

Р. А. МЕЖАУМЯН, Р. Ш. СОЛОМОНЯН

## МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО СКОСА ПОТОКА ЗА КРЫЛОМ КОНЕЧНОГО РАЗМАХА ПРИ СВЕРХЗВУКОВОМ ДВИЖЕНИИ

Вопрос определения нестационарного скоса потока за крылом имеет большое практическое значение при решении задачи устойчивости и управляемости крылатого летательного аппарата, а также при определении аэродинамических характеристик второго крыла летательного аппарата системы «таидем». Аэродинамические характеристики второго крыла выражаются через снос потока, создаваемого передним крылом. Вопрос определения нестационарных аэродинамических характеристик изолированного крыла рассмотрен в работах [1—3, 5]. В книгах [1, 5] даются общие формулы потенциала возмущений и аэродинамических характеристик крыла. Введение коэффициентов вращательных производных [2, 3] дает возможность доводить расчеты до числа. Вопрос определения нестационарного скоса потока рассмотрен в работах [4, 7, 9]. В работе [6] авторы получили решение задачи в замкнутом виде для скоса потока за профилем, совершающим синусоидальные колебания при малых скоростях потока. В работах [4, 5, 9] дана общая постановка задачи об определении скоса потока на колеблющемся крыле. Автор работы [4] задачу ставит в довольно общем виде и решает для дозвукового движения. При сверхзвуковой скорости он представляет снос потока как сумму трех слагаемых и определяет одно из этих слагаемых у задней кромки крыла для малых чисел Струхала.

В настоящей статье дано полное решение задачи определения скоса потока за крылом для конечных значений числа Струхала в линейной постановке на основе представления потенциала возмущения через коэффициенты вращательных производных.

1. *Постановка задачи.* Рассмотрим движение тонкого слабоизогнутого крыла с малым углом атаки в идеальной жидкости при отсутствии внешних сил. Будем считать, что основное движение крыла является прямолинейным поступательным движением с постоянной сверхзвуковой скоростью  $U$ . Предположим также, что, кроме основного движения, крыло совершает малые добавочные неустановившиеся колебания. Движение считаем безвихревым, а кромки крыла сверхзвуковыми.

Введем систему координат  $Ox_1y_1z_1$ , жестко скрепленную с крылом, которое в плане имеет форму  $AOBDA$  (фиг. 1). Время обозначим через  $t_1$ . В линейной теории эта задача сводится к решению полно-



$\alpha, \omega_x, \omega_y$  — безразмерные угловые скорости,  $\omega_{x_1}, \omega_{y_1}$  — безразмерные угловые ускорения. Предполагается, что эти параметры являются малыми величинами по сравнению с единицей.

Аналогичным образом, представим через вращательные производные [4] нестационарный скоростной поток:

при симметричных движениях

$$\frac{V_x}{U} = z_1^{(1)} q_1 + z_1^{(2)} q_1 + z_1^{(3)} q_1 + z_1^{(4)} q_1 \quad (1.4)$$

при антисимметричных движениях

$$\frac{V_x}{U} = z_1^{(1)} q_1 + z_1^{(3)} q_1 \quad (1.5)$$

где  $V_x$  — составляющая возмущенной скорости по направлению оси  $oz_1$ .

В формулах (1.4) и (1.5) коэффициенты

$$z_1^{(v)} = \frac{1}{U} \frac{\partial z_1^{(v)}}{\partial z_1}, \quad z_1^{(v)} = \frac{1}{U} \frac{\partial z_1^{(v)}}{\partial z_1} \quad (v = 1, 3, 4) \quad (1.6)$$

называются коэффициентами вращательных производных скоростей, которые являются функциями числа Маха и Струхала, а также координат точки, в которой вычисляются скорости, и не зависят от времени.

Предположим, что малые добавочные колебания крыла совершает по гармоническому закону, т. е. кинематические параметры зависят от времени следующим образом:

$$q_1 = A e^{j\rho t_1}, \quad q_2 = A_j e^{j\rho t_1} \quad (v = 1, 3, 4) \quad (1.7)$$

где  $j = \sqrt{-1}$ ,  $A, A_j$  — амплитудные значения кинематических параметров,  $\rho$  — круговая частота,  $\rho^* = \frac{\rho b}{U}$  — число Струхала.

В этом случае выражение (1.2) выглядит так:

$$\psi(x_1, y_1, z_1, t_1) = \frac{\partial \psi_0}{\partial z_1} + \sum_j A_j e^{j\rho t_1} \left[ \frac{\partial z_1^{(1)}}{\partial z_1} + j\rho^* z_1^{(2)} \right] \quad (1.8)$$

а нормальная производная потенциала возмущений

$$\frac{\partial \psi(x_1, y_1, z_1, t_1)}{\partial z_1} = \frac{\partial \psi_0}{\partial z_1} + \sum_j A_j e^{j\rho t_1} \left[ \frac{\partial z_1^{(1)}}{\partial z_1} + j\rho^* z_1^{(2)} \right] \quad (1.9)$$

Введем безразмерные координаты и время

$$x = \frac{2}{k} x_1, \quad y = \frac{2}{l} y_1, \quad z = \frac{2}{l} z_1, \quad t = \frac{U}{b} t_1$$

а также обозначения для неустойчивых частей потенциала возмущений

$$\Phi^{(i)}(x, y, z) = \frac{2}{\pi} \iint_{\Omega(x, y, z)} \frac{\partial \Phi_v^{(i)}}{\partial z} \cos \left[ \frac{\lambda}{4} p_* \left( k + \frac{1}{k} \right) (x - \xi) \right] dz \quad (1.10)$$

(i = 1, 2; v = 1, 3, 4)

С учетом обозначений (1.10) подставим (1.8) и (1.9) в формулу (1.1), после чего приравняем множители при одноименных амплитудах  $A$ , и выделим действительные и мнимые части полученных выражений. В результате получаются следующие формулы в безразмерных декартовых координатах для неустановившейся части потенциала возмущений:

$$\begin{aligned} \Phi^{(1)}(x, y, z) = & -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega(x, y, z)} \left\{ \left( \frac{\partial \Phi_v^{(1)}}{\partial z} \right)_{z=0} \cos \left[ \frac{\lambda}{4} p_* \left( k + \frac{1}{k} \right) (x - \xi) \right] \right. \\ & \left. + p_* \left( \frac{\partial \Phi_v^{(2)}}{\partial z} \right)_{z=0} \sin \left[ \frac{\lambda}{4} p_* \left( k + \frac{1}{k} \right) (x - \xi) \right] \right\} \times \\ & \cos \left[ \frac{\lambda}{4} p_* \left| k^2 + 1 \right| \frac{r}{k^2} \right] \frac{d\xi d\eta}{r} \quad (1.11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi^{(2)}(x, y, z) = & -\frac{1}{\pi} \iint_{\Omega(x, y, z)} \left\{ \left( \frac{\partial \Phi_v^{(2)}}{\partial z} \right)_{z=0} \cos \left[ \frac{\lambda}{4} p_* \left( k + \frac{1}{k} \right) (x - \xi) \right] \right. \\ & \left. - \frac{1}{p_*} \left( \frac{\partial \Phi_v^{(1)}}{\partial z} \right)_{z=0} \sin \left[ \frac{\lambda}{4} p_* \left( k + \frac{1}{k} \right) (x - \xi) \right] \right\} \times \\ & \times \cos \left[ \frac{\lambda}{4} p_* \left| k^2 + 1 \right| \frac{r}{k^2} \right] \frac{d\xi d\eta}{r} \quad (1.12) \end{aligned}$$

где  $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2}$ ,  $k = \frac{l}{S}$  — относительное удлинение,

$S, l$  — площадь и размах крыла.

Формулы (1.11) и (1.12) впервые получены М. К. Фурсовым [10].

Если будут известны нормальные производные  $\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z}$  и  $\frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial z}$  в области интегрирования, то по формулам (1.11) и (1.12) можно будет вычислить  $\Phi^{(1)}$  и  $\Phi^{(2)}$ .

**2. Граничные условия при гармоническом колебании.** Нормальные производные на плоскости  $x, y$  определяем из следующих граничных условий.

Вперед от огибающей поверхности конусов возмущений с вершинами в точках передней кромки крыла воздух не возмущен, поэтому в каждой точке этой части пространства

$$\Phi^{(i)}(x, y, z) = 0, \quad \frac{\partial \Phi_v^{(i)}}{\partial z}(x, y, z) = 0 \quad (i = 1, 2; v = 1, 3, 4) \quad (2.1)$$

На поверхности крыла даны семи нормальные производные потенциала из условий планного обтекания и представляются в виде [1.3]:

$$\left. \frac{\partial \Phi_{i-1}^{(1)}(x, y, z)}{\partial z} \right|_{z=0} = -1, \quad \left. \frac{\partial \Phi_{i-1}^{(2)}(x, y, z)}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{iy}{4}$$

$$\left. \frac{\partial \Phi_i^{(1)}(x, y, z)}{\partial z} \right|_{z=0} = \frac{ikx}{4}, \quad \left. \frac{\partial \Phi_i^{(2)}(x, y, z)}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad (2.2)$$

( $i = 1, 2; \nu = 1, 3, 4$ )

Область, заключенная между прямыми  $BH$  и  $AH$  ( $\Sigma_1$  на фиг. 1) и простирающаяся до бесконечности по направлению потока, начиная от задней кромки, называется вихревой пеленой. Линии  $BH$  и  $AH$  параллельны направлению набегающего потока, а точки  $A$  и  $B$  суть концевые точки крыла. Из условия непрерывности давления на этой области получаются условия

$$\frac{\partial \Phi^{(1)}(x, y, 0)}{\partial x} - \frac{ik}{4} p^* \Phi^{(1)}(x, y, 0) = 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \Phi^{(2)}(x, y, 0)}{\partial x} + \frac{ik}{4} \Phi^{(2)}(x, y, 0) = 0 \quad (2.4)$$

Область  $\Sigma_2$  ( $\Sigma_2'$ ) — это часть плоскости  $xy$ , находящейся внутри копуса Маха, с вершиной в точке  $E$  ( $E'$ ), вне вихревой пелены и вне поверхности крыла. На областях  $\Sigma_2$  и  $\Sigma_2'$  выполняются условия

$$\Phi^{(i)}(x, y, 0) = 0 \quad (i = 1, 2; \nu = 1, 3, 4) \quad (2.5)$$

Для дальнейших расчетов удобнее условия (2.3) и (2.4) проинтегрировать и представить их в следующем виде:

$$\Phi^{(1)}(x, y, 0) = f^{(1)}(y) \cos \left| \frac{ik}{4} p^* [x - \bar{z}(y)] \right| +$$

$$p^* f^{(2)}(y) \sin \left| \frac{ik}{4} p^* [x - \bar{\varphi}(y)] \right| \quad (2.6)$$

$$\Phi^{(2)}(x, y, 0) = -\frac{1}{p^*} f^{(1)}(y) \sin \left| \frac{ik}{4} p^* [x - \bar{\varphi}(y)] \right| +$$

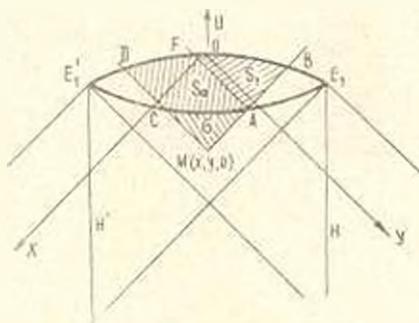
$$+ f^{(2)}(y) \cos \left| \frac{ik}{4} p^* [x - \bar{\varphi}(y)] \right| \quad (2.7)$$

где  $x = \bar{z}(y)$  — уравнение задней кромки крыла, а  $f^{(1)}(y)$  и  $f^{(2)}(y)$  — известные функции, равные значениям соответственно функций  $\Phi^{(1)}$  и  $\Phi^{(2)}$  на задней кромке крыла. Объединяя условия (2.5), (2.6) и (2.7), получим

$$\Phi^{(i)}(x, y, 0) = G^{(i)}(x, y), \quad (i = 1, 2; \nu = 1, 3, 4) \quad (2.8)$$

где  $G^{(i)}$  обращаются в нуль для областей  $\Sigma_2$  и  $\Sigma_2'$  и равны правым частям условий (2.6) и (2.7) для вихревой пелены.

3. *Интегральные уравнения для определения нормальных производных.* Условия (2.8) дают возможность при помощи формул (1.11) и (1.12) составить интегральные уравнения для определения нормальных производных функций  $\Phi^{(i)}(x, y, z)$ . На плоскости  $xu$  возьмем некоторую точку  $M(x, y, 0)$  и проведем из нее обратный конус Маха (фиг. 2). Рассмотрим тот случай, когда следы конуса пересекаются с поверхностью крыла. В этом случае область интегрирования  $\delta(x, y)$  состоит из областей:  $s = s_0 + s_1$  — на крыле, и  $s(x, y)$  — на вихревой пелене (фиг. 2). В области  $s$  нормальные производные известны. Их обозначим  $\left(\frac{\partial \Phi^{(i)}}{\partial z}\right)_{z=0} = B^{(i)}(x, y)$ . На области  $s$  эти производные неизвестны, они подлежат определению. Их обозначим  $b^{(i)}(x, y)$ .



Фиг. 2.

В принятых обозначениях для точки  $M$  из формул (1.11) и (1.12) получим следующую систему интегральных уравнений:

$$\begin{aligned}
 & \iint_{\delta(x, y)} \left\{ b^{(1)}(\xi, \eta) \cos \left[ \frac{\lambda}{4} p_* \left( k + \frac{1}{k} \right) (x - \xi) \right] \cos \left[ \frac{\lambda}{4} p_* \sqrt{k^2 + 1} \frac{r}{k^2} \right] + \right. \\
 & \quad \left. + p_* b^{(2)}(\xi, \eta) \sin \left[ \frac{\lambda}{4} p_* \left( k + \frac{1}{k} \right) (x - \xi) \right] \times \right. \\
 & \quad \left. \times \cos \left[ \frac{\lambda}{4} p_* \sqrt{k^2 + 1} \frac{r}{k^2} \right] \frac{d\xi d\eta}{r} = -\pi G^{(1)}(x, y) - \right. \\
 & \quad \left. - \iint_{s(x, y)} B^{(1)}(\xi, \eta) \cos \left[ \frac{\lambda}{4} p_* \left( k + \frac{1}{k} \right) (x - \xi) \right] \times \right. \\
 & \quad \left. \times \cos \left[ \frac{\lambda}{4} p_* \sqrt{k^2 + 1} \frac{r}{k^2} \right] \frac{d\xi d\eta}{r} \right. \quad (3.1) \\
 & \quad \left. \iint_{\delta(x, y)} \left\{ b^{(2)}(\xi, \eta) \cos \left[ \frac{\lambda}{4} p_* \left( k + \frac{1}{k} \right) (x - \xi) \right] \right. \right. \\
 & \quad \left. \times \cos \left[ \frac{\lambda}{4} p_* \sqrt{k^2 + 1} \frac{r}{k^2} \right] - \frac{1}{p_*} b^{(1)}(\xi, \eta) \times \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \sin \left[ \frac{\lambda}{4} p^* \left( k + \frac{1}{k} \right) (x - \xi) \right] \cos \left[ \frac{\lambda}{4} p^* \sqrt{k^2 + 1} \frac{r}{k^2} \right] \frac{d\xi d\gamma}{r} = \\ & = -\pi G_0^{(2)}(x, y) - \int \int_{s(x, y)} B_0^{(1)}(\xi, \gamma) \sin \left[ \frac{\lambda}{4} p^* \left( k + \frac{1}{k} \right) (x - \xi) \right] \times \\ & \quad \times \cos \left[ \frac{\lambda p^*}{4} \sqrt{k^2 + 1} \frac{r}{k^2} \right] \frac{d\xi d\gamma}{r} \end{aligned} \quad (3.2)$$

В этой системе правые части являются известными функциями и решение ее ищем разложением подынтегральных функций обеих частей уравнений в ряд по степеням  $\omega = \frac{\lambda k}{4} p^*$ .

Представим произведения тригонометрических функций как сумму косинусов и синусов, потом разложим каждое слагаемое в ряд. После несложных вычислений получим

$$\begin{aligned} & \cos \left[ \frac{\lambda k}{4} p^* \left( 1 + \frac{1}{k^2} \right) (x - \xi) \right] \cos \left[ \frac{\lambda k}{4} p^* \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} \frac{r}{k^2} \right] = \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} A_{2n} \omega^{2n} \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} & \sin \left[ \frac{\lambda k}{4} p^* \left( 1 + \frac{1}{k^2} \right) (x - \xi) \right] \cos \left[ \frac{\lambda k}{4} p^* \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} \frac{r}{k^2} \right] = \\ & = \frac{\omega}{2} \left\{ \sin \left[ \frac{\lambda k}{4} p^* \left( 1 + \frac{1}{k^2} \right) (x - \xi) + \frac{\lambda k}{4} p^* \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} \frac{r}{k^2} \right] + \right. \\ & \quad \left. + \sin \left[ \frac{\lambda k}{4} p^* \left( 1 + \frac{1}{k^2} \right) (x - \xi) - \frac{\lambda k}{4} p^* \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} \frac{r}{k^2} \right] \right\} = \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A_{2n+1} \omega^{2n+1} \end{aligned} \quad (3.4)$$

где

$$A_{2n} = \sum_{j=0}^{2n} C_{2n}^{2j} \left( 1 + \frac{1}{k^2} \right)^{2n-j} (x - \xi)^{2(n-j)} \left( \frac{r}{k^2} \right)^{2j} \quad (3.5)$$

$$A_{2n+1} = \sum_{j=0}^{2n+1} C_{2n+1}^{2j} \left( 1 + \frac{1}{k^2} \right)^{2n+1-j} (x - \xi)^{2(n-j)+1} \left( \frac{r}{k^2} \right)^{2j} \quad (3.6)$$

$C_{2n}^{2j}$  и  $C_{2n+1}^{2j}$  — биномиальные коэффициенты.

Разложим функцию  $U_0^{(i)}(\xi, \gamma)$  тоже в степенной ряд

$$U_0^{(i)}(\xi, \gamma) = \sum_{\nu=0}^{\infty} U_{\nu}^{(i)}(\xi, \gamma) \omega^{\nu} \quad (i=1, 2; \nu=1, 3, 4) \quad (3.7)$$

Перемножим эти ряды, после чего получим

$$\begin{aligned} \Phi_1^{(n)}(\xi, \eta) \cos \left| \omega \left( 1 + \frac{1}{k^2} \right) (x - \xi) \right| \cos \left| \omega \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} \frac{r}{k^2} \right| = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n \sum_{g=n}^{\infty} \frac{(-1)^{n-g}}{[2(n-g)]!} A_{2(n-g)}^{(0)} \Phi_{2(n-g)}^{(0)}(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \Phi_2^{(n)}(\xi, \eta) \sin \left| \omega \left( 1 + \frac{1}{k^2} \right) (x - \xi) \right| \cos \left| \omega \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} \frac{r}{k^2} \right| = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \omega^{n+1} \sum_{g=n}^{\infty} \frac{(-1)^{n-g}}{[2(n-g)+1]!} A_{2(n-g)+1}^{(0)} \Phi_{2(n-g)+1}^{(0)}(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (3.9)$$

где  $m = \frac{n}{2}$ , если  $n$  — число четное и  $m = \frac{n+1}{2}$ , если  $n$  — число нечетное.

Аналогичным образом получают разложения правых частей условий (2.6) и (2.7)

$$f^{(i)}(y) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{i,n}^{(i)}(y) \omega^n \quad (i = 1, 2; \quad \nu = 1, 3, 4) \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \Phi_1^{(1)}(x, y, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n \sum_{g=n}^{\infty} \frac{(-1)^{n-g}}{[2(n-g)]!} f_{2(n-g)}^{(1)}(y) [x - \bar{\varphi}(y)]^{2(n-g)} + \\ + \frac{4}{k} \omega^2 \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n \sum_{g=n}^{\infty} \frac{(-1)^{n-g}}{[2(n-g)+1]!} f_{2(n-g)+1}^{(1)}(y) [x - \bar{\varphi}(y)]^{2(n-g)+1} \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \Phi_2^{(1)}(x, y, 0) = -\frac{ik}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n \sum_{g=n}^{\infty} \frac{(-1)^{n-g}}{[2(n-g)+1]!} \\ \times f_{2(n-g)+1}^{(1)}(y) [x - \bar{\varphi}(y)]^{2(n-g)+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n \sum_{g=n}^{\infty} \frac{(-1)^{n-g}}{[2(n-g)]!} \times \\ \times f_{2(n-g)}^{(1)}(y) [x - \bar{\varphi}(y)]^{2(n-g)} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Подставим ряды (3.8), (3.9), (3.11) и (3.12) в систему интегральных уравнений. Предполагая равномерную сходимость рядов (3.8) и (3.9) относительно переменных  $\xi$  и  $\eta$ , после подстановки в систему (3.1) и (3.2), интегрируем их почленно. В результате получим

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \omega^n \sum_{g=n}^{\infty} \frac{(-1)^{n-g}}{[2(n-g)]!} \int \int_{\Omega(x,y)} \left\{ A_{2(n-g)}^{(0)} \Phi_{2(n-g)}^{(0)}(\xi, \eta) + \right. \\ \left. + \frac{4}{k} \frac{\omega^2}{2(n-g)+1} A_{2(n-g)+1}^{(0)} \Phi_{2(n-g)+1}^{(0)}(\xi, \eta) \right\} \frac{d\xi d\eta}{r} = \end{aligned}$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \omega^r \sum_{g=r}^n \frac{(-1)^{n-r}}{[2(n-g)]!} \left\{ \iint_{\xi, \eta} B^{(1)}(\xi, \eta) A_{2n-g} \frac{d\xi d\eta}{r} \right\} \\ \times f_{\xi, \eta}^{(2)}(y) |x - \xi(y)|^{2n-r} = \frac{4\pi\omega^2}{ik[2(n-g)+1]} \\ \times f_{\xi, \eta}^{(2)}(y) |x - \xi(y)|^{2(n-r)+1} \quad (3.13)$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} \omega^r \sum_{g=r}^n \frac{(-1)^{n-r}}{[2(n-g)]!} \iint_{\xi, \eta} \left\{ A_{2n-g} b_{\xi, \eta}^{(1)}(\xi, \eta) - \right. \\ \left. - \frac{ik}{4} \frac{A_{2n-g+1}}{2(n-g)+1} b_{\xi, \eta}^{(1)}(\xi, \eta) \right\} \frac{d\xi d\eta}{r} = \\ = \frac{ik}{4} \sum_{r=0}^{\infty} \omega^r \sum_{g=r}^n \frac{(-1)^{n-r}}{[2(n-g)]!} \iint_{\xi, \eta} A_{2n-g+1} B^{(1)}(\xi, \eta) \frac{d\xi d\eta}{r} \\ + \frac{4\pi}{2(n-g)+1} f_{\xi, \eta}^{(2)}(y) |x - \xi(y)|^{2(n-r)+1} = \\ = \frac{4\pi}{ik} f_{\xi, \eta}^{(2)}(y) |x - \xi(y)|^{2(n-r)} \quad (3.14)$$

Сравнивая в уравнениях (3.13) и (3.14) коэффициенты при одинаковых степенях  $\omega$ , получим системы интегральных уравнений для определения неизвестных функций  $b_{\xi, \eta}^{(1)}(x, y)$

$$\iint_{\xi, \eta} \left\{ b_{\xi, \eta}^{(1)}(\xi, \eta) + \frac{4}{ik} \left(1 + \frac{1}{k^2}\right) (x - \xi) b_{\xi, \eta}^{(1)}(\xi, \eta) \right\} \frac{d\xi d\eta}{r} = F_{\xi, \eta}^{(1)}(x, y) \quad (3.15)$$

$$\iint_{\xi, \eta} \left\{ b_{\xi, \eta}^{(2)}(\xi, \eta) - \frac{ik}{4} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) (x - \xi) b_{\xi, \eta}^{(2)}(\xi, \eta) \right\} \frac{d\xi d\eta}{r} = F_{\xi, \eta}^{(2)}(x, y) \quad (3.16)$$

где обозначены

$$F_{\xi, \eta}^{(1)}(x, y) = \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-r+1}}{[2(n-g)]!} \iint_{\xi, \eta} A_{2n-g} b_{\xi, \eta}^{(1)}(\xi, \eta) \frac{d\xi d\eta}{r} \\ = \frac{4}{ik} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-r}}{[2(n-g)-1]!} \iint_{\xi, \eta} A_{2n-g+1} b_{\xi, \eta}^{(2)}(\xi, \eta) \frac{d\xi d\eta}{r} \\ = \sum_{r=0}^n \frac{(-1)^{n-r+1}}{[2(n-g)]!} \left\{ \iint_{\xi, \eta} A_{2n-g} B^{(1)}(\xi, \eta) \frac{d\xi d\eta}{r} + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \pi \left[ x - \bar{\varphi}(y) \right]^{2(n-g)} f_{\zeta, \eta, n}^{(1)}(y) \Big| - \\
 & \frac{4\pi^{n-1}}{ik} \sum_{j=m}^{n-1} \frac{(-1)^{n-j-1}}{[2(n-g)-1]!} \left[ x - \bar{\varphi}(y) \right]^{2(n-j)-1} f_{\zeta, \eta, n}^{(2)}(y) \quad (3.17)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_{\zeta, \eta, n}^{(2)}(x, y) &= \sum_{j=m}^{n-1} \frac{(-1)^{n-j-1}}{[2(n-g)]!} \iint_{\xi(x, y)}^{\eta} \left| \left| A_{2(n-j)} \psi_{\zeta, \eta, n}^{(2)}(\xi, \tau) \right. \right. \\
 & - \frac{ik}{2(n-g)+1} A_{2(n-j)+1} \psi_{\zeta, \eta, n}^{(1)}(\xi, \tau) \Big| \frac{d\xi d\tau}{r} - \\
 & \frac{ik}{2(n-g)+1} \iint_{\xi(x, y)}^{\eta} A_{2(n-j)+1} B_{\zeta, \eta}^{(1)}(\xi, \tau) \frac{d\xi d\tau}{r} - \\
 & - \frac{ik\pi}{4[2(n-g)+1]} \left[ x - \bar{\varphi}(y) \right]^{2(n-j)-1} f_{\zeta, \eta, n}^{(1)}(y) - \\
 & - \left[ x - \bar{\varphi}(y) \right]^{2(n-g)} f_{\zeta, \eta, n}^{(2)}(y) \Big| \quad (3.18)
 \end{aligned}$$

Как видно, уравнение (3.17) справедливо для  $n \geq 2$ , а (3.18) — для  $n > 1$ .

Приравнявая нулевые степени в уравнениях (3.13) и (3.14), получим систему для определения  $\psi_{\zeta, \eta}^{(1)}$  и  $\psi_{\zeta, \eta}^{(2)}$ :

$$\iint_{\xi(x, y)}^{\eta} \psi_{\zeta, \eta}^{(1)}(\xi, \tau) \frac{d\xi d\tau}{r} - \iint_{\xi(x, y)}^{\eta} B_{\zeta, \eta}^{(1)}(\xi, \tau) \frac{d\xi d\tau}{r} = \pi f_{\zeta, \eta}^{(1)}(y) \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned}
 \iint_{\xi(x, y)}^{\eta} \left| \psi_{\zeta, \eta}^{(2)}(\xi, \tau) - \frac{ik}{4} \left( 1 + \frac{1}{k^2} \right) (x - \xi) \psi_{\zeta, \eta}^{(1)}(\xi, \tau) \right| \frac{d\xi d\tau}{r} - \\
 - \frac{1}{4} \left( k + \frac{1}{k} \right) \iint_{\xi(x, y)}^{\eta} B_{\zeta, \eta}^{(1)}(\xi, \tau) (x - \xi) \frac{d\xi d\tau}{r} = \\
 = \frac{\pi ik}{4} \left[ x - \bar{\varphi}(y) \right] f_{\zeta, \eta}^{(1)}(y) + \pi f_{\zeta, \eta}^{(2)}(y) \quad (3.20)
 \end{aligned}$$

Аналогичным образом, приравнявая коэффициенты при первой степени  $\eta$ , получим

$$\iint_{\xi(x, y)}^{\eta} \psi_{\zeta, \eta}^{(1)}(\xi, \tau) \frac{d\xi d\tau}{r} = \iint_{\xi(x, y)}^{\eta} B_{\zeta, \eta}^{(1)}(\xi, \tau) \frac{d\xi d\tau}{r} = \pi f_{\zeta, \eta}^{(1)}(y) \quad (3.21)$$

Как легко заметить, функции  $\psi_{\zeta, \eta}^{(1)}$  и  $\psi_{\zeta, \eta}^{(2)}$  определяются независимо от других функций  $\psi_{\zeta, \eta}^{(j)}$  соответственно из уравнений (3.19) и (3.21). После подстановки значения  $\psi_{\zeta, \eta}^{(1)}$  в уравнение (3.20) можно опреде-

литель  $\xi_1$ . Из уравнения (3.15) видно, что оно содержит только одну неизвестную функцию — функцию  $\xi_{1n}^{(0)}$ , так как  $\xi_{2n}^{(0)}$  в этом уравнении уже известно из решений предыдущих уравнений. Подставляя решение уравнения (3.15), т. е. функцию  $\xi_{1n}^{(0)}$ , в уравнение (3.16), получим новое уравнение относительно функции  $\xi_{2n}^{(0)}$ .

Таким образом, можно эту систему представить в виде

$$\iint_{\Sigma_1} \xi_{1n}^{(0)}(\xi, \eta) \frac{d\xi d\eta}{r} = F_{1n}^{(0)}(x, y) \quad (3.22)$$

$$\iint_{\Sigma_2} \xi_{2n}^{(0)}(\xi, \eta) \frac{d\xi d\eta}{r} = F_{2n}^{(0)}(x, y) \quad (3.23)$$

где обозначены

$$F_{1n}^{(0)}(x, y) = F_{1n}^{(0)}(x, y) - \frac{4}{k} \left(1 - \frac{1}{k}\right) \iint_{\Sigma_1} (x - \xi) \xi_{1n}^{(0)}(\xi, \eta) \frac{d\xi d\eta}{r} \quad (3.24)$$

$$F_{2n}^{(0)}(x, y) = F_{2n}^{(0)}(x, y) - \frac{ik}{k} \left(1 - \frac{1}{k}\right) \iint_{\Sigma_2} (c - 1) \xi_{2n}^{(0)}(\xi, \eta) \frac{d\xi d\eta}{r} \quad (3.25)$$

Аналогичным образом уравнение (3.20) тоже можно видоизменить. Таким образом, можно определить все коэффициенты разложения (3.7). Если точка  $M$  будет находиться на одной из областей  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$ , то в выражениях (3.17) и (3.18) коэффициенты  $f_{1n}^{(0)}$  будут равны нулю. Введем характеристические координаты

$$\bar{x} = x - y, \quad \bar{y} = x + y, \quad \bar{z} = z \quad (3.26)$$

которые дают возможность относительно легко решить уравнения (3.19) — (3.23).

Для простоты, возьмем крыло, имеющее в плане форму, как показано на фиг. 2. В характеристических координатах пределы изменения переменных в областях  $\Sigma_1$  будут  $\bar{z}_1(\bar{y}) \leq \bar{z} \leq \bar{x}$  и  $\bar{z}_1(\bar{y}) \leq \bar{z} \leq \bar{y}$ , где  $\bar{y} = \bar{z}_1(\bar{x})$  — уравнение задней кромки крыла в преобразованных координатах,  $\bar{x} = \bar{z}_1(\bar{y})$  — уравнение той же кромки, решенное относительно переменной  $\bar{x}$ . В областях  $\Sigma_2$  и  $\Sigma_3$  переменная интегрирования  $\bar{z}$  изменяется соответственно в пределах  $\bar{z}_1(\bar{y}) \leq \bar{z} \leq \bar{x}$  и  $\bar{z}_1(\bar{y}) \leq \bar{z} \leq \bar{y}$ , где  $\bar{y} = \bar{z}_1(\bar{x})$  — уравнение передней кромки в преобразованных координатах,  $\bar{x} = \bar{z}_1(\bar{y})$  — уравнение той же кромки, решенное относительно переменной  $\bar{x}$ . Переменная интегрирования  $\bar{z}$  в этих областях изменяется соответственно в пределах  $\bar{z}_1(\bar{y}) \leq \bar{z} \leq \bar{z}_1(\bar{x})$  и  $\bar{z}_1(\bar{y}) \leq \bar{z} \leq \bar{y}$ .

В дальнейшем, для простоты записи, будем опускать черточку над переменными и индексы „1“ у функций, а известные и неизвестные функции и уравнениях (3.19) – (3.23) будем обозначать теми же символами. Тогда уравнения (3.22) и (3.23) можно объединить в одно

$$\int_{\varphi(x)}^x \int_{\varphi(y)}^y \frac{G_{\nu n}^{(1)}(\xi, \eta)}{|(x-\xi)(y-\eta)|} d\xi d\eta = F_{\nu n}^{(1)}(x, y), \quad (i = 1, 2; \nu = 1, 3, 4) \quad (3.27)$$

которое является двумерным интегральным уравнением типа Абеля. В этом уравнении правая часть является непрерывной функцией в интервале интегрирования  $\varphi(y) \leq x$  и для любого  $n$  функции  $F_{\nu n}^{(1)}(x, y)$  отличны от нуля. Однократное обращение такого уравнения дано в [1]. В нашем случае оно представляется в виде:

$$\int_{\varphi(x)}^x \frac{G_{\nu n}^{(1)}(x, \eta)}{|y-\eta|} d\eta = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{F_{\nu n}^{(1)}[\varphi(y), y]}{|x-\varphi(y)|} - \int_{\varphi(y)}^y \frac{\frac{\partial}{\partial \xi} F_{\nu n}^{(1)}(\xi, y) d\xi}{|x-\xi|} \right\} \quad (3.28)$$

Уравнение (3.28) является одномерным интегральным уравнением типа Абеля, второе слагаемое правой части которого является непрерывной функцией и обращается в нуль при  $y = \varphi(x)$ , а первое слагаемое при этом же значении  $y$  имеет интегрируемую особенность. Решение этого уравнения представим [8] в виде

$$G_{\nu n}^{(1)}(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \int_{\varphi(x)}^y \frac{F_{\nu n}^{(1)}[\varphi(\eta), \eta]}{|y-\eta| |x-\varphi(\eta)|} d\eta + \frac{\partial}{\partial y} \int_{\varphi(x)}^y \int_{\varphi(y)}^{\xi} \frac{1}{|(x-\xi)(y-\eta)|} \frac{\partial}{\partial \xi} F_{\nu n}^{(1)}(\xi, \eta) d\xi d\eta \right\} \quad (3.29)$$

Во втором слагаемом правой части выражения (3.29) выполним дифференцирование по переменному  $y$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\varphi(x)}^y \int_{\varphi(y)}^{\xi} \frac{1}{|(x-\xi)(y-\eta)|} \frac{\partial}{\partial \xi} F_{\nu n}^{(1)}(\xi, \eta) d\xi d\eta = \\ = \int_{\varphi(x)}^y \int_{\varphi(y)}^{\xi} \frac{\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} F_{\nu n}^{(1)}(\xi, \eta)}{|(x-\xi)(y-\eta)|} d\xi d\eta \end{aligned} \quad (3.30)$$

Рассмотрим второе слагаемое. Как легко заметить, формула Лейбница дифференцирования интегралов по параметру не применима для него. Следуя Адамару [5], вместо второго слагаемого возьмем его главное значение согласно следующему равенству:

$$\frac{d}{dy} \int_{\varphi(x)}^y \frac{F_{\nu, n}^{(i)}[\bar{\varphi}(\eta), \eta]}{|x - \bar{\varphi}(\eta)| |y - \eta|} d\eta = \frac{1}{2} V.p. \int_{\varphi(x)}^y \frac{F_{\nu, n}^{(i)}[\bar{\varphi}(\eta), \eta] d\eta}{|y - \eta|^2 |x - \bar{\varphi}(\eta)|} \quad (3.31)$$

где символ  $V.p. \int_a^b$  означает главное значение интеграла, введенное Адамаром. Способ вычисления правой части равенства (3.31) читатель может найти в книге [5].

Решение уравнения (3.27) в окончательном виде выглядит так:

$$\psi_{\nu, n}^{(i)}(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \left\{ -\frac{1}{2} V.p. \int_{\varphi(x)}^y \frac{F_{\nu, n}^{(i)}[\bar{\varphi}(\eta), \eta] d\eta}{|y - \eta|^2 |x - \bar{\varphi}(\eta)|} + \int_{\varphi(x)}^y \int_{\bar{\varphi}(y)}^{\eta} \frac{1}{|(x-\xi)(y-\eta)|} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} F_{\nu, n}^{(i)}(\xi, \eta) d\xi d\eta \right\} \quad (3.32)$$

( $i = 1, 2; \nu = 1, 3, 4$ )

Таким образом, получены нормальные производные потенциала возмущенных скоростей в плоскости  $xy$ , выраженные формулой (3.32). Имея эти производные, по формулам (1.11) и (1.12) можно вычислить потенциал возмущенных скоростей в любой точке пространства.

Кировокавказский филиал

Ереванского политехнического института  
им. К. Маркса

Поступила 2 VII 1970

ՈՒՆՎԵՐՍԻՏԵՏԻ, Ռ. Շ. ՍՈԼՈՄՈՆՅԱՆ

ՊԵՐՉԱՆՆԱԿՆԵ ԶԵՐԳԵՄԱՆ ՊԵՊԵՐՈՒՄ ՎԵՐՋԱՎՈՐ ԼԱՅՆՔ  
ՈՐՆԵՑՈՂ ԻՎԼԻ ԶԵՏԵՎՈՒՄ ԶՈՍՆԱԿԻ ՈՉ-ՍՏԱՅԻՆՆԱՔ  
ՇԵՂԵՆՆ ՈՐՈՇՄԱՆ ՄԵԹՈԴ

ՈՒՆՎԻՍԻՏԵՏ

Հոդվածում արվում է զերծախախն շարժման զեպրում փերջատոր լամբր անեցող թեի հեռեում ոչ-ստացիոնար շեղման որոշման մի մեթոդ, երբ թեի, բաղի համահան համընթաց շարժումից, կատարում է հան րապտցիչ հարմոնիկ փոքր ստաանումներ:

Հարի շեղման ֆունկցիան Մարտխայի թփի աստիճանների նկատմամբ փերլոմեկով աստիճանախն շարժք, ստացվում են Արելի ախյի կրկնակի ինտեգրալ հախաարումներ այլ վերլուծաթյան զործակիցների համար, որոնց աշ մասերը ինտեգրման միջակայքերի մալրակեաներում անեն եգակաթյանները ճրվում են այլ հախատրումների լուծման բանաձեերը:

DETERMINATION TECHNIQUE FOR NONSTATIONARY  
SLANT OF FLOW BEHIND THE FINITE SWING  
WING AT A SUPERSONIC FLOW

R. A. MEJLOUMIAN, R. SH. SOLOMONIAN

## S u m m a r y

The present paper suggests determination technique for nonstationary slant of flow behind the finite swing wing at a supersonic flow when the wing, besides the basic transitional motion, performs small additional oscillating motion according to the harmonic law. By expanding the flow slant to a power series according to the degrees of the Struchal number, two-dimensional Abel-type integral equations are derived for the expansion coefficients whose right-hand parts have certain peculiarities at the ends of the integrating intervals. Formulas for solving these equations are also given.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Красильникова Е. А. Крыло конечного размаха в сжимаемом потоке. ГИТА, М.-Л., 1952.
2. Белоцерковский С. М. Представление нестационарных аэродинамических сил и моментов при помощи коэффициентов вращательных производных. Изв. АН СССР, ОТН, № 7, 1956.
3. Белоцерковский С. М. Пространственное неустановившееся движение несущей поверхности. ПММ, т. XIX, вып. 4, 1955.
4. Кислякин П. Н. Коэффициенты вращательных производных сколов, создаваемых в потоке крылом, при неустановившемся движении. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и Машиностроение, № 4, 1961.
5. „Общая теория аэродинамики больших скоростей“ из серии „Аэродинамика больших скоростей и реактивной техники“. Перев. с англ., ИЛ, М., 1959.
6. Lurie E. Crookshanks and Hunter H. F. Downwash behind a two-dimensional wing oscillating motion. IAS, 19, № 7, 1952.
7. Downwash tables for the calculation of aerodynamic forces on oscillating wings. Report and Memoranda, № 2956, 1958.
8. Гурса Э. Курс математического анализа. ОНТИ, т. III, ч. II, М. А., 1934.
9. Современное состояние аэродинамики больших скоростей. Под общ. ред. А. Хорвата, том I. ИЛ, М., 1955.
10. Фурсов М. К. К расчету коэффициентов вращательных производных крыльев при сверхзвуковых скоростях. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и Машиностроение, № 2, 1961.