ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXIV, № 1, 1971 Механика

А. Г. БАГДОЕВ

ИССЛЕДОВАНИЕ ОКРЕСТНОСТИ ВОЛНЫ ВБЛИЗИ ОСОБОЙ ЛИНИИ

1. Рассматривается задача по определению решения линейной гиперболической системы уравнений в окрестности соединения произвольной волны с дифракционной. В случае волнового уравнения и периодической во времени волны решение задачи дано в [1].

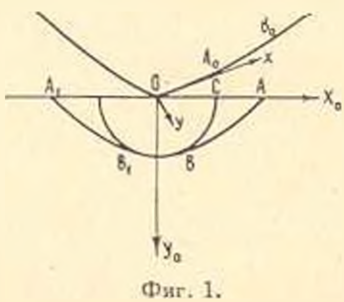
Вначале рассмотрена система с тремя независимыми переменными

$$A_1\frac{\partial u}{\partial x}+A_2\frac{\partial u}{\partial y}+A_3\frac{\partial u}{\partial t}=0 \tag{1.1}$$

где элементы матриц $A_{1,2,3}$ постоянны, u есть вектор $\{u_k\}$. Для системы (1) поставлена задача Коши с условиями, заданными за начальной волной A_0B_0 [2], [3]

$$u_l=a_l(-\tau_1)^{\alpha_l}(x_1)^{\beta_l} \tag{1.2}$$

где $\tau_1=0$ есть уравнение A_0B_0 (фиг. 1). x_1 — координата x вдоль волны A_0B_0, отсчитываемая от начальной точки 0, из которой образуется дифракционная волна BB_1, $0x$ касательна волне A_0B_0 в 0. Следует отметить, что поставленная выше задача возникает при отражении волн от клина или более сложных плоских кривых, образующих угол.



Фиг. 1.

Тогда область возмущенного движения ограничена в момент t ударными волнами AB и A_1B_1, касающимися дифракционной волны BB_1, и при обратном движении к моменту $t=0$ получится начальная волна, образующая угол (волна A_0B_0 при этом есть начальное положение AB). При рассмотрении частных задач выяснилось [3], что на решение вблизи точки B соединения волн AB и BB_1 влияет только часть начальной волны A_0B_0, соответствующая $x_1>0$, что и позволяет взять начальное условие в указанном виде. Впрочем, как следует из решения (1.27), участок начальной волны, направленный под углом к A_0B_0, дает первую степень x_1 под квадратным корнем и соответствующее слагаемое более высокого порядка. Координата x выбрана по касательной к начальной волне A_0B_0 в точке 0, координата y — по нормали к A_0B_0 в сторону движения волны [2]. Множители a_i должны удовлетворять условию совместности на начальной волне

$$A_1 \frac{\partial \sigma_1}{\partial x} a + A_2 \frac{\partial \sigma_1}{\partial y} a - A_3 a = 0 \tag{1.3}$$

Для решения системы (1.1) при начальных условиях (1.2) можно применить метод Фурье.

Преобразование по Лапласу от u_l по t можно искать в виде

$$s = -i\omega, \quad \bar{u}_l = \omega^2 \iint A_l(\alpha, \beta)\, e^{i(\alpha x + \beta y)}\, d\alpha d\beta, \quad \bar{A} = \{A_l\} \tag{1.4}$$

Тогда, с учетом (1.2), из (1.1) можно найти

$$A_1\alpha \bar{A} + A_2\beta \bar{A} - A_3 \bar{A} = \frac{1}{4\pi^2 i\omega} \iint A_3 a\, (-\tau_1)^{\prime} x_1^{1/2} e^{-i\alpha\xi - i\beta\eta}\, d\xi d\eta \tag{1.5}$$

Обозначая через $\Delta(\alpha, \beta)$ определитель (1.5), можно найти

$$A_l(\alpha, \beta) = \frac{B_l(\alpha, \beta)}{\Delta} \frac{1}{4\pi^2 i\omega} \iint (-\tau_1)^{\prime} x_1^{1/2} e^{-i\alpha\xi - i\beta\eta}\, d\xi d\eta \tag{1.6}$$

где B_l линейно выражаются через компоненты A_3a, умноженные на алгебраические дополнения столбцов Δ, причем, предполагая $A_3a = a$ и учитывая, что в (1.3) $\frac{\partial \sigma_1}{\partial x}$, $\frac{\partial \sigma_1}{\partial y}$ вблизи волны AB можно заменить на α, β, можно получить соотношения $a_j = \frac{A_{jj}}{A_{jl}} a_l$ [4],

$$B_l = \sum_j a_j A_{jl} \tag{1.7}$$

Здесь A_{jl} есть алгебраические дополнения элементов a_{jl} в матрице $A = A_1\alpha + A_2\beta - A_3$. В интеграле (1.4) по α, β главную часть решения вблизи волны составляет окрестность характеристического условия

$$\Delta(\alpha, \beta) = 0, \quad \beta = \beta(\alpha) \tag{1.8}$$

После применения теоремы о вычетах и метода перевала, можно найти в стационарных точках (α_0, β_0)

$$x - \xi + \beta'(\alpha_0)(y - \eta) = 0 \tag{1.9}$$

значение интеграла по α, β

$$\iint \frac{B_i}{\Delta} e^{i\omega\alpha(x-\xi)-i\omega\beta(y-\eta)}\, d\alpha d\beta = 2\pi i \sqrt{2\pi}\, \frac{B_i(\alpha_0, \beta_0)}{\Delta_3(\alpha_0, \beta_0)} \times$$

$$\times \frac{e^{i\omega\alpha_0(x-\xi)+i\omega\beta_0(y-\eta)}}{\sqrt{-i\omega\beta_0''(y-\eta)}} \tag{1.10}$$

Подставляя в (1.4) и применяя обратное преобразование Лапласа по $s = -i\omega$, можно найти решение вблизи волны AB в виде

$$u_i = \frac{\sqrt{2}}{4\pi} \int\int \frac{B_i(\alpha_0, \beta_0)(-\eta_1)^\lambda x_1^\lambda}{\Delta_3(\alpha_0, \beta_0)\sqrt{-\beta_0''(y-\eta)}} \frac{d\xi d\eta}{[t-\alpha_0(x-\xi)-\beta_0(y-\eta)]^{\frac{1}{2}}} \tag{1.11}$$

Вблизи фронта волны интегрирование в (1.11) идет по малой окрестности начальной точки 0, где $\xi \approx 0$, $\eta \approx 0$, $\xi > 0$.

Уравнение фронта волны AB в момент t, имеющее при $t=0$ вид $y_0 = y_0(x_0)$, дается в виде

$$\begin{gathered}\alpha(x-x_0) + \beta(\alpha)(y-y_0) = t \\ x - x_0 + \beta'(\alpha)(y - y_0) = 0 \\ \alpha + \beta(\alpha) y_0'(x_0) = 0\end{gathered} \tag{1.12}$$

где $x_0 \approx 0$, $y_0 \approx 0$, и, поскольку ось x касательна в 0 к A_0B_0,

$$y_0'(0) = 0, \quad y_0 = \frac{1}{2} y_0''(0) x_0^2, \quad y_0''(0) = k_2 \tag{1.13}$$

Из уравнений (1.12) вблизи точки B можно получить

$$\alpha = -\frac{y_0''(0)\, t}{y} x_0, \quad \beta(\alpha) = \beta(0) - \frac{t y_0''(0)\beta'(0)}{y} x_0 + \frac{1}{2}\beta''(0)\left(\frac{\partial \alpha_0}{\partial x_0}\right)^2 x_0^2$$

$$\beta' = \beta'(0), \quad x_0 = x + \beta' y + \beta''(0) y \alpha, \quad x_0 = \frac{x + \beta' y}{r}$$

$$r = 1 + \beta''(0)\, y \beta(0)\, y_0''(0) \tag{1.14}$$

Используя (1.14), уравнение волны $t = t_ф$ (1.12) можно вблизи B найти в форме

$$t_ф = \beta(0)\, y - \frac{\beta(0)\, y_0''}{2} \frac{(x + \beta' y)^2}{r} \tag{1.15}$$

Уравнение дифракционной волны BB_1 имеет вид $t = t_{диф}$.

$$\begin{gathered}\alpha_3 x + \beta_3 y = t \\ x + \beta_3'(\alpha_3)\, y = 0\end{gathered} \tag{1.16}$$

Вблизи точки B $\alpha_3 \approx 0$, и из (1.16) можно найти

$$\alpha_3 = -\frac{x+\beta' y}{\beta''(0)\, y}, \qquad t_{\text{инфр.}} = \beta(0)\, y - \frac{(x+\beta' y)^2}{2\beta''(0)\, y} \tag{1.17}$$

или

$$t_{\text{инфр.}} - t_{\text{ф}} = -\frac{(x+\beta' y)^2}{2\beta''(0)\, y r} \tag{1.18}$$

Для подынтегральной функции в (1.11) можно найти с помощью (1.9) и учитывая, что $\alpha_0 \approx 0$,

$$t - \alpha_0 (x-\xi) - \beta_0 (y-\eta) = t - \alpha_0 (x-\xi) - \beta(0)(y-\eta) -$$

$$- \beta'(0)\, \alpha_0 (y-\eta) - \frac{\beta''(0)}{2}\, \alpha_0^2 (y-\eta) =$$

$$= t - t_{\text{ф}} + \frac{r}{2\beta''(0)\, y}\left(\xi + \beta'\eta - \frac{x+\beta' y}{r}\right)^2 - \zeta \tag{1.19}$$

где обозначено

$$-\zeta = \beta\eta - \frac{1}{2}\, \beta y_0'' (\xi + \beta'\eta)^2 \tag{1.20}$$

Из сравнения (1.20) с (1.15) видно, что начальное положение AB при $t=0$ выражается уравнением

$$\zeta_1 = 0, \qquad \zeta_1 = -\zeta$$

$$\zeta_1 = \beta\eta - \frac{1}{2}\, \beta y_0'' (\xi + \beta'\eta)^2, \qquad \beta' = \beta'(0) \tag{1.21}$$

Вычисляя по (1.16) и (1.12) кривизны волн AB и BB_1, обозначая через $k_1 = -k_{\text{инфр.}}$ кривизну гиперсферы с центром в точке (x, y) вычисленную в точке $(0, 0)$, и через k_2 кривизну AB в момент $t=0$ можно найти

$$k_1 - k_2 = -\frac{r}{\beta(0)\, \beta''(0)\, y} \tag{1.22}$$

Можно обозначить через

$$x_0 = \frac{x+\beta' y}{r} \tag{1.23}$$

точку пересечения M_0 луча (1.12) с осью x. Вводя переменные $x_1 = \xi + \beta'\eta$ и ζ по (1.21), можно получить вблизи волны из (1.11)

$$u_l = -\frac{\sqrt{2}}{2\pi}\iint \frac{B_l}{\Delta'\beta}\, \frac{\zeta^{l-1} x_1^{\beta_l}}{\beta(0)\sqrt{-\beta_0'' y}} \times$$

$$\times \frac{dx_1\, d\zeta}{\sqrt{t - t_0 - \dfrac{k_1-k_2}{2c_0}\left(x_1 - \dfrac{x+\beta' y}{r}\right)^2 - \zeta}} \tag{1.24}$$

где $c_0 = \frac{1}{\beta(0)}$ есть скорость волны в 0. Как видно из (1.23), величина $\frac{x+\beta' y}{c} = x_0$ есть длина дуги начальной волны от 0 до точки M_0.

Из (1.7) следует $B_l = a_l \sum_j A_{lj}$, кроме того, по (1.8)

$$\alpha \Delta_\alpha' + \beta \Delta_j = \sum_{i,j} (\alpha a_{ij}^1 + \beta a_{ij}^2) A_{ij} = -\sum A_{ll} \tag{1.25}$$

где a_{ij}' — элементы матриц $A_{..}$, что приводит к равенству

$$\frac{B_l}{\Delta_j (\beta - \alpha\beta')} = -a_l, \quad \beta' = 0 \tag{1.26}$$

Тогда (1.24) запишется в виде

$$u_i = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \frac{1}{\beta(0)\sqrt{-\beta''(0)\,y}} \times$$

$$\times \iint \frac{a_j t_0^{\lambda_j - 1} x_1^{\beta_j} dx_1 d\zeta}{\sqrt{t - t_0 - \frac{k_1 - k_2}{2c_0}(x_1 - x_0)^2 - \zeta}} \tag{1.27}$$

Полученное выражение по форме совпадает с решением для волнового уравнения [3] и может быть записано через гипергеометрические функции. Подобным же образом можно получить решение для системы уравнений с четырьмя независимыми переменными

$$A_1 \frac{\partial u}{\partial x} + A_2 \frac{\partial u}{\partial y} + A_3 \frac{\partial u}{\partial z} + A_4 \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \tag{1.28}$$

Начальная волновая поверхность s, из острия 0 которой возникает дифракционная волна Σ, вблизи начальной точки 0 записывается в виде

$$x_0 = x_0(y_0, z_0), \qquad x_0 = \frac{k_2}{2} y_0^2 + \frac{k_4}{2} z_0^2$$

$$k_2 = \left(\frac{\partial^2 x_0}{\partial y_0^2}\right)_0, \quad k_4 = \left(\frac{\partial^2 x_0}{\partial z_0^2}\right)_0 \tag{1.29}$$

Следует особо оговорить, что уравнение (1.29) имеет место для гладкой поверхности s. Однако его можно применять и к поверхностям с угловой точкой (как и в плоском случае), рассматривая одностороннюю окрестность точки 0.

Точнее, через точку $M(x, y, z)$ проводится луч (1.31), в точке пересечения M_0 его с s выбирается система координат, ось y_1 направляется по касательной к линии кривизны s, идущей к точке 0, ось z_1 — по ортогональной к ней линии кривизны, ось x_1 нормальна s. За-тем можно ось y направить по касательной в точке 0 к линии кривизны y_0, ось z направить параллельно z_1. Впрочем, можно отсчитывать z_1 от любой линии y_0, близкой к указанной линии.

Поскольку для поверхности s с угловой точкой 0 с принятой степенью приближения можно считать, что так же, как и для конуса, линии кривизны y_0, обладающие конечной кривизной k_2, сходятся в точку 0 [3], в качестве координаты y_0 можно взять длину дуги этих линий, отсчитываемую от точки 0, а в качестве координаты z_0 — длину дуги линий кривизны z_0 с кривизной $k_4 \sim \frac{1}{y_0}$. В частности, для тела вращения, обозначая через $y = x_1$ дуги меридианов, $x_2 = z$ — дуги параллелей, $x_3 = x$ — расстояние по нормали от s, θ_0 — полуугол в вершине, можно найти уравнение

$$x_3 = \frac{k_2}{2} x_1^2 + \frac{1}{2x_1 \operatorname{tg} \theta_0} x_2^2$$

k_2 — кривизна меридиана. (Отсюда $x_2 \sim x_1^{3/2}$ и при подходе к 0 размеры области по x_2 значительно меньше размеров по x_1, поэтому вместо криволинейной системы y, z можно пользоваться декартовой).

Тогда дифракционная волна соответствует линии $y_0 = 0$ и следует накладывать ограничение на область интегрирования по переменной y, но, вообще говоря, z произвольно.

Начальное условие теперь можно взять в виде

$$u_i = a_i (-\tau_1)_+^{\lambda_i} (y_1)_+^{\mu_i} |z_1|^{\nu_i}, \quad a = \{a_i\} \tag{1.30}$$

где координата $\tau_1 = 0$ дает фронт начальной волны, имеющей угловую точку $\tau_1 = 0$, $y_1 = 0$, $z_1 = 0$, координаты y_1, z_1 суть указанные длины дуг линий кривизны y, z.

Уравнение фронта волны S в момент t, имевшей в момент $t = 0$ вид $x_0 = x_0(y_0, z_0)$, записывается в виде

$$\alpha (x - x_0) + \beta (y - y_0) + \gamma (z - z_0) = t$$

$$(x - x_0) \frac{\partial \alpha}{\partial \beta} + y - y_0 = 0$$

$$(x - x_0) \frac{\partial \alpha}{\partial \gamma} + z - z_0 = 0 \tag{1.31}$$

$$\alpha \frac{\partial x_0}{\partial y_0} + \beta = 0$$

$$\alpha \frac{\partial x_0}{\partial z_0} + \gamma = 0$$

Записывая

$$\alpha_0 = \alpha(0,\ 0)$$

$$\alpha = \alpha_0 + \frac{\partial \alpha_0}{\partial \beta_0}\beta + \frac{\partial \alpha_0}{\partial \gamma_0}\gamma + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \alpha_0}{\partial \beta_0^2}\beta^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \alpha_0}{\partial \gamma_0^2}\gamma^2 \tag{1.32}$$

из (1.31) можно найти с учетом (1.29)

$$\beta = -\alpha_0 k_2 y_0, \quad \gamma = -\alpha_0 k_4 z_0, \quad y_0 = \frac{x\dfrac{\partial \alpha_0}{\partial \beta_0} + y}{r}, \quad z_0 = \frac{x\dfrac{\partial \alpha_0}{\partial \gamma_0} + z}{s} \tag{1.33}$$

где $r = 1 + x\dfrac{\partial^2 \alpha_0}{\partial \beta_0^2}\alpha_0 k_2$, $s = 1 + x\dfrac{\partial^2 \alpha_0}{\partial \gamma_0^2}\alpha_0 k_4$. В (1.32) учтено, что при $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\dfrac{\partial^2 \alpha}{\partial \beta \partial \gamma} = 0$, что обычно выполняется, поскольку $\alpha = \alpha(\beta^2,\ \gamma^2)$, например, в магнитной гидродинамике.

Отсюда и по (1.31) уравнение волны S примет вид

$$t_{\text{ф}} = \alpha_0 x - \frac{k_2 y_0^2 \alpha_0 r}{2} - \frac{k_4 z_0^2 \alpha_0 s}{2} \tag{1.34}$$

Уравнение дифракционной волны Σ имеет вид

$$t_{\text{дифр.}} = \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z, \quad x\frac{\partial \alpha_3}{\partial \beta_3} + y = 0, \quad x\frac{\partial \alpha_3}{\partial \gamma_3} + z = 0 \tag{1.35}$$

Отсюда при малых y, z, β_3, γ_3 можно получить

$$\beta_3 = -\frac{x\dfrac{\partial \alpha_0}{\partial \beta_0} + y}{x\dfrac{\partial^2 \alpha_0}{\partial \beta_0^2}} = -\frac{r y_0}{x\dfrac{\partial^2 \alpha_0}{\partial \beta_0^2}}, \quad \gamma_3 = -\frac{x\dfrac{\partial \alpha_0}{\partial \gamma_0} + z}{x\dfrac{\partial^2 \alpha_0}{\partial \gamma_0^2}} = -\frac{s z_0}{x\dfrac{\partial^2 \alpha_0}{\partial \gamma_0^2}}$$

$$t_{\text{дифр.}} = \alpha_0 x - \frac{\left(x\dfrac{\partial \alpha_0}{\partial \beta_0} + y\right)^2}{2x\dfrac{\partial^2 \alpha_0}{\partial \beta_0^2}} - \frac{\left(x\dfrac{\partial \alpha_0}{\partial \gamma_0} + z\right)^2}{2x\dfrac{\partial^2 \alpha_0}{\partial \gamma_0^2}} \tag{1.36}$$

Тогда по (1.34)

$$t_{\text{дифр.}} - t_{\text{ф}} = -\frac{1}{2}\frac{r y_0^2}{x\dfrac{\partial^2 \alpha_0}{\partial \beta_0^2}} - \frac{1}{2}\frac{s z_0^2}{x\dfrac{\partial^2 \alpha_0}{\partial \gamma_0^2}}$$

Как видно из (1.36), линии y_0, z_0 являются линиями кривизны и для Σ. Обозначая кривизны линий y_0, z_0 на Σ через $-k_1 = \dfrac{1}{\alpha_0 x\dfrac{\partial^2 \alpha_0}{\partial \beta_0^2}}$,

$-k_3 = \dfrac{1}{a_0 x \dfrac{\partial^2 \alpha_0}{\partial \gamma_0^2}}$, можно получить

$$t_{\text{дифр.}} - t_{\text{ф}} = \frac{k_1 - k_2}{2c_0} y_0^2 + \frac{k_3 - k_1}{2c_0} z_0^2, \quad c_0 = \frac{1}{\alpha_0} \tag{1.37}$$

Решение (1.28) при условиях (1.30) можно искать методом Фурье. После введения преобразования по Лапласу по t для u_i можно записать

$$\bar{u}_i = \omega^3 \iiint A_i(\alpha, \beta, \gamma)\, e^{i\omega\alpha x + i\omega\beta y + i\omega\gamma z}\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma \tag{1.38}$$

причем в силу (1.28), (1.30) после обратного преобразования Фурье можно получить

$$A_i = \frac{1}{8\pi^3 \Delta i\omega} \iiint B_i(\alpha, \beta, \gamma)\, (-\tau_1)^{\lambda} y_1^{\lambda} \, |z_1|^{\lambda}\, e^{-i\omega\alpha\xi - i\omega\beta\eta - i\omega\gamma\zeta}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta \tag{1.39}$$

где предположено $A_4 a = a$, причем $B_i = \sum\limits_j a_j A_{ji}$.

Начальные условия a удовлетворяют системе (1.28)

$$\frac{\partial \tau_1}{\partial x} \approx \alpha, \quad \frac{\partial \tau_1}{\partial y} \approx \beta, \quad \frac{\partial \tau_1}{\partial z} \approx \gamma, \quad A_1 \alpha a + A_2 \beta a + A_3 \gamma a - A_4 a = 0 \tag{1.40}$$

Δ есть определитель (1.40), причем имеют место равенства

$$a_j = \frac{A_{ji}}{A_{ii}} a_i, \quad B_i = a_i \sum_j A_{ji}, \quad \alpha\Delta'_\alpha + \beta\Delta'_\beta + \gamma\Delta'_\gamma = -\Sigma A_{ii}$$

$$\frac{B_i}{\Delta'_\alpha \left(\alpha - \beta \dfrac{\partial \alpha}{\partial \beta} - \gamma \dfrac{\partial \alpha}{\partial \gamma}\right)} = -a_i \tag{1.41}$$

Подставляя (1.39) в (1.38), применяя к (1.38) вблизи волны теорему о вычетах, в стационарных точках α, β, γ

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \beta}(x - \xi) + y - \eta = 0, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial \gamma}(x - \xi) + z - \zeta = 0 \tag{1.42}$$

можно найти

$$\iiint B_i\, e^{i\omega\alpha(x-\xi) + i\omega\beta(y-\eta) + i\omega\gamma(z-\zeta)}\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma =$$

$$= \frac{2\pi i B_i(\alpha, \beta, \gamma)}{\Delta'_\alpha}\, e^{i\omega\alpha(x-\xi) + i\omega\beta(y-\eta) + i\omega\gamma(z-\zeta)}\, \frac{2\pi}{x\sqrt{-\omega^2 K}}$$

$$K = \frac{\partial^2 \alpha_0}{\partial \beta_0^2} \frac{\partial^2 \alpha_0}{\partial \gamma_0^2} - \left(\frac{\partial^2 \alpha_0}{\partial \beta_0 \partial \gamma_0}\right)^2 \tag{1.43}$$

и (1.38) примет вид

$$\bar{u}_i = \frac{1}{2\pi}(-i\omega)\iiint(-\eta_1)^{\lambda_1} y_1^{\lambda_2}|z_1|^{\lambda_3}\frac{B_i e^{i\omega[t-\alpha(x-\xi)-\beta(y-\eta)-\gamma(z-\zeta)]}}{\Delta_i x\sqrt{K}}\,d\xi d\eta d\zeta. \tag{1.44}$$

Обратное преобразование по Лапласу дает

$$u_i = \frac{1}{2\pi}\iiint(-\eta_1)^{\lambda_1} y_1^{\lambda_2}|z_1|^{\lambda_3}\frac{B_i}{\Delta_i x\sqrt{K}}\times$$
$$\times\,\delta'\{t-\alpha(x-\xi)-\beta(y-\eta)-\gamma(z-\zeta)\}\,d\xi d\eta d\zeta, \tag{1.45}$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция.

Согласно (1.42) можно получить, используя (1.34),

$$t-\alpha(x-\xi)-\beta(y-\eta)-\gamma(z-\zeta) = t-t_ф+$$
$$+\frac{r}{2x\dfrac{\partial^2\alpha_0}{\partial\beta_0^2}}\left(y_1-\frac{x\dfrac{\partial\alpha_0}{\partial\beta_0}+y}{r}\right)^2+\frac{s}{2x\dfrac{\partial^2\alpha_0}{\partial\gamma_0^2}}\left(z_1-\frac{x\dfrac{\partial\alpha_0}{\partial\gamma_0}+z}{s}\right)^2-h \tag{1.46}$$

где обозначено

$$h = -\alpha_0\xi + k_2\frac{\alpha_0 y_1^2}{2} + k_4\frac{\alpha_0 z_1^2}{2}$$

$$y_1 = \xi\frac{\partial\alpha_0}{\partial\beta_0}+\eta, \quad z_1 = \xi\frac{\partial\alpha_0}{\partial\gamma_0}+\zeta \tag{1.47}$$

Здесь $\alpha_0 = \dfrac{1}{c_0}$, причем по (1.36), (1.37) можно записать (1.46) в виде

$$t-\alpha(x-\xi)-\beta(y-\eta)-\gamma(z-\zeta) =$$
$$= t-t_ф-\frac{k_1-k_2}{2c_0}(y_1-y_0)^2-\frac{k_3-k_4}{2c_0}(z_1-z_0)^2-h \tag{1.48}$$

где y_0, z_0 по (1.33) суть дуги линий кривизны y, z. Тогда, с учетом (1.41), (1.45) после перехода к переменным интегрирования y_1, z_1, h примет вид

$$u_i = \frac{\alpha_i\lambda_1}{2\pi x\sqrt{K}}\iint y_1^{\lambda_2}|z_1|^{\lambda_3}\left\{\tau-\frac{k_1-k_2}{2c_0}(y_1-y_0)^2-\right.$$
$$\left.-\frac{k_3-k_4}{2c_0}(z_1-z_0)^2\right\}^{\lambda_1-1}dy_1dz_1, \quad \tau = t-t_ф, \quad y_1 \geqslant 0 \tag{1.49}$$

Здесь учтено, что приближенно $\dfrac{\partial(h,\ x_1,\ y_1)}{\partial(\xi,\ \eta,\ \zeta)} = -\alpha_0.$

Полученное решение совпадает с решением для случая волнового уравнения [3] и может быть вычислено соответственным образом.

Таким образом, для систем уравнений с постоянными коэффициентами удается получить асимптотическое представление решения вблизи линии соединения волны произвольного вида S с дифракционной Σ, выраженное через координаты точки $M(y_0, z_0, \tau c_0)$, где τc_0 — расстояние M от S, y_0, z_0 — длины дуг линий кривизны y, z начальной волны s в точке M_0 пересечения луча с s. k_2, k_1 — кривизны указанных линий на s, k_1, k_2 — соответственные кривизны гиперсферы $t = \tau(M, M_0)$.

Разумеется, начальное условие (1.30) не исчерпывает всех возможностей для начальной волны, имеющей угловую точку, в частности, в случае дифракции на многогранном угле, по-видимому, следует полагать также в (1.49) $z_1 > 0$ и вместо $|z_1|^{\mu}$ писать $(z_1)^{\mu}_+$. Однако полученное интегральное представление решения верно и для более общего случая, когда область интегрирования ограничена условием $y_1 = f(z_1)$.

2. В случае уравнения второго порядка $a^{ik} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = 0$, $i, k = 1, 2, \cdots, m$, $m = 3$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = t$ с переменными коэффициентами решение вблизи фронта волны имеет вид [7]

$$u = -\frac{1}{2\pi}\iint \left(u_0 \frac{\partial v}{\partial t_1} - v \frac{\partial u_0}{\partial t_1} \right) dx_1 dy_1 \tag{2.1}$$

Здесь начальное условие имеет вид $u_0 = a(t_1 - \tau_1)_-^{\lambda} (x_1)_+^{\mu}$ при $t_1 = 0$, ось x_1 выбрана по касательной к A_0B_0 в точке 0, y_1 — по нормали к A_0B_0, $y_1 = -c_0\tau_1$. Элементарное решение v имеет вид [7]

$$v = \frac{U}{\sqrt{\Gamma}} \tag{2.2}$$

где Γ — геодезическое расстояние от данной точки (t, x, y) до точки $(0, x_1, y_1)$ за начальной волной A_0B_0, U — непрерывная функция, причем U дано в [7].

Можно показать, исходя из геометрических рассмотрений [2], что и для переменных коэффициентов имеет место вблизи точки соединения волн [8]

$$\sqrt{\Gamma} = \sqrt{2t}\sqrt{\delta - \frac{k_1 - k_2}{2c_0}(x_1 - x_0)^2 - \zeta}, \quad \delta = t - \tau, \quad \zeta = -\tau_1 \tag{2.3}$$

причем $c_0\tau_1$ означает расстояние от точки (x_1, y_1) до начальной волны, $c_0\delta$ — расстояние от гиперсферы до начальной волны A_0B_0 вдоль луча, проходящего через данную точку (x, y) или $(x_0, 0)$, $c_0\delta - \dfrac{k_1 - k_2}{2}(x_1 - x_0)^2$ — указанное расстояние, соответствующее положению x_1 точки на A_0B_0, $\frac{\Gamma c_0}{2t}$ — расстояние от гиперсферы до точки (x_1, y_1).

Из (2.1), интегрируя по частям первое слагаемое в скобках, можно найти

$$u = \frac{1}{\pi} \int\int \frac{a\lambda\zeta^{\lambda-1} x_1^{\beta} U}{\sqrt{2t}\sqrt{\delta - \frac{k_1 - k_2}{2c_0}(x_1 - x_0)^2 - \zeta}} dx_1 d\zeta \tag{2.4}$$

В случае четырех независимых переменных элементарное решение можно взять в виде $v = V\delta(\Gamma)$, где $\delta(x)$ есть дельта-функция, и (2.1) для четырех переменных даст

$$u = \frac{1}{2\pi} \int\int\int \frac{aU}{t} \delta(\zeta) \lambda \Big\{\delta - \frac{k_1 - k_2}{2c_0}(y_1 - y_0)^2 -$$

$$- \frac{k_3 - k_4}{2c_0}(z_1 - z_0)^2 - \zeta\Big\}^{\lambda-1} y_1^{\beta} | z_1 |^{\gamma} dy_1 dz_1 d\zeta \tag{2.5}$$

где оси $0y_1$, $0z_1$ выбраны по линиям кривизны начальной волны, ось $0x_1$ — по нормали к ней, $x_1 \approx -c_0\tau_1$, $\tau_1 = -\zeta$, и начальное условие имеет вид $u_0 = a(t_1 - \tau_1)^{\lambda}_{+} (y_1)^{\beta}_{+} | z_1 |^{\gamma}$, $t_1 = 0$.

Выражения (2.4) и (2.5) совпадают с (1.27) и (1.49), что позволяет применить вышеуказанные результаты к уравнению второго порядка с переменными коэффициентами.

Для системы

$$L(u_j) = 0, \quad L(u_j) = a_{ij}^{(k)} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + k_{ij} u_j$$

$$x_1 = t, \quad x_2 = x, \quad x_3 = y, \quad x_4 = z \tag{2.6}$$

можно рассмотреть сопряженное уравнение для фундаментального решения

$$L^*(v_j) = 0, \quad L^*(v_j) = -\frac{\partial a_{ij}^{(k)} v_i}{\partial x_k} + k_{ij} v_i \tag{2.7}$$

Решение v_j можно взять в форме [5]

$$v_j = \sum_{n=0}^{\infty} u_j^{(n)}(x_2, x_3, x_4) f_n(\Phi), \quad f'_{n+1}(\Phi) = f_n(\Phi) \tag{2.8}$$

где

$$f_n(\Phi) = \frac{\Phi^{n+\alpha}}{\Gamma(n+\alpha)} \tag{2.9}$$

Предполагая, что $a_{ij}^{(k)}$ не зависят от t и обозначая $\Phi = \psi - t$, в силу (2.7) следует написать

$$a_{ij}^{(k)} \frac{\partial \psi}{\partial x_k} u_j^{(0)} - a_{ij}^{(1)} u_j^{(0)} = 0 \tag{2.10}$$

$$a_{ij}^{(k)} \frac{\partial u_j^{(0)}}{\partial x_k} + a_{ij}^{(k)} u_j^{(1)} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{ij}^{(k)}}{\partial x_k} u_j^{(0)} - k_{ij} u_j^{(0)} = 0 \tag{2.11}$$

Из (2.10) можно получить при $\Phi = 0$

$$u_j^{(0)} = \varphi S_j, \quad a_{ij}^{(k)} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} S_j = 0 \tag{2.12}$$

что позволяет ввести характеристическую форму

$$Q = a_{ij}^{(k)} S_i S_j \frac{\partial \psi}{\partial x_k} - a_{ij}^{(1)} S_i S_j, \quad \psi_k = \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \tag{2.13}$$

и уравнение бихарактеристик

$$\frac{dx_k}{ds} = \frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial \psi_k}, \quad \frac{d\psi_k}{ds} = -\frac{1}{2} \frac{\partial Q}{\partial x_k} \tag{2.14}$$

причем $\dfrac{dt}{ds} = \dfrac{1}{2} a_{ij}^{(1)} S_i S_j$, и, полагая $\dfrac{1}{2} a_{ij}^{(1)} S_i S_j = 1$, можно найти $s = t$, а из (2.12) получится

$$\frac{\partial Q}{\partial \psi_k} = a_{ij}^{(k)} S_i S_j \tag{2.15}$$

Подставляя (2.12) в (2.11) и умножая последнее на S_i, можно получить с учетом равенства $u_j^{(1)} = S_j \varphi_1$ и (2.14), (2.15)

$$a_{ij}^{(k)} S_i S_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} + a_{ij}^{(k)} S_i \frac{\partial S_j}{\partial x_k} \varphi + S_i S_j \frac{\partial a_{ij}^{(k)}}{\partial x_k} \varphi - k_{ij} S_i S_j \varphi = 0 \tag{2.16}$$

Используя (2.14), а также равенство

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial Q}{\partial \psi_k} = \frac{\partial a_{ij}^{(k)}}{\partial x_k} S_i S_j + 2a_{ij}^{(k)} S_j \frac{\partial S_i}{\partial x_k} \tag{2.17}$$

учитывая лемму [6] о решениях обыкновенных уравнений

$$\frac{d \ln T}{dt} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial Q}{\partial \psi_k}, \quad T = \frac{\partial (x_1, x_2, x_3, x_4)}{\partial (t, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} \tag{2.18}$$

можно найти из (2.16)

$$\varphi = \frac{c}{\sqrt{T}} e^{-\frac{1}{4} \int_{t}^{t_0} S_i S_j \frac{\partial a_{ij}^{(k)}}{\partial x_k} dt + \frac{1}{2} \int_{t}^{t_0} k_{ij} S_i S_j dt} \tag{2.19}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ задают луч (2.14) и вычисление производится в точке $t_1 = 0$ для волны с центром в (x, y). То же решение получится, в силу принципа взаимности, для точечной волны BB_1 с центром в 0, удовлетворяющей уравнению (2.6).

Интегрируя $v_i L(u_i) - u_i L^*(v_i)$ по $x_1 = t,\ x_2 = x,\ x_3 = y,\ x_4 = z$, от $x_1 = 0$ до $x_1 = t$ [4], можно получить с учетом равенств $v_i = S_i v$, $u_i = S_i u^0$,

$$\iiint\limits_{t_1 = t} vu^0 dx_2 dx_3 dx_4 = \iiint\limits_{t_1 = 0} vu^0 dx_2 dx_3 dx_4 \tag{2.20}$$

В случае трех независимых переменных можно полагать

$$v = \frac{U}{\Phi^{\frac{3}{2}} \sqrt{2(t - t_1)}} \tag{2.21}$$

что соответствует $v = 2\frac{\partial}{\partial t_1}\frac{U}{\sqrt{\Gamma}}$, вычисленному вблизи коноида, где $\Gamma \simeq 2(t - t_1)\Phi$. Здесь при $t_1 = 0$, то есть в правой части (2.20), $\Phi = \frac{\Gamma}{2t}$ дается (2.3), а при $t_1 = t - \varepsilon$, $\varepsilon \to 0$ вблизи вершины коноида подобно (2.3) можно найти

$$\Phi \simeq \varepsilon - (t_\varphi)_0 - \frac{\bar{k}_1 - \bar{k}_2}{2\bar{c}_0}(x_2 - x)^2 - \zeta, \quad \bar{k}_1 - \bar{k}_2 = \frac{1}{\bar{c}_0 (t - t_1)} Q \tag{2.22}$$

где для задачи §1 $Q = -\frac{c_0}{\frac{\partial w}{\partial \bar{p}}}$, а для уравнений второго порядка $Q = c_0^4 \Delta_0^{-1}$, где $\Delta_0 = \det(a^{ik})$. Тогда при выборе оси x_2 по касательной к линии пересечения волны с плоскостью $t_1 = t - \varepsilon$ левая часть (2.20)

$$\int dx_2 \int\limits_0^{\varepsilon - (t_\varphi)_0 - \frac{\bar{k}_1 - \bar{k}_2}{2\bar{c}_0}(x_2 - x)^2} \frac{U u^0 d\zeta}{\Phi^{\frac{3}{2}}\sqrt{2(t - t_1)}} =$$

$$= -2\int \frac{Uu^0}{\sqrt{2\varepsilon}} \frac{dx_2}{\sqrt{\varepsilon - (t_\varphi)_0 - \frac{\bar{k}_1 - \bar{k}_2}{2\bar{c}_0}(x_2 - x)^2}} \tag{2.23}$$

где интегрирование по x_2 ведется в пределах $\Gamma(x_2) = 0$ и положено $(U)_0 = Q$, дает соотношение

$$-2u^0 \sqrt{\frac{2}{\bar{k}_1 - \bar{k}_2}} \frac{\sqrt{\bar{c}_0}\,\pi}{\sqrt{2\varepsilon}} = -2\pi \bar{c}_0 u^0 \tag{2.24}$$

которое можно получить также сопоставлением с (1.27), поскольку вблизи вершины коноида можно вычислять левую часть (2.20) для случая постоянных $a_{ij}^{(k)}$. Тогда, введя для начальных условий (1.2) собственный вектор $S_j^0 = -\frac{\partial \tau_1}{\partial x_j}$, $a_j = a^0 S_j^0$, из (2.20) можно найти

$$-2\pi u^0 = \iint \frac{U a^0 (-\tau_1)^\lambda x_1^2 \, dx_1 d\zeta}{\sqrt{2t}\, \Phi^{\frac{3}{2}}}, \quad -\tau_1 = \zeta \tag{2.25}$$

где Φ дается (2.3), откуда найдется (2.4), где $\frac{U}{\sqrt{t}}$ дается (2.19), (2.21).

Проведя выкладки [3], из (2.25) или (2.4) можно найти решение вблизи точки B в виде

$$u^0 = AF\left(-\lambda + \frac{1}{2},\ \lambda + \frac{1}{2},\ \lambda + \frac{3}{2} + \beta,\ \frac{1-\alpha_0}{2}\right)$$

$$A = \frac{a^0}{\pi} \frac{\lambda U \mathrm{B}\left(\lambda, \frac{1}{2}\right)}{(k_1 - k_2)^{\frac{\beta+1}{2}}} 2^{\lambda + \frac{\beta}{2} - \frac{1}{2}} (1-\alpha_0)^{\lambda+\beta+\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(1+\beta)\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\lambda + \frac{3}{2} + \beta\right)\sqrt{t}} \tag{2.26}$$

в области позади участка дифракционной волны CB и

$$u_0 = A_0 F\left(-\frac{\beta}{2},\ \frac{-\beta+1}{2},\ \lambda+1,\ \frac{1}{\alpha_0^2}\right)$$

$$A_0 = -\frac{a^0 U \delta^\lambda}{(k_2-k_1)^{\lambda+\frac{1}{2}}} (\theta_0 - \theta)^\beta \frac{1}{\sqrt{t}} \tag{2.27}$$

впереди CB.

Здесь

$$\alpha_0 = \frac{\theta - \theta_0}{\sqrt{2(k_1-k_2)\delta c_0}}, \quad \lambda = t - \tau + \frac{(\theta-\theta_0)^2}{2(k_1-k_2)c_0} \tag{2.28}$$

В случае четырех переменных можно полагать

$$v = U \frac{\delta'(\Phi)}{t - t_1}, \qquad v \approx 2 \frac{\partial U \delta(\Gamma)}{\partial t_1} \tag{2.29}$$

и подобно предыдущему выбрать Φ. Тогда из (2.20) получится (2.5).

3. Можно рассмотреть окрестность точки B соединения волн AB и BB_1 в нелинейной постановке. Для неоднородной сжимаемой первоначально-неподвижной жидкости в [9] получены упрощенные нелинейные уравнения в окрестности B и указаны их некоторые решения.

Эти решения можно распространить и на задачу определения окрестности соединения волн в первоначально-движущейся среде со скоростью $\overline{V}_0(u_0, v_0)$, где начальная скорость звука обозначается a_0, плотность — ρ_0, давление — P_0 [10], [11].

В криволинейных координатах t, τ, θ, где t — время, τ — время пробега волны до данной точки, θ — угловая координата в направлении касательной к волне, для компонент скорости по направлениям τ и θ можно получить $v_\tau = H_1\dot{\tau}$, $v_\theta = H_2\dot{\theta}$, причем соответствующие значения для невозмущенного движения впереди волны суть $u_n(x, y)$, $V_t(x, y)$, $\overline{V}_0 = u_n\overline{n} + V_t\overline{t}$, а параметры H_1, H_2 для невозмущенной волны найдутся в виде $H_1 = a_0 + u_n$, $H_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\theta}\right)^2}$. Вводя возмущенные значения для скоростей $u = v_\tau - u_n$, $v = v_\theta - V_t$, давления $P = P_0 + P_1$, а также переменную $s = \tau - t$, и учитывая, что $\frac{\partial}{\partial t}\Big|_\tau = \frac{\partial}{\partial t}\Big|_s - \frac{\partial}{\partial s}$, $\frac{\partial}{\partial\tau} = \frac{\partial}{\partial s}$, и соотношения $\frac{\partial}{\partial s} \gg \frac{\partial}{\partial t}\Big|_s$, $\frac{\partial}{\partial s} \gg \frac{\partial}{\partial\theta}$, $v \ll u$, характеризующие окрестность точки B, из уравнений движения и уравнения неразрывности можно найти упрощенные нелинейные уравнения

$$P_1 = \rho_0 a_0 u, \quad \frac{\partial v}{\partial s} = \frac{H_1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial\theta_1}, \quad 2\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{\rho_0 a_0}\frac{\partial\rho_0 a_0}{\partial t} +$$

$$+ u\left\{\overline{n}(\nabla V_0)\overline{n} + (2\alpha^0 - 1)\operatorname{div}\overline{V}_0 + a_0 k\right\} + 2\alpha^0\frac{u}{H_1}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{a_0}{H_2}\frac{\partial v}{\partial\theta_1} = 0 \tag{3.1}$$

Здесь $\overline{n}$ есть вектор нормали к волне, $\alpha^0 = \frac{1}{a_0}\frac{\partial\rho_0 a_0}{\partial\rho_0}$, кривизна волны $k = \frac{\partial H_2}{H_1 H_2\,\partial\theta}$, вместо θ введена координата θ_1, $H_2 d\theta_1 = H_2 d\theta - V_t dt$. Подобные же уравнения, отнесенные к линиям кривизны α_1, α_2 волны, получатся в пространственной задаче. Следует отметить, что $\theta(\alpha_1, \alpha_2)$ есть координата точки пересечения нормали, проходящей через данную точку, с волной, и поскольку лучевая скорость есть $\overline{V}_0 + a_0\overline{n}$, а нормальная скорость волны равна $\overline{n}(a_0 + u_n)$, то $V_t\overline{t}$ представляет их разность и θ_1 представляет координату точки пересечения луча с волной.

Следует отметить, что при $\overline{V}_0 = 0$ уравнения (3.1) получены в [9], где найдено также их решение. Далее автором получены уравнения (3.1). Как выяснилось, уравнения (3.1) в декартовых координатах, связанных с волной, несколько ранее получены в [12], где учтено также влияние диссипативных факторов.

В одномерном случае указанное уравнение получено в [10], [11]. Уравнения (3.1) с помощью замены переменных

$$u = M\mu, \quad v = M\nu, \qquad M = \frac{1}{\sqrt{H_2\gamma_0 a_0}}\, e^{-\frac{1}{2}T}$$

$$T = \int\limits_0^t \left[\bar{n}(\nabla \bar{V}_0)\,\bar{n} + (2\alpha^0 - 1)\,\operatorname{div}\bar{V}_0\right] dt \tag{3.2}$$

приводятся к виду

$$\frac{\partial\mu}{\partial t} - \alpha^0 \frac{\mu}{H_1}\frac{\partial\mu}{\partial s} M + \frac{a_0}{H_2}\frac{\partial\nu}{\partial\vartheta} = 0$$

$$\frac{\partial\nu}{\partial s} = \frac{H_1}{H_2}\frac{\partial\mu}{\partial\vartheta} \tag{3.3}$$

Следует отметить, что первое уравнение (3.1) получается довольно просто, и наибольшие трудности возникают при получении первого уравнения (3.3). Зная амплитуду волны M в линейной одномерной по s задаче, можно получить коэффициенты при производных в первом уравнении (3.3) на основании уравнения характеристик:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + v_x \frac{\partial F}{\partial x} + v_y \frac{\partial F}{\partial y} = -a\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}$$

$$a = a_0 + (\alpha^0 - 1)\,u \tag{3.4}$$

где v_x, v_y — проекции скорости на оси координат x, y.

В координатах x_1, x_2, где $dx_1 = H_1 ds$, $dx_2 = H_2 d\vartheta_1$, уравнение (3.4) примет вид

$$\frac{dF}{dt} = -a\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)^2}, \quad \frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t}\Big|_{x_1, x_2} +$$

$$+ \frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial F}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} \tag{3.5}$$

причем $\frac{\partial F}{\partial t}$ берется в частице, $\frac{dx_1}{dt} = u - a_0$, $\frac{dx_2}{dt} = v$.

Из (3.5) получится уравнение характеристик

$$\frac{\partial x_1}{\partial t} - \alpha^0 u - \frac{1}{2}a^0\left(\frac{\partial x_1}{\partial x_2}\right)^2 = 0, \qquad u = M\mu \tag{3.6}$$

Такое же уравнение характеристической поверхности получится из (3.3). Используя указанные соображения, можно получить упрощенные уравнения вблизи B в магнитной газодинамике. Обозначая компоненты магнитного поля по нормали и касательной к волне через $\beta_1 + \gamma_1$, $\beta_2 + \gamma_2$, где γ_1, γ_2 есть возмущенные значения величин, причем $\gamma_1 \ll \gamma_2$, можно в нулевом порядке найти из уравнений, записанных в координатах t, s, ϑ,

$$P_1 = \frac{\gamma_2}{c_0} a_0^2 u, \quad v = -\frac{\beta_2 \beta_1 c_0}{4\pi\rho_0} \frac{u}{U}, \quad \gamma_2 = \frac{\beta_2 c_0}{U} u$$

$$U = c_0^2 - \frac{\beta_1^2}{4\pi\rho_0}, \quad \frac{\partial v_T}{\partial s} = \frac{H_1}{H_2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \tag{3.7}$$

где обозначено: $\gamma_1 = -v_T \frac{\beta_2 c_0}{U}$, причем c_n есть скорость волны в нелинейной постановке. c_0 есть линейная скорость волны, и можно показать, что в силу (3.7) и формулы для скорости c_n имеет место равенство:

$$c_n = c_0 + (\lambda - 1) u$$

$$\lambda = -\varepsilon^0 \frac{U}{a_0^2 + a_1^2 - 2c_0^2} + \frac{3}{2} \frac{a_0^2 - c_0^2}{a_0^2 + a_1^2 - 2c_0^2} \tag{3.8}$$

a_1 есть скорость Альфвена. Уравнение характеристики в силу (3.5) имеет вид:

$$H_1 = c_0 + u_n, \quad \frac{dF}{dt} = \left.\frac{\partial F}{\partial t}\right|_{x_1, x_2} + (u - c_0) \frac{\partial F}{\partial x_1} + v \frac{\partial F}{\partial x_2}$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial t} = \lambda u + \frac{1}{2} c_0 \left(\frac{\partial x_1}{\partial x_2}\right)^2 \tag{3.9}$$

Отсюда, используя еще (3.7), можно записать упрощенные уравнения движения:

$$\frac{\partial v_T}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \lambda u \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{c_0}{2} \frac{\partial v_T}{\partial x_2} - u \frac{d \ln M}{dt} = 0 \tag{3.10}$$

причем последнее слагаемое не влияет на вид уравнения (3.10) и M дает интенсивность BB_1 при $\lambda = 0$, $v_T = 0$.

В линейном одномерном случае в (3.5) $\frac{d\mu}{dt} = 0$, $\mu = \text{const}$, что характеризует приближение геометрической акустики. Содержащееся в [12] утверждение о том, что указанное приближение не удовлетворяет линейным уравнениям, вероятно, связано с тем, что в [12] фигурирует координата $x_1 = H_1 s$ и берется $\left.\frac{\partial \mu}{\partial t}\right|_{x_1}$ в то время, как следует брать $\left.\frac{\partial \mu}{\partial t}\right|_{s}$, и тогда уравнения удовлетворятся. Можно получить уравнения в общих криволинейных координатах $\tau - t$, θ, входящих в (2.28), где $x_1 = 1$ есть уравнение линейной характеристики, удовлетворяющей соотношению

$$dx_1 = H_1(0)\, d(\tau - t), \quad c = H_1(0)$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{d(k_1 - k_2)}{dt}\left(\frac{\partial x_1}{\partial \theta}\right)^2 = 0$$

Обозначая нелинейное слагаемое в скорости возмущений c_n через $(\lambda - 1)u$, можно написать упрощенное нелинейное уравнение для произвольной среды, имеющее вышеприведенное характеристическое уравнение для линейной задачи $(\lambda = 0)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x_1} - \frac{1}{2}\frac{d(k_1 - k_2)}{dt}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \lambda\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{d\ln\varphi}{dt} = 0$$

где $u = \frac{\partial f}{\partial x_1}$, φ есть интенсивность волны в линейной одномерной по x_1 задаче, и вводя $v = \frac{1}{H_2}\frac{\partial f}{\partial \theta}$, можно получить

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{1}{H_2} = \frac{\partial v}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{d(k_1 - k_2)}{dt}H_2\frac{\partial v}{\partial \theta} + \lambda u\frac{\partial u}{\partial x_1} - u\frac{d\ln\varphi}{dt} = 0$$

В магнитной газодинамике, как и для ортогональных координат, $v = v_T$, причем для однородной жидкости отсюда получится найденное ранее уравнение в переменных $\tau - t$, $y_1 = \sqrt{-\frac{\beta''}{\beta - a\beta'}\left(\frac{1}{V} - x_3\right)}$.

Величина U в (2.29) дает интенсивность BB_1 в линейном случае и выражается формулой (3.2) при $\mu = 1$. То же значение получится по (2.19), причем в силу принципа взаимности для элементарной точечной волны можно вместо (2.19), вычисленного в точке 0, взять точечную волну BB_1, являющуюся решением уравнения (2.6) с центром в 0, вычисленную в (x, y). Повторяя выкладки, проделанные при получении (2.16), для уравнения (2.6) следует взять решение в виде

$$u_j = \varphi S_j f(\Phi)$$

$$2\frac{1}{\varphi}\frac{d\varphi}{dt} + a_{ij}^{(k)} S_i \frac{\partial S_j}{\partial x_k} + k_{ij} S_i S_j = 0 \tag{3.11}$$

Для уравнений газодинамики, линеаризованных относительно течения $\overline{V}_0$, имеет место для компонент возмущенной скорости u_k и давления P_1,

$$u_k = S_k \varphi f(\Phi), \quad k = 2, 3, 4, \quad P_1 = S_1 \varphi f(\Phi) \tag{3.12}$$

причем

$$S_1 = \gamma_0 a_0, \quad S_k = n_k, \quad n_k = \frac{\psi_k}{\sqrt{\Sigma \psi_k^2}}, \quad Q = U_k \psi_k + a_0\sqrt{\Sigma \psi_k^2} \tag{3.13}$$

$k_{ij} S_i S_j = n_i n_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + (2\alpha^0 - 1)\,\mathrm{div}\,\overline{V}_0$ и уравнение лучей $\frac{dx_k}{dt} = U_k + a_0 n_k$. Отсюда и по (2.17) $a_{ij}^{(k)} S_j \frac{\partial S_i}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}(U_k - a_0 n_k) - \frac{1}{2} S_i S_j \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}$.

Подставляя в уравнение для φ и используя соотношение $\frac{\partial a_{ij}^{(k)}}{\partial x_k} S_i S_j = 2\,\mathrm{div}\,\overline{V}_0 - \frac{2}{\rho_0} a_0 n_k \frac{\partial \rho_0}{\partial x_k} - \frac{2}{\rho_0 a_0} U_k \frac{\partial \rho_0 a_0}{\partial x_k}$, можно найти для интенсивности волны BB_1 уравнение вдоль лучей

$$2\frac{1}{\varphi}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{1}{\rho_0 a_0}\frac{d\rho_0 a_0}{dt} + a_0 \frac{\partial n_k}{\partial x_k} + k_{ij} S_i S_j = 0 \tag{3.14}$$

которое дает линейное решение для волны [10], [11] или решение (3.2) при $\mu = 1$.

В случае, когда ударная волна AB скачкообразная, в решении § 1 $\lambda = 0$, $\beta = 0$, и решение позади дифракционной волны имеет вид [9]

$$\mu = \frac{A}{\sqrt{k_1 - k_2}\,\pi} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}\sqrt{k_1 - k_2}\sqrt{-s}\sqrt{c}}{\theta - \theta_0}, \quad c = a_0(0) \tag{3.15}$$

Тогда из второго уравнения (3.3) получится

$$\frac{\nu}{A} = \frac{H_1}{\pi H_2} \frac{\theta - \theta_0}{c(k_1 - k_2)^{\frac{3}{2}}} \operatorname{tg}\mu_1\pi - \frac{H_1}{H_2} \frac{\theta - \theta_0}{c(k_1 - k_2)^{\frac{3}{2}}} \mu_1 \tag{3.16}$$

Можно предположить, что (3.16) имеет место и в нелинейной задаче.

Вводя переменную $\mu_1 = \frac{\mu\sqrt{k_1 - k_2}}{A}$, переходя в (3.3) к независимым переменным μ_1, θ, подставляя в них ν из (3.16), можно получить решение в виде

$$s = -\frac{1}{2}\frac{(\theta - \theta_0)^2}{k_1 - k_2}\frac{1}{c} \operatorname{tg}^2\mu_1\pi + F(\mu_1, t)$$

$$2\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{k_1 - k_2}\frac{d(k_1 - k_2)}{dt}\frac{1}{\pi}\operatorname{tg}\mu_1\pi \frac{\partial F}{\partial \mu_1} -$$

$$-\frac{2\alpha^0}{H_1}\frac{A}{\sqrt{H\rho_0 a_0}}\frac{e^{-\frac{1}{2}T}}{\sqrt{k_1 - k_2}}\mu_1 = 0 \tag{3.17}$$

где использовано соотношение

$$\frac{d(k_1 - k_2)}{dt} + \frac{a_0 H_1}{H_2^2 c} = 0 \tag{3.18}$$

которое получается также подстановкой линейного решения (3.15), (3.16) в уравнения (3.3) при $\alpha^0 = 0$. Уравнение (3.17) интегрируется в виде

$$F = \int\limits_0^t \frac{\alpha^0 \mu_1 e^{-\frac{1}{2}\tau}}{H_1 \sqrt{H_0 \rho_0 a_0} \sqrt{k_1 - k_2}} dt + C_2(C_1)$$

$$C_2' = \frac{\sin \mu_1 \pi}{\sqrt{k_1 - k_2}} \tag{3.19}$$

Нелинейное решение u_0 на AB находится интегрированием нелинейных характеристик

$$\theta = -\int\limits_0^t \frac{\alpha^0 u_0}{H_1} dt + y_1 \tag{3.20}$$

и ударная волна AB имеет уравнение $s = \dfrac{(\theta - \theta_0)^2}{2(k_1 - k_2)c} + \dfrac{1}{2} s_0$, где $s = s_0$ в точке B, причем $s_0 = \displaystyle\int\limits_0^t \frac{\alpha^0 u_0}{H_1} dt$, $u_0 = A_0$, $A_0 = \dfrac{Ae^{-\frac{1}{2}\tau}}{\sqrt{H_0 \rho_0 a_0} \sqrt{k_1 - k_2}}$.

Условия на ударной волне BB_1 для системы уравнений (3.3) находятся в виде

$$\nu = -\frac{H_1}{H_2} \frac{\partial s}{\partial \theta} \mu, \quad 2\frac{\partial s}{\partial t} - \frac{\alpha^0}{H_1 \sqrt{\rho_0 a_0 H_2}} e^{-\frac{1}{2}\tau} \mu - \frac{a_0 H_1}{H_2^2} \left(\frac{\partial s}{\partial \theta}\right)^2 = 0 \tag{3.21}$$

В окрестности точки B, где $\mu_0 = \dfrac{A}{\sqrt{k_1 - k_2}}$, $s = s_0$, $\theta = \theta_0 - \lambda_1(t)$, можно искать решение (3.21) в виде ряда по степеням Φ,

$$\mu = \mu_0(t) + \mu_1(t)\Phi, \quad \nu = \nu_0(t) + \nu_1(t)\Phi$$

$$\theta - \theta_0 = -\lambda_1(t) - \Phi, \quad s = s_0(t) + s_1(t)\Phi + s_2(t)\Phi^2 \tag{3.22}$$

Тогда в нулевом порядке (3.21) дают

$$\nu_0 = -\frac{AH_1}{\sqrt{k_1 - k_2}} \frac{s_1}{H_2}, \quad s_1 = \frac{\lambda_1}{2(k_1 - k_2)}, \quad \lambda_1 = \sqrt{s_0 (k_1 - k_2) c} \tag{3.23}$$

что согласуется также с решением (3.16), (3.18), (3.19).

В первом порядке для касательной составляющей скорости к BB_1 можно получить из (3.16), (3.21)

$$\frac{\nu + \dfrac{H_1 \mu}{H_2} \dfrac{\partial s}{\partial \theta}}{\Phi} = \frac{H_1^2 a_0 s_1^2}{\dfrac{a_0 H_1}{H_2^2} s_2 + \dfrac{s_0'}{s_1}} \frac{\mu_1}{H_2^2} \tag{3.24}$$

где μ_1 найдется из (3.19), (3.21) в виде

$$C_1 = -\pi \mu_1 \frac{\Phi}{A}, \quad \mu_1 = -\frac{s_1 A}{\pi C_2'(0) - \displaystyle\int\limits_0^t \frac{\alpha^0 A e^{-\frac{1}{2}\tau} dt}{H_1 \sqrt{\rho_0 a_0 H_2}}}$$

Для малых t отсюда получится $H_2 = ct$, $u = A_0 \sqrt{k_1 - k_2}\, \nu$, $v_0 = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 c^2 t}} \nu$,

$$\frac{v_s - \frac{1}{t}\frac{\partial s}{\partial \theta} u}{\Phi} = \frac{\varkappa^0 A \sqrt{t}\sqrt{c}}{2\rho_0 c^3} \frac{A}{\pi C_2(0) - \frac{\varkappa^0 A}{\sqrt{\rho_0 c^2}} 2\sqrt{t}} \tag{3.25}$$

причем касательная составляющая скорости к BB_1 вблизи B мала по Φ и $\sqrt{t}$ и может быть сделана малой выбором $c_2'(0)$, в отличие от однородного во времени решения, когда $C_2'(0) = 0$.

Автор благодарит участников семинара кафедры аэрогидродинамики Саратовского государственного университета под руководством С. В. Фальковича за ценные обсуждения результатов.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 16 VI 1970

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ

ԱԼԻՔԻ ՇՐՋԱԿԱՅՔԻ ՈՒՍՈՒՄՆԱՍԻՐՈՒԹՅՈՒՆԸ ԵԶԱԿԻ ԳԾԻ ՄՈՏ

Ամփոփում

Դիտարկվում է գծային հավասարումների սիստեմի լուծման ուսումնասիրման խնդիրը կամայական տեսքի ալիքի և դիֆրակցիոն ալիքի հատման գծի մոտ։

Լուծումը ստացվում է վերջավոր տեսքով։

INVESTIGATION OF WAVE NEIGHBOURHOOD NEAR THE SINGULAR LINE

A. G. BAGDOEV

Summary

The solution of a linear hyperbolic system of equations with constant coefficients in the neighbourhood of the line (in the case of four variables t, x, y, z) of junction of an arbitrary wave carrying a given singularity with a diffraction wave representing disturbance from the angle. The solution is found by the Fourier transformation and by separation of the singular part of the solution and it is written in the closed form in the coordinate system, related to the curvature lines of the initial wave. As in the case of the wave equation the solution in the above region can be reduced to hypergeometric functions. The solution of the simplified nonlinear equations for a moving medium is found in the wave junction neighbourhood.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Боровиков В. А.* Дифракция на многоугольниках и многогранниках. „Наука", М., 1966.
2. *Бабич В. М.* Распространение нестационарных волн и каустики. Ученые записки ЛГУ, 1958, № 32.
3. *Багдоев А. Г.* Определение параметров движения жидкости в окрестности встречи фронтов волн. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XXII, № 5, 1969.
4. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. Изд-во „Мир", М., 1965.
5. *Бабич В. М.* Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн, V, Л., 1961.
6. *Адамар Ж., Гординг Л., Котаке Т.* Задача Коши. Изд-во „Мир", М., 1967.
7. *Hadamard Y.* Le problème de Cauchy, Paris, 1932.
8. *Багдоев А. Г.* Определение особенностей фронтов волн. Докл. АН Арм. ССР, № 3, 1970.
9. *Багдоев А. Г.* Определение давления в неоднородной жидкости вблизи фронта ударной волны. Ученые записки Ереванского ун-та, № 1, 1968.
10. *Рыжов О. С.* Затухание ударных волн в неоднородных средах. ПММ, № 2, 1961.
11. *Guiraud Y. P.* Acoustique géométrique et bruit balistique, Comptes Rendus, 1964, t. 258, 4425.
12. *Шефтер Г. М.* О влиянии вязкости и теплопроводности на распространение звуковых импульсов в неоднородной движущейся среде. ПММ, № 1, 1969.