

А. М. МКРТЧЯН

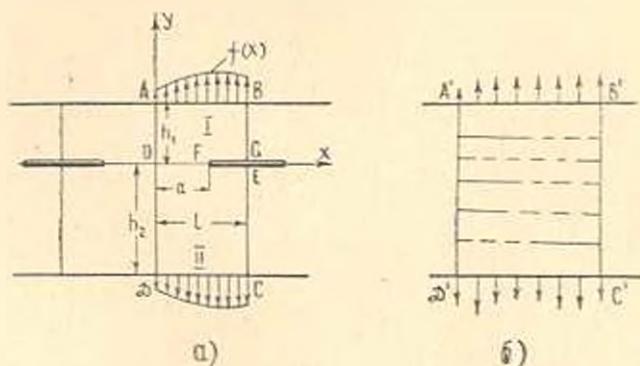
ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПОЛОСЫ С НЕЦЕНТРАЛЬНЫМИ РАЗРЕЗАМИ

Решается плоская задача теории упругости для полосы с периодическими, нецентральными, параллельными кромкам разрезами, нагруженной периодической нагрузкой.

Задача после решения парных уравнений [1] сводится к определению неизвестных коэффициентов функции напряжений из квази-волне регулярных бесконечных систем линейных уравнений.

Вопрос влияния разрезов на распределение напряжений в упругом теле рассматривался многими авторами. В шестой главе [2] и в работах [3—5] исследованы некоторые плоские и осесимметричные задачи для областей, ослабленных разрезами. Решение задачи изгиба прямоугольной пластинки с центральным разрезом приводится в работе [6].

1. Рассмотрим полосу, имеющую периодические нецентральные, параллельные кромкам разрезы (фиг. 1а). Примем, для краткости выкладок, что к обоим краям полосы $y_1 = h_1$ и $y_2 = -h_2$ приложены одинаковые периодические нормальные нагрузки $f(x)$, а края разрезов свободны от внешних воздействий.



Фиг. 1.

В силу симметрии решаем задачу только в области $ABCD$, которую делим на две подобласти $ABGO$ и $OFCD$, приписывая им индексы соответственно (1) и (2).

Имеем следующие граничные условия:

$$\sigma_{yy} = 0 \text{ по всей границе } ABGEFCD$$

$$u = 0 \text{ при } x = 0, \quad x = l \quad (1.1)$$

$$z_y^{(i)} = \begin{cases} f(x) = \frac{a_i}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos 2_k x \text{ при } y = y_i \text{ (} 0 \leq x \leq l \text{)} & (i = 1, 2) \\ 0 & y = 0 \text{ (} a < x \leq l \text{)} \end{cases}$$

где

$$a_k = \frac{k\pi}{l}, \quad y_1 = \bar{h}_1, \quad y_2 = \bar{h}_2$$

и условия сопряжения на линии $y = 0$

$$\begin{aligned} u_1 &= u_2, \quad v_1 = v_2, \quad (0 < x < a) \\ z_y^{(1)} &= z_y^{(2)}, \quad z_{yy}^{(1)} = z_{yy}^{(2)} \quad (a < x \leq l) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Напряжения и перемещения определяются через бигармонические функции Эйри $\Phi_i(x, y)$ по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(i)} &= \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^2}, \quad \sigma_y^{(i)} = \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial y^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x \partial y} \\ E u_i &= \int \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial y^2} dy - \nu \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \\ E v_i &= \int \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^2} dx - \nu \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} + E v_i^{(0)} \end{aligned} \quad (1.3)$$

где νE , ν — упругие постоянные, а $u_i^{(0)} = y_i$, $v_i^{(0)} = 0$.

Исходя из (1.2) и (1.3), функции $\Phi_i(x, y)$ ищем в виде

$$\begin{aligned} \Phi_i(x, y) &= c_i x^2 + d_i y^2 + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k^{(i)} \operatorname{sh} 2_k y + B_k^{(i)} \operatorname{ch} 2_k y + \\ &+ a_k y (C_k^{(i)} \operatorname{sh} 2_k y + D_k^{(i)} \operatorname{ch} 2_k y)] \cos 2_k x \quad (i = 1, 2) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Удовлетворяя условиям (1.1) и (1.2), получим

$$\begin{aligned} A_k^{(i)} &= \left(x_k^{(i)} \lambda_k^{(i)} + \frac{\operatorname{ch}^2 p_k}{2\alpha_k^2} \right) X_k - \left(\beta_k^{(i)} \lambda_k^{(i)} + \frac{\operatorname{ch}^2 p_k}{2\alpha_k^2} \right) Y_k + a_k (\lambda_k^{(i)} \gamma_k^{(2)} - \operatorname{sh} q_k) \\ B_k^{(i)} &= \left(x_k^{(i)} \operatorname{sh}^2 p_k - \frac{x_k^{(i)}}{2\alpha_k^2} \right) X_k + \left(\beta_k^{(i)} \operatorname{sh}^2 p_k - \frac{\beta_k^{(i)}}{2\alpha_k^2} \right) Y_k + a_k (\gamma_k^{(2)} \operatorname{sh}^2 p_k - \operatorname{ch} p_k) \\ C_k^{(i)} &= \nu_k^{(i)} X_k + \beta_k^{(i)} Y_k + a_k \gamma_k^{(1)}, \quad c_1 = c_2 = \frac{\sigma_0}{4}, \quad d_1 = d_2 = \nu \frac{\sigma_0}{4} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь введены обозначения

$$X_k = \alpha_k^2 (D_k^{(1)} + D_k^{(2)}), \quad Y_k = \alpha_k^2 (D_k^{(1)} - D_k^{(2)})$$

$$z_k^{(1)} = \frac{1}{2\alpha_k^2 \Delta_k} (\text{sh}^2 p_k \text{sh}^2 q_k - q_k^2 - \lambda_k^{(2)} \mu_k^{(1)})$$

$$\beta_k^{(1)} = \frac{1}{2\alpha_k^2 \Delta_k} [q_k^2 + \text{sh}^2 q_k (\text{sh}^2 p_k - 1) - \lambda_k^{(2)} \mu_k^{(1)}]$$
(1.6)

$$\gamma_k^{(1)} = \frac{1}{\Delta_k} [(\text{ch} q_k - \text{ch} p_k) \lambda_k^{(2)} + \text{sh}^2 q_k (\text{sh} p_k + \text{sh} q_k)]$$

$$\Delta_k = -\alpha_k^{(2)} \text{sh}^2 p_k - \mu_k^{(1)} \text{sh}^2 q_k; \quad p_k = z_k h_1; \quad q_k = z_k h_2$$

$$\lambda_k^{(1)} = p_k + \text{sh} p_k \text{ch} p_k, \quad \mu_k^{(1)} = p_k - \text{sh} p_k \text{ch} p_k$$

Коэффициенты с индексом (2) получаются из соответствующих формул (1.5) заменой (1) \rightarrow (2): $p_k \rightarrow -q_k$, учитывая при этом, что надо заменить

$$X_k \rightarrow X_k, \quad Y_k \rightarrow -Y_k, \quad z_k^{(1)} \rightarrow z_k^{(2)}, \quad \beta_k^{(1)} \rightarrow -\beta_k^{(2)}$$

$$\gamma_k^{(1)} \rightarrow \gamma_k^{(2)}, \quad \lambda_k^{(1)} \rightarrow -\lambda_k^{(2)}, \quad \mu_k^{(1)} \rightarrow -\mu_k^{(2)}, \quad \Delta_k \rightarrow -\Delta_k$$

2. Для определения новых неизвестных X_k, Y_k (1.6), из смешанных условий на линии $y = 0$, получаем парные уравнения

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} [(1 + M_k^{(1)}) X_k + Q_k^{(1)} Y_k] \text{sink}\xi = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} a_k F_k^{(1)} \text{sink}\xi \quad (0 < \xi < \xi_1)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} [(1 + M_k^{(2)}) X_k + Q_k^{(2)} Y_k] \text{sink}\xi = \sum_{k=1}^{\infty} a_k F_k^{(2)} \text{sink}\xi \quad (\xi_1 < \xi \leq \pi)$$
(2.1)

$$\frac{E_0}{2l} Y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} Y_k \text{cosk}\xi = 0 \quad (0 < \xi < \xi_1)$$

$$4a_1 - \sum_{k=1}^{\infty} [(1 + N_k) Y_k + P_k X_k] \text{cosk}\xi = \sum_{k=1}^{\infty} a_k F_k^{(2)} \text{cosk}\xi \quad (\xi_1 < \xi \leq \pi)$$

где

$$\xi = \frac{\pi x}{l}, \quad \xi_1 = \frac{\pi a}{l}$$

$$\Delta_k M_k^{(1)} = \frac{1}{2} (p_k^2 - q_k^2) + p_k q_k - \text{sh} p_k \text{sh} q_k e^{-(p_k + q_k)} -$$

$$- \left(\frac{1}{2} - q_k \right) \text{sh}^2 p_k - \left(\frac{1}{2} - p_k \right) \text{sh}^2 q_k$$

$$\begin{aligned}
\Delta_k M_k^{(2)} &= p_k^2 (q_k + \operatorname{sh} q_k \operatorname{ch} q_k) + q_k (p_k + \operatorname{sh} p_k \operatorname{ch} p_k) \\
\Delta_k Q_k^{(1)} &= p_k \operatorname{sh} q_k \operatorname{ch} q_k - q_k \operatorname{sh} p_k \operatorname{ch} p_k + \frac{1}{2} (p_k - q_k + \operatorname{sh}^2 q_k - \operatorname{sh}^2 p_k) \\
\Delta_k Q_k^{(2)} &= \operatorname{sh} p_k \operatorname{sh} q_k (e^{-p_k} - e^{-q_k}) + p_k^2 (q_k + \operatorname{sh} q_k \operatorname{ch} q_k) - \\
&\quad - q_k^2 (p_k + \operatorname{sh} p_k \operatorname{ch} p_k) + p_k \operatorname{sh}^2 q_k - q_k \operatorname{sh}^2 p_k \quad (2.2) \\
\Delta_k N_k &= q_k (q_k + 1) \operatorname{sh}^2 p_k + p_k (p_k + 1) \operatorname{sh}^2 q_k + \\
&\quad + \operatorname{sh} p_k \operatorname{sh} q_k (\operatorname{sh} p_k e^{-q_k} + \operatorname{sh} q_k e^{-p_k}) \\
\Delta_k P_k &= p_k^2 \operatorname{sh}^2 q_k - q_k \operatorname{sh}^2 p_k \\
\Delta_k F_k^{(1)} &= (\operatorname{ch} p_k - \operatorname{ch} q_k) (\operatorname{sh} p_k \operatorname{ch} q_k + \operatorname{sh} q_k \operatorname{ch} p_k - p_k - q_k) \\
\Delta_k F_k^{(2)} &= 2 [(\operatorname{ch} p_k \operatorname{ch} q_k - 1) (q_k \operatorname{sh} p_k - p_k \operatorname{sh} q_k) - \\
&\quad + (\operatorname{ch} p_k - \operatorname{ch} q_k) (\operatorname{sh} p_k \operatorname{sh} q_k - p_k q_k)] \\
\Delta_k F_k^{(3)} &= 2 (\operatorname{sh} p_k \operatorname{sh}^2 q_k + \operatorname{sh} q_k \operatorname{sh}^2 p_k + p_k \operatorname{ch} p_k \operatorname{sh}^2 q_k + q_k \operatorname{sh}^2 p_k \operatorname{sh} q_k)
\end{aligned}$$

Поступая аналогично [1], приведем парные уравнения к бесконечным системам

$$\begin{aligned}
X_k &= -\frac{k}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [M_n^{(1)} X_n + Q_n^{(1)} Y_n - a_n F_n^{(1)}] I_{nk}^{(1)} - \\
&\quad - \frac{k}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [M_n^{(2)} X_n + Q_n^{(2)} Y_n - a_n F_n^{(2)}] I_{nk}^{(2)} \\
Y_k &= -4c_1 y_k (\cos^2 \xi_1) - \frac{k}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [N_n Y_n + P_n X_n + a_n F_n^{(3)}] K_{nk} \quad (2.3)
\end{aligned}$$

Все уравнения системы (2.1), кроме третьего, удовлетворяются. Подставляя Y_k в третье уравнение, после некоторых преобразований получим

$$EY_0 = -\frac{16c_1 l}{\pi} \ln \left(\sin \frac{\xi_1}{2} \right) - \frac{l}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} [P_k X_k + N_k Y_k - a_k F_k^{(3)}] \frac{y_k (\cos^2 \xi_1)}{k}$$

где

$$I_{nk}^{(1)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} y_l (\cos \theta) y_n (\cos \theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta$$

$$K_{nk}^{(1)} = \int_{\xi_1}^{\xi_2} y_k(\cos\theta) y_n(\cos\theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta$$

$$K_{ni} = \int_{\xi_1}^{\xi_2} z_k(\cos\theta) z_i(\cos\theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta \quad (2.4)$$

$$y_k(x) = P_k(x) - P_{k-1}(x), \quad z_k(x) = P_{k-1}(x) - P_k(x)$$

$P_k(x)$ — полиномы Лежандра.

Значения интегралов (2.4), а также интегральные представления для функций $y_k(x)$, $z_k(x)$ приведены в работе [1].

Из (2.2) видно, что коэффициенты $M_k^{(1)}$, $M_k^{(2)}$, N_k , P_k , $Q_k^{(1)}$, $Q_k^{(2)}$ имеют порядок $O(k^2 e^{-\varepsilon k})$, а $F_k^{(1)}$, $F_k^{(2)}$, $F_k^{(3)} = O(e^{-\varepsilon k})$, где $\varepsilon = \min\left(\frac{h_1}{l}, \frac{h_2}{l}\right) > 0$.

Система (2.3) квази-вполне регулярна, так как упомянутые коэффициенты имеют порядок $O(k^{-1})$ [1].

3. Напряжения и перемещения во всей области определяются при помощи (1.3). Ряды, входящие в формулы напряжений на линии $y=0$, плохо сходятся из-за особенности в точке $\xi = \xi_1$. Выделяя главные части этих рядов, получим

$$\sqrt{2} \sigma_y \left(\frac{\xi l}{\pi}, 0 \right) = \frac{K_1 \cos \frac{\xi}{2}}{\sqrt{\cos^2 \xi_1 - \cos^2 \xi}} - \cos \frac{\xi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} k T_k^{(1)} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{y_k(\cos\theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta}{\sqrt{\cos^2 \xi - \cos^2 \theta}} \quad (\xi < \xi_1) \quad (3.1)$$

$$\sqrt{2} \tau_{xy} \left(\frac{\xi l}{\pi}, 0 \right) = \frac{K_2 \sin \frac{\xi}{2}}{\sqrt{\cos^2 \xi_1 - \cos^2 \xi}} + \sin \frac{\xi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} k T_k^{(2)} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{z_k(\cos\theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta}{\sqrt{\cos^2 \xi - \cos^2 \theta}} \quad (\xi < \xi_1)$$

где

$$K_1 = 4c_1 + \sum_{k=1}^{\infty} T_k^{(1)} z_k(\cos^2 \xi_1)$$

$$K_2 = \sum_{k=1}^{\infty} T_k^{(2)} y_k(\cos^2 \xi_1)$$

$$2T_k^{(1)} = P_k X_k + N_k Y_k + a_k F_k^{(3)}$$

$$2T_k^{(2)} = (M_k^{(2)} - M_k^{(1)}) X_k + (Q_k^{(2)} - Q_k^{(1)}) Y_k + (F_k^{(1)} - F_k^{(2)}) a_k$$

(3.2)

Быстрая сходимость рядов в формулах (3.1) делает их удобными для вычислений во всем интервале ($0 \leq \xi < \xi_1$). В точке $\xi = \xi_1$ вторые слагаемые исчезают и σ_1 и σ_2 имеют особенности с коэффициентами

$$K' = K_2 \cos \frac{\xi_1}{2}, \quad K'' = K_2 \sin \frac{\xi_1}{2}$$

Вследствие деформации границы разреза расходятся на величину

$$\delta \left(\frac{\xi l}{\pi}, 0 \right) = v_1 \left(\frac{\xi l}{\pi}, 0 \right) - v_2 \left(\frac{\xi l}{\pi}, 0 \right) \quad (3.3)$$

которая представится формулой

$$\begin{aligned} \frac{\pi E}{2l} \delta \left(\frac{\xi l}{\pi}, 0 \right) = & 8c_1 \ln \frac{\sin \frac{\xi}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\cos \xi_1 - \cos \xi}}{\sin \frac{\xi_1}{2}} + \\ & + \sqrt{2} \sin \frac{\xi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} T_k^{(1)} \int_{\xi}^{\xi_1} \frac{z_k(\cos \theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta}{|\cos \theta - \cos \xi|} \quad (\xi > \xi_1) \quad (3.4) \end{aligned}$$

Таблица 1

$\xi_1 = \frac{\pi}{3}$	$\xi = 0$	$\xi = \frac{\pi}{4}$	$\xi = \frac{\pi}{3}$
σ_1/q	3.1982	8.8055	∞
σ_2/q	0	1.3156	∞
$K'_2 = 1.065; K''_2 = 0.2709; \delta(l, 0) = 7.9627 \frac{2lq}{E}$			

Рассмотрим полосу конкретных размеров

$$\frac{h_1}{l} = \frac{1}{2}, \quad \frac{h_2}{l} = 1$$

под действием растягивающей силы

$$f \left(\xi \frac{l}{\pi} \right) = \begin{cases} 0 & \left(0 \leq \xi < \frac{\pi}{2} \right) \\ q & \left(\frac{\pi}{2} < \xi < \pi \right) \end{cases}$$

В этом случае система (2.3), как показывают вычисления, вполне регулярна $\left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < 0.55 \right)$.

Значения величин $\varepsilon_u \left(\frac{l}{\pi}, 0 \right)$, $\varepsilon_{xy} \left(\frac{y}{\pi}, 0 \right)$, $\varepsilon \left(\frac{y}{\pi}, 0 \right)$, K_1^* и K_2^* , вычисленные для двух случаев длины разреза $\pi - \varepsilon_1$, приведены в табл. 1, 2.

Таблица 2

$\varepsilon_1 = \frac{2x}{3}$	$\varepsilon = 0$	$\varepsilon = \frac{\pi}{3}$	$\varepsilon = \frac{\pi}{2}$	$\varepsilon = \frac{2}{3}\pi$
ε_u/q	2.3157	2.4232	1.9820	∞
ε_{xy}/q	0	-0.0489	-0.0257	∞
K_1^*	0.7246;	K_2^*	0.0518;	$\varepsilon \left(l, 0 \right) = 2.5212 \frac{2lq}{\pi}$

Аналогичным образом можно решить задачу для полосы, имеющей периодический элемент $A'B'C'D'$ с несколькими разрезами (фиг. 16).

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 30 VI 1970

Ա. Մ. ՄԿՐՏՉԻԱՆ

ՈՉ ԿԵՆՏՐՈՆԱԿԱՆ ԿՏՐՎԱՆՔՆԵՐ ՌԵՆԵՑՈՂ ՇԵՐՏԻ ՀԱՐՔ ԿՆԴԻՐԸ

Ա. մ փ ո փ ո ս մ

Ճիշարվում է ոչ կենտրոնական, եզրերին զուգահեռ սարքերական կտրվածքներ ունեցող շերտի առաձգականության տեսության հարթ խնդիրը: Խնդիրը բերվում է բնագիտության ոլորտում և լուծվում է զգալի-լիմիտի սկզբնական դրանքի հավասարումների անփոք սխառեմից անորոշ զորակերպների գտնելու:

Բերվում է թվային օրինակ:

PLANE PROBLEM FOR A STRIP WITH NONCENTRAL SLITS

A. M. MKRTCHIAN

S u m m a r y

The plane problem of the theory of elasticity for a strip with noncentral periodical slits parallel to edges under a periodical load is considered.

The solution is reduced to finding the unknown coefficients from quasi-regular infinite systems of linear algebraic equations. A numerical example is presented.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Баблюя А. А. Решение некоторых парных уравнений, встречающихся в задачах теории упругости. ПММ, т. 31, вып. 4, 1967.
2. Мухомелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. Наука, М., 1966.
3. Sneddon I. N., Srivastav R. R. The Stress in the Vicinity of an Infinite Row of Collinear Cracks in an Elastic Body. Proc. Roy. Soc. Edin. A. vol. LXVII, Pt. № 1, 1965.
4. Пальцин Н. В. Напряжения в упругом слое, ослабленном двумя круглыми щелями. Прикл. механ., т. 3, вып. 2, 1967.
5. Сметанин Б. И. Некоторые задачи о щелях в упругом клине и слое. Инж. журнал МТТ, № 2, 1968, 115—122.
6. Сапонджян О. М. Об одном случае изгиба тонкой прямоугольной плиты. Докл. АН АрмССР, т. XXXVII, № 3, 1963.
7. Янке Е. и Эмде Ф. Таблицы функций. Изд. физ.-мат. литературы, М., 1959.