

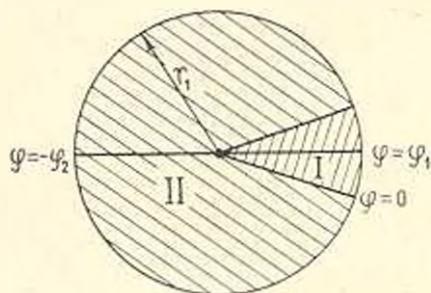
Л. А. АРУТЮНЯН

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ КРУЧЕНИЯ СОСТАВНЫХ СТЕРЖНЕЙ

Вопросы решения различных задач о кручении составных призматических стержней рассмотрены в [1, 2, 3] и др. Случай круглого стержня, составленного из двух цилиндрических секторов полукруглого сечения, рассмотрен в [1]. В работе [6] для решения задачи о кручении стержня, составленного из нескольких цилиндрических секторов, использована система собственных функций соответствующей однородной краевой задачи.

В настоящей работе рассматриваются задачи кручения стержней кругового и секториального сечения с разрезами, составленных из цилиндрических секторов с различными модулями сдвига. В общем случае, когда сечение имеет вид кольцевого сектора с разрезами произвольной глубины, идущими по его диаметру, решение задачи сводится либо к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода, либо к бесконечным системам линейных уравнений. На основе решений парных интегральных уравнений, связанных с функциями Лежандра, получены замкнутые решения.

1. Рассмотрим круглый стержень, составленный из двух стержней секториального сечения с различными модулями сдвига материала (фиг. 1).



Фиг. 1.

Функции напряжений в полярных координатах r и φ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 U_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_i}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_i}{\partial \varphi^2} = -2G_i \quad (i = 1, 2) \quad (1.1)$$

где G_1 и G_2 — модули сдвига материалов, а $U_i(r, \varphi)$ ($i = 1, 2$) — функция напряжений в соответствующих областях I и II.

Введем новую искомую функцию $\Phi_i(t, \varphi)$ ($i = 1, 2$)

$$U_i(r, \varphi) = G_i \left[\Phi_i^*(r, \varphi) - \frac{r^2}{2} \right] \quad (i = 1, 2) \quad (1.2)$$

и независимую переменную

$$t = \ln \frac{r}{r_1} \quad (1.3)$$

Функция $\Phi_i(t, \varphi)$ ($i = 1, 2$) удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \Phi_i(t, \varphi)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \Phi_i(t, \varphi)}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (1.4)$$

граничным условиям

$$\begin{aligned} \Phi_1(0, \varphi) - \frac{r_1^2}{2} &= \Phi_2(0, \varphi) - \frac{r_1^2}{2} = \frac{\partial \Phi_1(t, \varphi)}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} = \\ &= \frac{\partial \Phi_2(t, \varphi)}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} = 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

и условиям сопряжения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_1(t, \varphi)}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} &= \frac{\partial \Phi_2(t, \varphi)}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} \\ G_1 \left[\Phi_1(t, 0) - \frac{r_1^2 e^{2t}}{2} \right] &= G_2 \left[\Phi_2(t, 0) - \frac{r_1^2 e^{2t}}{2} \right] \end{aligned} \quad (1.6)$$

Ищем решение уравнения (1.4) в виде суммы ряда и интеграла Фурье

$$\Phi_i(t, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{(i)} e^{\nu_k t} \sin \nu_k \varphi + \int_0^{\tilde{\nu}} [C_i(z) \operatorname{sh} z\varphi + D_i(z) \operatorname{ch} z\varphi] \sin ztdz \quad (1.7)$$

где

$$\nu_k = \begin{cases} \frac{k\pi}{\varphi_1} & -\infty < t < 0 \\ 0 & 0 < \varphi < \varphi_1 \end{cases} \quad \Phi_i(t, \varphi) = \begin{cases} \Phi_1(t, \varphi) & -\infty < t < 0 \\ \Phi_2(t, \varphi) & 0 < \varphi < \varphi_1 \end{cases}$$

Удовлетворив условиям (1.5) и (1.6), после некоторых преобразований получим

$$A_k^{(1)} = \frac{r_1^k}{k\pi} [(-1)^{k+1} + 1]; \quad A_k^{(2)} = -\frac{r_1^k}{k\pi} [(-1)^{k+1} + 1]$$

$$D_1(z) = -\frac{r_1^2}{\pi} \frac{G_2}{G_1 + G_2} \left[\frac{2}{z} + \frac{z}{4 + z^2} \left(\frac{G_1}{G_2} - 1 \right) \right]$$

$$D_2(z) = -\frac{r_1^2}{\pi} \frac{G_1}{G_1 + G_2} \left[\frac{2}{z} + \frac{z}{4 + z^2} \left(\frac{G_2}{G_1} - 1 \right) \right] \quad (1.8)$$

$$C_1(z) = \left\{ \frac{r_1^2}{\pi} \frac{G_2}{G_1 + G_2} \left[\frac{2}{z} + \frac{z}{4 + z^2} \left(\frac{G_1}{G_2} - 1 \right) \right] - \frac{r_1^2}{z\pi (\operatorname{ch} z\varphi_1 + 1)} \right\} \operatorname{th} z\varphi_1$$

$$C_2(z) = \left\{ -\frac{r_1^2}{\pi} \frac{G_1}{G_1 + G_2} \left[\frac{2}{z} + \frac{z}{4 + z^2} \left(\frac{G_2}{G_1} - 1 \right) \right] + \frac{r_1^2}{z\pi (\operatorname{ch} z\varphi_2 + 1)} \right\} \operatorname{th} z\varphi_2$$

Подставив (1.8) в (1.7), получим следующие выражения для функций $\Phi_i(t, \varphi)$:

$$\Phi_1(t, \varphi) = \frac{r_1^2}{2} + \frac{4r_1^2}{\pi} \frac{G_1 - G_2}{G_1 + G_2} \int_0^{\varphi} \frac{\operatorname{ch} z(\varphi_1 - \varphi)}{z(4 + z^2) \operatorname{ch} z\varphi_1} \sin ztdz \quad (1.9)$$

($-\infty < t < 0$; $0 < \varphi < \varphi_1$)

$$\Phi_2(t, \varphi) = \frac{r_1^2}{2} + \frac{4r_1^2}{\pi} \frac{G_2 - G_1}{G_1 + G_2} \int_0^{\varphi} \frac{\operatorname{ch} z(\varphi_2 + \varphi)}{z(4 + z^2) \operatorname{ch} z\varphi_2} \sin ztdz \quad (1.10)$$

($-\infty < t < 0$; $-\varphi_2 < \varphi < 0$)

В частном случае $\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ для жесткости составного стержня имеем

$$C = 2 \sum_{i=1,2} \int_{D_i} U_i(r, \varphi) drd\varphi = \frac{\pi r_1^4}{4} (G_1 + G_2) + r_1^4 \frac{(G_1 - G_2)^2}{G_1 + G_2} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{4}{\pi} \right) \quad (1.11)$$

что совпадает с результатом работы [1].

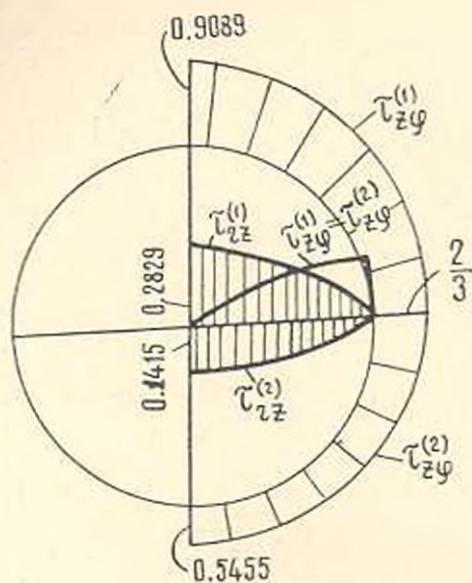
На фиг. 2 приведены эпюры напряжений, построенные в долях $r_1 G_1 \theta$ при $G_1 = 2G_2$ (θ — угол закручивания).

2. Рассмотрим составной стержень с сечением в виде сектора с радиальной трещиной (фиг. 3).

Каждая составная часть при этом предполагается однородной и изотропной.

Для определения функций $\Phi_i(t, \varphi)$ ($i = 1, 2$) имеем уравнение 1.4) и следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} \Phi_1(0, \varphi) - \frac{r_1^2}{2} &= \Phi_2(0, \varphi) - \frac{r_1^2}{2} = \Phi_1(t, \varphi_1) - \\ &- \frac{r_1^2 e^{-2t}}{2} = \Phi_2(t, -\varphi_1) - \frac{r_1^2 e^{-2t}}{2} = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$



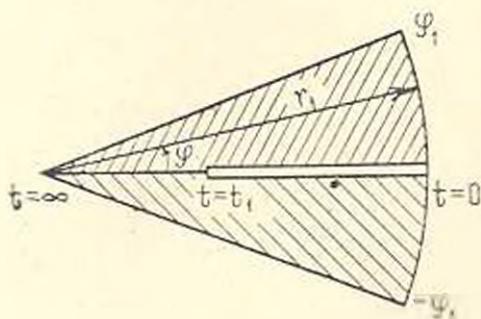
Фиг. 2.

$$\Phi_1(t, 0) = \frac{r_1^2 e^{-2t}}{2} \quad (0 < t < t_1) \quad (2.2)$$

$$G_1 \left[\Phi_1(t, 0) - \frac{r_1^2 e^{-2t}}{2} \right] = G_2 \left[\Phi_2(t, 0) - \frac{r_1^2 e^{-2t}}{2} \right] \quad (t_1 < t < \infty)$$

$$\Phi_2(t, 0) = \frac{r_1^2 e^{-2t}}{2} \quad (0 < t < t_1) \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \Phi_1(t, \varphi)}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} = \frac{\partial \Phi_2(t, \varphi)}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} \quad (t_1 < t < \infty)$$



Фиг. 3.

Функции Φ_i ищем в форме

$$\Phi_i(t, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^{(i)} e^{-\lambda_k t} \sin \lambda_k \varphi +$$

$$+ \int_0^{\infty} |C_l(z) \operatorname{sh} z\varphi + D_l(z) \operatorname{ch} z\varphi| \sin zt \, dz \quad (2.4)$$

где

$$\mu_k = \frac{k\pi}{\varphi_1} \quad \Phi_l = \begin{cases} \Phi_1 & 0 < t < \infty \\ & 0 < \varphi < \varphi_1 \\ \Phi_2 & 0 < t < \infty \\ & -\varphi_1 < \varphi < 0 \end{cases}$$

Удовлетворив граничным условиям (2.1), найдем

$$A_k^{(1)} = -A_k^{(2)} = \frac{r_1^2}{\mu_k \varphi_1} |(-1)^{k+1} + 1| \quad (2.5)$$

$$C_1(z) \operatorname{sh} z\varphi_1 + D_1(z) \operatorname{ch} z\varphi_1 = \frac{r_1^2 z}{\pi(4 + z^2)} \quad (2.6)$$

$$-C_2(z) \operatorname{sh} z\varphi_1 + D_2(z) \operatorname{ch} z\varphi_1 = \frac{r_1^2 z}{\pi(4 - z^2)} \quad (2.7)$$

Условия (2.2) и (2.3) дают следующие парные уравнения:

$$\int_0^{t_1} D_1(z) \sin zt \, dz = \frac{r_1^2 e^{-2t}}{2} \quad (0 < t < t_1) \quad (2.8)$$

$$\int_{t_1}^{\infty} \left| D_1(z) - \frac{G_2}{G_1} D_2(z) \right| \sin zt \, dz = \frac{r_1^2 e^{-2t}}{2} \left(1 - \frac{G_2}{G_1} \right) \quad (t_1 < t < \infty)$$

$$\int_0^{t_1} D_2(z) \sin zt \, dz = \frac{r_1^2 e^{-2t}}{2} \quad (0 < t < t_1) \quad (2.9)$$

$$\int_{t_1}^{\infty} z |C_1(z) - C_2(z)| \sin zt \, dz = -\frac{2r_1^2}{z_1 \operatorname{sh} \frac{\pi t}{\varphi_1}} \quad (t_1 < t < \infty)$$

Обозначим $D_1(z) - \frac{G_2}{G_1} D_2(z) = X(z)$. Комбинируя первые уравнения (2.8) и (2.9) и используя второе уравнение из (2.8), получаем

$$\int_0^{t_1} X(z) \sin zt \, dz = \frac{r_1^2 e^{-2t}}{2} \left(1 - \frac{G_2}{G_1} \right) \quad (0 < t < t_1) \quad (2.10)$$

$$\int_{t_1}^{\infty} X(z) \sin zt \, dz = \frac{r_1^2 e^{-2t}}{2} \left(1 - \frac{G_2}{G_1} \right) \quad (t_1 < t < \infty)$$

По формуле преобразования Фурье имеем

$$X(z) = D_1(z) - \frac{G_2}{G_1} D_2(z) = \frac{r_1^2 z}{\pi(4+z^2)} \left(1 - \frac{G_2}{G_1}\right) \quad (2.11)$$

Аналогичным путем используя (2.6), (2.7), (2.9) и обозначение

$$D_1(z) + D_2(z) = Y(z) \quad (2.12)$$

для $Y(z)$ приходим к уравнению

$$\int_0^{\infty} z Y(z) \cos zt dz = -2r_1^2 e^{-\pi t} \quad (0 < t < t_1) \quad (2.13)$$

$$\int_0^{\infty} z Y(z) \operatorname{cth} z\varphi_1 \sin zt dz = \frac{2r_1^2}{\varphi_1} \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{\pi t}{\varphi_1}} - \frac{2r_1^2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{z^2 \sin zt dz}{(z^2 + 4) \operatorname{sh} z\varphi_1} \quad (t_1 < t < \infty)$$

Введем обозначения

$$z = \frac{\lambda\pi}{\varphi_1}; \quad \frac{\lambda\pi^2}{\varphi_1} Y\left(\frac{\lambda\pi}{\varphi_1}\right) = Z(\lambda); \quad s = \frac{\pi t}{\varphi_1}; \quad s_1 = \frac{\pi t_1}{\varphi_1} \quad (2.14)$$

Вместо (2.13) имеем

$$\int_0^{\infty} Z(\lambda) \cos \lambda s d\lambda = q(s) \quad (0 < s < s_1) \quad (2.15)$$

$$\int_0^{\infty} Z(\lambda) \operatorname{cth} \lambda\pi \sin \lambda s d\lambda = h(s) \quad (s_1 < s < \infty)$$

где

$$q(s) = -2r_1^2 e^{-\frac{2\pi s}{\varphi_1}}$$

$$h(s) = \frac{2r_1^2}{\varphi_1} \left[\frac{1}{\operatorname{sh} s} + \frac{\pi^2}{\varphi_1^2} \int_0^{\infty} \frac{\lambda^2}{\operatorname{sh} \lambda\pi} \frac{\sin \lambda s d\lambda}{\left(\frac{\lambda\pi}{\varphi_1}\right)^2 + 4} \right]$$

Решение уравнений (2.15) известно [5]:

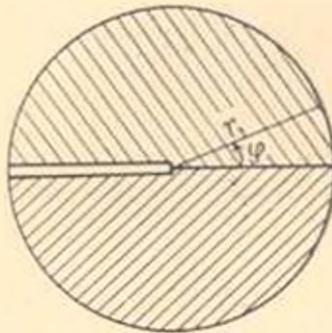
$$Z(\lambda) = \lambda \operatorname{th} \lambda\pi \left[\int_0^{s_1} \Omega(\alpha) P_{-\lambda-1, \lambda}(\operatorname{ch} \alpha) \operatorname{sh} \alpha d\alpha + \int_{s_1}^{\infty} \omega(\alpha) P_{-\lambda-1, \lambda}(\operatorname{ch} \alpha) \operatorname{sh} \alpha d\alpha \right] \quad (2.16)$$

где

$$\Omega(z) = \frac{1\sqrt{2}}{\pi} \int_0^z \frac{q(s) ds}{|\operatorname{ch} z - \operatorname{ch} s|}, \quad \omega(z) = \frac{1\sqrt{2}}{\pi} \int_0^z \frac{h(s) ds}{|\operatorname{ch} s - \operatorname{ch} z|}$$

$P_{-\frac{1}{2}+it}(\operatorname{ch} z)$ — функция Лежандра.

Из (2.11) и (2.12) с учетом (2.14) и (2.16) определяются $D_i(z)$.



Фиг. 4.

В частном случае для круглого стержня с радиальной трещиной, когда $t_1 = 0$, $\varphi_1 = \pi$ (фиг. 4), получаем

$$\begin{aligned} \Phi_1(t, \varphi) = & \frac{r_1^2}{2} + \frac{4r_1^2}{\pi} \frac{G_1 - G_2}{G_1 + G_2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{ch} z \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right)}{z(z^2 + 4) \operatorname{ch} \frac{z\pi}{2}} \sin ztdz - \\ & + \frac{8r_1^2 G_2}{\pi(G_1 + G_2)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{ch} z\varphi \sin ztdz}{z(z^2 + 4) \operatorname{ch} z\pi} \quad (-\infty < t < 0; \quad 0 < \varphi < \pi) \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \Phi_2(t, \varphi) = & \frac{r_1^2}{2} + \frac{4r_1^2}{\pi} \frac{G_2 - G_1}{G_1 + G_2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{ch} z \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right)}{z(z^2 + 4) \operatorname{ch} \frac{z\pi}{2}} \sin ztdz + \\ & + \frac{8r_1^2 G_1}{\pi(G_1 + G_2)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{ch} z\varphi \sin ztdz}{z(z^2 + 4) \operatorname{ch} z\pi} \quad (-\infty < t < 0; \quad -\pi < \varphi < 0) \end{aligned} \quad (2.18)$$

Произведя некоторые преобразования, приведем выражения (2.17) и (2.18) к виду:

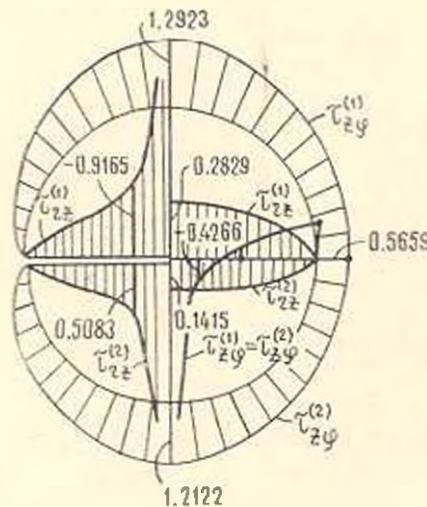
$$\Phi_1^*(r, \varphi) = \frac{r_1^2}{2} \left(\frac{r^2}{r_1^2} \cos 2\varphi - 1 \right) +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{8r_1^2}{\pi} \left[\frac{8G_2}{G_1 + G_2} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k+1}{2}} \cos \frac{k\varphi}{2}}{k(k^2 - 4^2)} \left(\frac{r}{r_1}\right)^{\frac{k}{2}} - \right. \\
 & \left. - \frac{G_1 - G_2}{G_1 + G_2} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\sin k\varphi}{k(k^2 - 4)} \left(\frac{r}{r_1}\right)^k \right] \quad (0 < r < r_1; \quad 0 < \varphi < \pi) \quad (2.19)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Phi_0^*(r, \varphi) = & \frac{r_1^2}{2} \left(\frac{r^2}{r_1^2} \cos 2\varphi - 1 \right) + \\
 & + \frac{8r_1^2}{\pi} \left[\frac{8G_1}{G_1 + G_2} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{k+1}{2}} \cos \frac{k\varphi}{2}}{k(k^2 - 4^2)} \left(\frac{r}{r_1}\right)^{\frac{k}{2}} + \right. \\
 & \left. + \frac{G_2 - G_1}{G_1 + G_2} \sum_{k=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\sin k\varphi}{k(k^2 - 4)} \left(\frac{r}{r_1}\right)^k \right] \quad (0 < r < r_1; \quad -\pi < \varphi < 0) \quad (2.20)
 \end{aligned}$$

Согласно (1.11) для жесткости рассматриваемого стержня получим

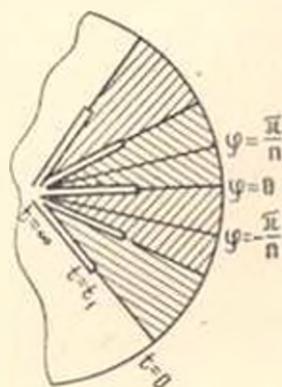
$$\begin{aligned}
 C = & \frac{r_1^4}{4} (G_1 + G_2) + r_1^4 \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2} \left(\pi - \frac{128}{9\pi} \right) + \\
 & - r_1^4 \frac{(G_1 - G_2)(G_2 - G_1)}{G_1 - G_2} \left(\frac{4}{\pi} - \frac{\pi}{4} \right) \quad (2.21)
 \end{aligned}$$



Фиг. 5.

На фиг. 5 приведены эпюры напряжений при $G_1 = 2G_2$, построенные в долях $r_1 G_1 \theta$.

3. Составная стержень имеет поперечное сечение в виде круга с центральными симметричными радиальными разрезами (фиг. 6). Каждая составная часть при этом предполагается однородной и изотропной. В силу симметрии профиля функцию напряжений ищем только в n -ой части области поперечного сечения.



Фиг. 6.

Для определения функций $\Phi_i(t, \varphi)$ ($i = 1, 2$) имеем уравнение (1.4) и граничные условия

$$\begin{aligned} \Phi_1(0, \varphi) - \frac{r_1^2}{2} - U_0 &= \Phi_2(0, \varphi) - \frac{r_1^2}{2} - U_0 = \\ &= \frac{\partial \Phi_1(t, \varphi)}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} = \frac{\partial \Phi_2(t, \varphi)}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} = 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\Phi_2(t, 0) = \frac{r_1^2 e^{-2t}}{2} \quad (t_1 < t < \infty) \quad (3.2)$$

$$G_1 \left[\Phi_1(t, 0) - \frac{r_1^2 e^{-2t}}{2} \right] = G_2 \left[\Phi_2(t, 0) - \frac{r_1^2 e^{-2t}}{2} \right] \quad (0 < t < t_1)$$

$$\Phi_2(t, 0) = \frac{r_1^2 e^{-2t}}{2} \quad (t_1 < t < \infty) \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial \Phi_1(t, \varphi)}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} = \frac{\partial \Phi_2(t, \varphi)}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} \quad (0 < t < t_1)$$

где U_0 — значения функции напряжений на внешнем контуре сечения.

Функции Φ_1 и Φ_2 ищем в виде суммы ряда и интеграла Фурье

$$\Phi_i(t, \varphi) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} A_{\lambda}^{(i)} e^{-\lambda t} \sin \lambda \varphi + \int_0^{\infty} [C_{\lambda}(z) \operatorname{sh} z \varphi + D_{\lambda}(z) \operatorname{ch} z \varphi] \sin \lambda t dz \quad (3.4)$$

$$\nu_2 = \frac{(2k-1)n}{2} \quad \Phi_1(t, \varphi) = \begin{cases} \Phi_1(t, \varphi) & 0 < t < \infty \\ & 0 < \varphi < \frac{\pi}{n} \\ \Phi_2(t, \varphi) & 0 < t < \infty \\ & -\frac{\pi}{n} < \varphi < 0 \end{cases}$$

Удовлетворяя граничным условиям (3.1), получаем

$$A_k^{(1)} = -A_k^{(2)} = \frac{r_1^2 + 2U_0}{\pi \nu_2}$$

$$C_1(z) \operatorname{ch} \frac{z\pi}{n} + D_1(z) \operatorname{sh} \frac{z\pi}{n} = 0 \quad (3.5)$$

$$C_2(z) \operatorname{ch} \frac{z\pi}{n} - D_2(z) \operatorname{sh} \frac{z\pi}{n} = 0$$

Условия (3.2) и (3.3) дают следующую систему парных уравнений:

$$\int_0^{\infty} \left[D_1(z) - \frac{G_2}{G_1} D_2(z) \right] \sin zt dz = \frac{r_1^2 e^{-2t}}{2} \left(1 - \frac{G_2}{G_1} \right) \quad (0 < t < t_1) \quad (3.6)$$

$$\int_0^{\infty} D_1(z) \sin zt dz = \frac{r_1^2 e^{-2t}}{2} \quad (t_1 < t < \infty)$$

$$\int_0^{\infty} z |C_1(z) - C_2(z)| \sin zt dz = -\frac{r_1^2 + 2U_0}{\pi \operatorname{sh} \frac{nt}{2}} \quad (0 < t < t_1) \quad (3.7)$$

$$\int_0^{\infty} D_2(z) \sin zt dz = \frac{r_1^2 e^{-2t}}{2} \quad (t_1 < t < \infty)$$

Используя второе уравнение (3.7), из (3.6) имеем

$$D_1(z) - \frac{G_2}{G_1} D_2(z) = \frac{r_1^2 z}{\pi(4-z^2)} \left(1 - \frac{G_2}{G_1} \right) \quad (3.8)$$

Обозначая

$$C_1(z) - C_2(z) = Y(z) \quad (3.9)$$

и используя (3.5)–(3.7), будем иметь

$$\int_0^{\infty} z Y(z) \sin zt dz = \frac{n(r_1^2 + 2U_0)}{\pi \operatorname{sh} \frac{\pi t}{2}} \quad (0 < t < t_1) \quad (3.10)$$

$$\int_0^{\infty} Y(z) \operatorname{cth} \frac{z\pi}{n} \sin zt dz = r_1^2 e^{-2t} \quad (t_1 < t < \infty)$$

Продифференцировав первое уравнение (3.10) по t , а второе — два раза по t , получим:

$$\int_0^{t_1} z^2 Y(z) \cos zt dz = - \frac{n^2 (r_1^2 + 2U_0) \operatorname{ch} \frac{nt}{2}}{2\pi \operatorname{sh}^2 \frac{nt}{2}} \quad (0 < t < t_1) \quad (3.11)$$

$$\int_0^{\infty} z^2 Y(z) \operatorname{cth} \frac{z\pi}{n} \sin zt dz = 4r_1^2 e^{-\alpha t} \quad (t_1 < t < \infty)$$

Введя обозначения

$$\frac{z}{n} = \lambda, \quad nt = s, \quad nt_1 = s_1, \quad n^3 Y(n\lambda) = X(\lambda) \quad (3.12)$$

парные уравнения (3.11) приведем к виду

$$\int_0^{s_1} X(\lambda) \cos \lambda s d\lambda = h(s) \quad (0 < s < s_1) \quad (3.13)$$

$$\int_{s_1}^{\infty} X(\lambda) \operatorname{cth} \lambda\pi \sin \lambda s d\lambda = q(s) \quad (s_1 < s < \infty)$$

где

$$h(s) = - \frac{n^2 (r_1^2 + 2U_0)}{2\pi \operatorname{sh}^2 \frac{s}{2}}, \quad q(s) = 4r_1^2 e^{-\frac{2s}{n}}$$

Решение уравнений (3.13) имеет вид

$$X(\lambda) = \lambda \operatorname{th} \lambda\pi \left[\int_0^{s_1} \Omega(\alpha) P_{-\lambda-1/2}(\operatorname{ch} \alpha) \operatorname{sh} \alpha d\alpha - \right. \\ \left. + \int_{s_1}^{\infty} \omega(\alpha) P_{-\lambda-1/2}(\operatorname{ch} \alpha) \operatorname{sh} \alpha d\alpha \right]$$

где

$$\Omega(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{s_1} \frac{h(s) ds}{\sqrt{\operatorname{ch} s - \operatorname{ch} \alpha}}, \quad \omega(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_{s_1}^{\infty} \frac{q(s) ds}{\sqrt{\operatorname{ch} s - \operatorname{ch} \alpha}}$$

Для определения U_0 , согласно формуле Бредта, имеем соотношение

$$U_0 = \frac{M_1}{M_2}$$

где

$$M_1 = \int_0^{\infty} \frac{\text{th } \lambda \pi}{\lambda^2} d\lambda \int_{s_0}^{\infty} \omega(\alpha) P_{-1/2+i\lambda}(\text{ch } \alpha) \text{sh } \alpha d\alpha -$$

$$- \frac{V\sqrt{2} n^2 r_1^2}{2\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{\text{th } \lambda \pi}{\lambda^2} d\lambda \int_0^{s_1} P_{-1/2+i\lambda}(\text{ch } \alpha) \text{sh } \alpha d\alpha \int_0^{\pi} \frac{\text{ch } \frac{s}{2} ds}{\text{sh}^2 \frac{s}{2} \sqrt{\text{ch } \alpha - \text{ch } s}}$$

$$M_2 = \frac{V\sqrt{2} n^2}{\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{\text{th } \lambda \pi}{\lambda^2} d\lambda \int_0^{s_2} P_{-1/2+i\lambda}(\text{ch } \alpha) \text{sh } \alpha d\alpha \int_0^{\pi} \frac{\text{ch } \frac{s}{2} ds}{\text{sh}^2 \frac{s}{2} \sqrt{\text{ch } \alpha - \text{ch } s}}$$

Автор выражает благодарность К. С. Чобаняну за обсуждение.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 26 III 1970

Լ. Ա. ԱՐՄԻՍՅԱՆ

ԲԱՂԱԿՐՅԱԿ ՉՈՂԵՐԻ ՊՂՈՐՄԱՆ ՄԻ ՔԱՆԻ ԿՆԴԻՐՆԵՐ

Ա մ փ ո փ ս լ մ

Աշխատանքում պատարկվում են բաղադրյալ կլոր ձողի և ընդլայնական հատվածքում շառավղային հարիս ունեցող բաղադրյալ պլանային սեկտորի ոլորման խնդիրները:

Ձույզ ինտեգրալ հավասարումների լուծման օգնությամբ ստացված են փակ լուծումներ:

SOME PROBLEMS OF TORSION OF COMPOSITE RODS

L. A. ARUTIUNIAN

S u m m a r y

This paper deals with some problems of torsion of circular and sectional section rods composed of cylindrical sectors with varying shear moduli of the material.

The closed solutions are obtained on the basis of solutions of dual integral equations.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Dumitrescu L. și Stănescu C.* Torsiunea unei bare cilindrice neomogene. Studii și cercetări de mechinică aplicată. № 1, 8, 1957.
2. *Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. А.* Кручение упругих тел. Физматгиз, М., 1963.
3. *Чобанян К. С.* Применение функции напряжений в задаче о кручении призматических стержней, составленных из различных материалов. Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат., естеств. и техн. наук, т. VII, № 2, 1955.
4. *Мухеллишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., 1966.
5. *Баблюян А. А.* Решение некоторых парных интегральных уравнений. ПИММ, т. 28, 1964.
6. *Гаворкян С. Х.* Исследование особенностей решений в некоторых задачах теории упругости анизотропного тела. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XXI, № 4, 1968.