя полученную систему из (3.8) (известный прием, указанный в [1]), приходим к новой бесконечной системе уравнений, которую запишем в следующем виде:

$$u_{m(n+1)} = \frac{m-1}{1+v_n} \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^{\infty} u_{mk+1} \left[A_{k,n} - B_{k,n} - \frac{(mk+1)^2}{(mk+m-1)^2} i^{2mk-m} \right.$$

$$\left. \times (C_{k,n} - D_{k,n}) \right] - \frac{2(m-1)}{m(1+v_n)} z_n \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (3.9)$$

где

$$A_{k,n} = \frac{1}{(mn-mk-1)(mn-mk+m-1)} \quad (3.10)$$

$$B_{k,n} = \frac{1}{(mn+mk-1)(mn+mk+m+1)}$$

$$C_{k,n} = \frac{1}{(mn-mk-m+1)(mn-mk+1)}$$

$$D_{k,n} = \frac{1}{(mn+mk+m-1)(mn+mk+2m-1)}$$

$$v_n = \frac{m-1}{(2mn+1)(2mn+m+1)} - \frac{(mn+1)^2 i^{2mn-m}}{(mn+m-1)^2} \left| 1 + \right.$$

$$\left. - \frac{m-1}{(2mn+m-1)(2mn+2m-1)} \right| \quad (3.11)$$

Легко проверить, что при $k \neq n$

$$\begin{aligned} A_{k,n} > 0, \quad B_{k,n} > 0, \quad C_{k,n} > 0, \quad D_{k,n} > 0 \\ A_{k,n} - B_{k,n} > 0, \quad C_{k,n} - D_{k,n} > 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

и все эти величины стремятся к нулю, когда в отдельности $k, n \rightarrow \infty$.

Нетрудно доказать справедливость оценки

$$y_{k,n} = \frac{(mk+1)^2 i^{2nk+n}}{(mk+m-1)^2} \frac{C_{k,n} - D_{k,n}}{A_{k,n} - B_{k,n}} < i^m \frac{(mk+m-1)(mn-mk+m-1)}{(mk+1)(mn-mk-m-1)} \quad (3.13)$$

откуда

при $k < n$

$$\begin{aligned} y_{k,n} &\leq i^m \left(1 - \frac{m-2}{mk+1} \right) \left| 1 - \frac{2(m-1)}{mn-mk-m-1} \right| < \\ &\leq i^m (m-1)(2m-1) \end{aligned} \quad (3.14)$$

при $k > n$

$$y_{k,n} \leq i^m (m-1) \quad (3.15)$$

Из (3.14) и (3.15), потребовав выполнения неравенств

$$y_{k,n} \leq 1 \quad (3.16)$$

получим

$$i \leq [(m-1)(2m-1)]^{\frac{1}{m-1}} \quad (3.17)$$

Согласно (3.17) значения i монотонно возрастают от 0,464 при $m=3$ до 1 при $m=\infty$.

Учитывая (3.17) и приняв $m \geq 2$, будем иметь оценку

$$\begin{aligned} \frac{(mn+1)^2}{(mn+m-1)^2} i^{2mn+m} &\left| 1 + \frac{m-1}{(2mn+m-1)(2mn-2m-1)} \right| < \\ &< \frac{2m(m-1)}{(m-1)^{2n-2}(2m-1)^{2n-2}} \frac{2m(m-1)}{(2m-1)^{2n-2}} < \\ \frac{m-1}{(2m+1)^{2n-1}} &= \frac{m-1}{1 + \frac{2n+1}{1!} 2m + \frac{(2n+1)2n}{2!} (2m)^2 + \dots} < \\ &< \frac{m-1}{(2mn+1)(2mn+2m-1)} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Сопоставив (3.11) с (3.18), получим

$$y_{k,n} > 0 \quad \text{и} \quad \lim_{k,n \rightarrow \infty} y_{k,n} = 0 \quad (3.19)$$

Пользуясь (3.10), (3.12), (3.13), (3.16) и (3.19), получим условие регулярности системы (3.9)

$$\begin{aligned} \frac{m-1}{1+v_n} \sum_{k=n}^{\infty} \left| A_{k,n} - B_{k,n} - \frac{(mk-1)^2}{(mk+m-1)^2} e^{2mk+m} (C_{k,n} - D_{k,n}) \right| &\leq \\ &\leq \frac{m-1}{1+v_n} \sum_{k=n}^{\infty} A_{k,n} = \frac{1}{1-v_n} \left| 1 - \frac{m-1}{m(mn+m-1)} \right| \leq 1 \end{aligned} \quad (3.20)$$

причем последний знак равенства имеет место при $n = \infty$.

При выводе (3.20) использовано значение суммы ряда [4]

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(mn-mk-1)(mn-mk+m-1)} = \frac{1}{m-1} \left| 1 - \frac{m-1}{m(mn+m-1)} \right|$$

Регулярная система (3.9), с учетом (3.7), позволяет найти значения конечного числа неизвестных w_{m-1} с недостатком и избытком [1].

§4. Кручение стержня круглого поперечного сечения с разрезом, параллельным одному из диаметров круга

В качестве примера применения построенных отображающих функций рассмотрим задачу о кручении стержня с поперечным сечением в виде круга с разрезом, параллельным одному из диаметров круга (фиг. 5).

Задача кручения для двусвязной области легко решается, когда известна функция, конформно отображающая область кольца на эту двусвязную область [5]. Учитывая это, мы опускаем детали решения.

Будем пользоваться отображающей функцией (1.16). Функцию напряжений при кручении выберем в виде

$$\Phi = -\frac{\pi\tau}{2} z \bar{z} + \pi R^2 \Phi_0 \quad (4.1)$$

где τ — относительный угол закручивания, Φ_0 — гармоническая функция

$$\begin{aligned} \Phi_0 = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [(A_{2k} z^{2k} + B_{2k} z^{-2k}) \cos 2k\psi - \\ - (A_{2k-1} z^{2k-1} + B_{2k-1} z^{-2k-1}) \sin (2k-1)\psi] \end{aligned} \quad (4.2)$$

A_k, B_k — искомые постоянные.

Пользуясь контурными условиями задачи: $\Phi = 0$ при $z = 1$ и $\Phi = C_0$ при $z = \lambda$, учитывая при этом (1.16), (4.1) и (4.2), находим

$$C_0 = \frac{\pi\tau}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (1 - \lambda^{2k})^2 a_k^2$$

$$\begin{aligned}
A_0 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^6 (1 + i^{4k}) a_k^2 \\
A_{2k} &= R^{-2} (1 - i^{4k})^{-1} \left[\sum_{m=1}^{6-2k} (1 - 2i^{2m+4k} + i^{4m+4k}) a_m a_{2k+m} - \right. \\
&\quad \left. - \sum_{m=1}^{2k-1} (-1)^m i^{4k-2m} (1 - i^{4m}) a_m a_{2k-m} \right] \\
B_{2k} &= -R^{-2} (1 - i^{4k})^{-1} \left[\sum_{m=1}^{6-2k} (1 - 2i^{2m} + i^{4m+4k}) a_m a_{2k+m} + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{m=1}^{2k-1} (-1)^m (1 - i^{4k-2m}) a_m a_{2k-m} \right] \\
A_{2k-1} &= -R^{-2} (1 - i^{4k-2})^{-1} \left[\sum_{m=1}^{7-2k} (-1)^m (1 - 2i^{2m+4k-2} + \right. \\
&\quad \left. + i^{4m+4k-2}) a_m a_{2k-m-1} - \sum_{m=1}^{2k-1} i^{4k-2m-2} (1 - i^{4m}) a_m a_{2k-m-1} \right] \\
B_{2k-1} &= -R^{-2} (1 - i^{4k-2})^{-1} \left[\sum_{m=1}^{7-2k} (-1)^m (1 - 2i^{2m} + \right. \\
&\quad \left. - i^{4m+4k-2}) a_m a_{2k-m-1} + \sum_{m=1}^{2k-1} (1 - i^{4k-2m-2}) a_m a_{2k-m-1} \right] \\
&\quad (k=1, 2, \dots, 6)
\end{aligned}$$

Коэффициенты a_k определяются по (1.17). Таким образом, функция Φ полностью определена. Крутящий момент определяется по формуле

$$M = 2C_s F_0 - 2 \int_V \Phi dx dy$$

Так как $F_0 = 0$ (площадь, ограниченная разрезом, равна нулю), то

$$M = 2 \int_V \Phi dx dy = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \Psi(z, \bar{z}) \omega(z e^{i\theta}) \bar{\omega}(z e^{-i\theta}) dz d\bar{z} \quad (4.3)$$

где

$$\omega(z e^{i\theta}) = \omega(z) = \frac{dz}{dz_0}$$

Касательные напряжения определим по формулам

$$z_7 = \frac{x \frac{\partial x}{\partial \theta} + y \frac{\partial y}{\partial \theta} - R^2 \frac{\partial \Phi_0}{\partial \theta}}{\rho \left| \left(\frac{\partial x}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta} \right)^2 \right|^{1/2}} \quad (4.4)$$

$$z_8 = \frac{x \frac{\partial x}{\partial \rho} + y \frac{\partial y}{\partial \rho} - R^2 \frac{\partial \Phi_0}{\partial \rho}}{\left| \left(\frac{\partial x}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho} \right)^2 \right|^{1/2}} \quad (4.5)$$

Согласно (1.16)

$$\begin{aligned} x &= \sum_1^n \left[a_{2k-1} \left(\rho^{2k-1} + \frac{\lambda^{4k-2}}{\rho^{2k-1}} \right) \cos(2k-1)\theta - a_{2k} \left(\rho^{2k} + \frac{\lambda^{4k}}{\rho^{2k}} \right) \sin 2k\theta \right] \\ y &= \sum_1^n \left[a_{2k-1} \left(\rho^{2k-1} - \frac{\lambda^{4k-2}}{\rho^{2k-1}} \right) \sin(2k-1)\theta + a_{2k} \left(\rho^{2k} - \frac{\lambda^{4k}}{\rho^{2k}} \right) \cos 2k\theta \right] \end{aligned}$$

Для получения числовых результатов рассмотрим случай

$$\nu = \lambda = 0.25$$

Из (1.17) имеем

$$\begin{aligned} a_1 &= 0.93750000R, & a_2 &= -0.20703125R \\ a_3 &= -0.10156250R, & a_4 &= 0.03613280R \\ a_5 &= 0.01953125R, & a_6 &= -0.00781250R \end{aligned}$$

Далее находим

$$\begin{aligned} A_0 &= 0.4686322, & A_1 &= -0.2327116 \\ A_2 &= -0.0536258, & A_3 &= 0.0259236 \\ A_4 &= 0.0137898, & A_5 &= -0.0051192 \\ A_6 &= 0.0011763, & A_7 &= -0.0004733 \\ A_8 &= -0.0000068, & A_9 &= 0.0000002 \\ A_{10} &= A_{12} = 0, & A_{11} &= 0 \\ B_1 &= -0.2082840, & B_2 &= 0.9205706 \\ B_3 &= 0.4098398, & B_4 &= -0.2447764 \end{aligned}$$

$$B_4 = -0.1140064, \quad B_6 = 0.0607212$$

$$B_2 = 0.0296006, \quad B_8 = -0.0085008$$

$$B_0 = -0.0029980, \quad B_{10} = 0.0009460$$

$$B_{11} = 0.0003052, \quad B_{12} = -0.0000610$$

Значение постоянного коэффициента C_0 не приводится, так как он исключен из выражения крутящего момента.

Из (4.3) находим

$$M = 0.4932\pi\tau R^4 \quad (4.6)$$

Для сравнения и проверки точности вычислений приведем значения крутящего момента:

для круга радиуса R без разреза

$$M = 0.5\pi\tau R^4 \quad (4.7)$$

для кольца с внешним радиусом R и с внутренним радиусом $0.5R$

$$M = 0.4688\pi\tau R^4$$

для кольца с внешним радиусом R , внутренней окружности которого проходит через крайние точки рассматриваемого разреза (внутренний радиус $\approx 0.56R$)

$$M = 0.4509\pi\tau R^4$$

Согласно (4.6) и (4.7) рассматриваемый разрез не оказывает существенного влияния на значение крутящего момента.

Значения касательных напряжений τ_θ ($\tau_r = 0$) на внешнем контуре сечения ($\rho = 1$) и в точках разреза ($\rho = \lambda = 0.25$) приведены в табл. 1. Из этой таблицы видно, что наибольшее и наименьшее напряжения на внешнем контуре мало отличаются друг от друга ($\tau_{\theta 0}^0$), при этом наибольшее напряжение отличается от наибольшего касательного напряжения круглого сечения без разреза ($= \tau R^2$ на 4%).

Таким образом, рассматриваемый разрез не оказывает существенного влияния на величину и распределение касательных напряжений внешнего контура.

В точках разреза $y = \frac{\partial x}{\partial \eta} = 0$, вследствие чего формула (4.3) упрощается

$$\tau_\theta = - \frac{\frac{\partial \Phi_0}{\partial \eta}}{\left| \frac{\partial y}{\partial \eta} \right|} R^2 \tau_0 \quad (4.8)$$

На концах разреза ($x = \pm 0.468R$, $\theta = 6^\circ 41'$ и $180^\circ - 6^\circ 41'$)

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial \Phi_0}{\partial \eta} = 0$$

Вследствие этого в указанных точках $\tau_0 = \infty$.

Легко показать, что главный вектор касательных усилий, действующих в окрестности каждой из крайних точек разреза, стремится к нулю, то есть что в указанных точках имеет место концентрация напряжений

Таблица 1

φ_0	$\varphi = 0,25$	$\varphi = 1$	$\varphi = 1$	$\varphi = 0,25$	$\varphi = 1$
	τ_0/R	τ_0/R	τ_0/R	τ_0/R	τ_0/R
-90	0	0	-0,7475	0,0126	0,9818
-80	0,0740	0,1376	-0,7407	0,0216	0,9786
-70	0,1462	0,2719	-0,7129	0,0487	0,9742
-60	0,2149	0,3981	-0,6670	0,0951	0,9790
-50	0,2785	0,5113	-0,6062	0,1629	0,9992
-40	0,3352	0,6099	-0,5362	0,2570	1,0273
-30	0,3837	0,6970	-0,4610	0,3891	1,0400
-20	0,4225	0,7771	-0,3797	0,5901	1,0210
-10	0,4502	0,8509	-0,2868	0,9693	0,9887
-5	0,4595	0,8842	-0,2345	1,3661	0,9773
0	0,4656	0,9140	-0,1779	2,3261	0,9726
+5	0,4683	0,9395	-0,1173	9,7421	0,9754
+6,41'	0,4680			∞	
+10	0,4676	0,9602	-0,0532	3,5177	0,9850
+15	0,4632	0,9758	0,0140	1,2593	0,9996
+20	0,4552	0,9866	0,0841	0,6378	1,0157
+25	0,4435	0,9928	0,1573	0,3314	1,0291
+30	0,4281	0,9944	0,2343	0,1402	1,0362
+35	0,4089	0,9910	0,3163	0,0046	1,0352
+40	0,3860	0,9811	0,4045	-0,0993	1,0276
+45	0,3595	0,9624	0,4997	-0,1826	1,0164
+55	0,2964	0,8858	0,7103	-0,3087	0,9965
+65	0,2213	0,7338	0,9312	-0,3962	0,9893
+75	0,1368	0,4915	1,1225	-0,4526	0,9918
+80	0,0921	0,3398	1,1914	-0,4701	0,9941
+90	0	0	1,2501	-0,4840	0,9966

В табл. 2 приведены значения касательных напряжений τ_0 ($\tau_0 = 0$), возникающих в точках оси симметрии сечения (в точках оси y).

Таблица 2

$\theta = \pi/2$			$\theta = -\pi/2$		
ρ	y/R	$\tau_0/\rho^2 R$	ρ	y/R	$\tau_0/\rho^2 R$
0.25	0	0.0126	0.25	0	-0.4940
0.30	-0.0779	0.1619	0.30	0.0977	-0.3037
0.35	-0.1453	0.2752	0.35	0.1839	-0.1615
0.40	-0.2058	0.3665	0.40	0.2638	-0.0564
0.45	-0.2615	0.4436	0.45	0.3405	0.0409
0.50	-0.3138	0.5110	0.50	0.4156	0.1286
0.55	-0.3634	0.5776	0.55	0.4903	0.2144
0.60	-0.4109	0.6273	0.60	0.5655	0.2937
0.65	-0.4567	0.6795	0.65	0.6419	0.3758
0.70	-0.5012	0.7289	0.70	0.7200	0.4556
0.75	-0.5446	0.7763	0.75	0.8003	0.5383
0.80	-0.5870	0.8222	0.80	0.8832	0.6231
0.85	-0.6287	0.8670	0.85	0.9692	0.7153
0.90	-0.6696	0.9110	0.90	1.0587	0.8019
0.95	-0.7100	0.9545	0.95	1.1522	0.8976
1.00	-0.7498	0.9818	1.00	1.2501	0.9956

В этих точках

$$x = 0, \quad \theta = \pm \frac{\pi}{2}, \quad 0.25 \leq \rho \leq 1$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \rho} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial \rho} &= \pm \sum_1^3 (-1)^{k-1} a_{2k-1} (2k-1) \left(\rho^{2k-2} + \frac{\rho^{4k-2}}{\rho^{2k}} \right) \mp \\ &\mp 2 \sum_1^3 (-1)^k a_{2k} \left(\rho^{2k-1} + \frac{\rho^{4k}}{\rho^{2k+1}} \right) \\ \frac{\partial \Phi_0}{\partial \rho} &= \mp 2 \sum_1^6 (-1)^k \left(A_{2k} \rho^{2k-1} - \frac{\rho^{4k} B_{2k}}{\rho^{2k+1}} \right) \mp \\ &\mp \sum_1^6 (-1)^{k-1} (2k-1) \left(A_{2k-1} \rho^{2k-2} + \frac{\rho^{4k-2} B_{2k-1}}{\rho^{2k}} \right) \\ \tau_0 &= \frac{y \frac{\partial y}{\partial \rho} - R^2 \frac{\partial \Phi_0}{\partial \rho}}{\left| \frac{\partial y}{\partial \rho} \right|} \end{aligned}$$

Из двойных знаков верхний относится к значениям $y \geq 0$, а нижний — к значениям $y < 0$.

Օ. Մ. ՍԱՊՈՆՅԱՆ

ՄԻ ՓԱՆԻ ԵՐԿԱՊԻ ՏԵՐԻՄՅՈՒՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ ԿՈՆՅԱՐՄԱՆ ԱՐՏԱՊԱՏԻԿԵՐԴԱՆ
ՅԱՌՆԿՑԻՈՆՆԵՐԻ ԿՈՒՐՈՅՈՒՄԸ ԵՎ ԴՐԱՆՅԻՑ ԴԵՐԻ
ԿԻՐԱՌՈՒՄԸ ԱՂԱՐՄԱՆ ԿՆՊՐՈՒՄ

Ա Մ Փ Ր Ո Ւ Մ

Հորանի շարքի օգնությամբ կառուցված են օղակի տիրույթի մի բանի Երկ-
կապ տիրույթների վրա կոնյարմ արտապատկերման ֆունկցիաներ: Դրանց
կառուցումը համեմատաբար հեշտ է իրադրվում, երբ Երկկապ տիրույթի
ներսից սահմանափակված է ուղղաչիժ ճեղքով, իսկ դրսից՝ պարզ եզրաղծով:
Դիտարկված են ուղղաչիժ ճեղք ունեցող անվերջ շերտի և շրջանի տիրույթնե-
րի արտապատկերման մի բանի զեպքեր: Դիտարկված են նաև արտապատկեր-
ման ալլ զեպքեր:

Հեղր ունեցող շրջանի արտապատկերման ֆունկցիան, այն զեպքում, երբ
հեղրը պուսճնա է շրջանի տրամագծերից մեկին, օպտադրվել է համապա-
տասխան կարվածք ունեցող ձողի ոլորման ինդիրը լուծելու:

CONSTRUCTION OF SOME CONFORMAL MAPPING
FUNCTIONS FOR DOUBLE-CONNECTED REGIONS AND
THEIR APPLICATION TO THE TORSION PROBLEM

O. M. SAPONJIAN

S u m m a r y

This paper presents constructions of Laurent's series that map a circular ring onto some double-connected regions. Such transformations are comparatively easy to realize when the inner rim is a linear crack and the outer rim is a plane curve. Transformations of some cases of infinite strips and disks with a linear crack are considered. Other mappings are also presented.

The transformation of a circular ring onto the region of a circle with the crack which is parallel to the diameter is used to solve the corresponding problem of torsion.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Канторович Л. В. и Крылов В. П. Приближенные методы высшего анализа. Гос-
техиздат, Л.-М., 1952.
2. Угличков А. Г., Басов В. В., Кулатин Ю. М. К решению плоских задач теории
пластичности в криволинейных координатах. Методы решения задач упругости
и пластичности. Горький, 1969.
3. Нейман М. И. Напряжения в балке с криволинейным отверстием. М., 1937.
4. Грештейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и производений.
Физматгиз, М., 1962.
5. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упру-
ости. М., 1954.