

С. Н. БАБЮК, И. А. ЦУРПАЛ

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ ДЛЯ ПЛАСТИН С КРИВОЛИНЕЙНЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ

Развивается метод решения нелинейных задач концентрации напряжений около произвольных отверстий с гладкими контурами при учете кубического закона напряжения-деформации. Дано решение задачи о распределении напряжений вблизи эллиптического отверстия с учетом трех приближений. Получены выражения для компонент тензора напряжений и коэффициентов концентрации и показано влияние физической нелинейности, кривизны контура, величины внешней нагрузки на распределение напряжений по контуру эллиптического отверстия.

В работах [1—3] рассмотрены задачи о концентрации напряжений около отверстий при сохранении в нелинейном законе упругости квадрата интенсивности напряжений сдвига. Этот вариант хорошо описывает поведение металлических материалов. В связи с широким применением в современной технике конструкционных материалов малой жесткости возникла необходимость учета нелинейных эффектов при исследовании задач концентрации напряжений. Здесь развивается метод и получено решение задач концентрации напряжений для высокоэластичных материалов.

1. Исследуем напряженное состояние неограниченной изотропной пластинки с произвольным отверстием, получаемым из отображающей функции

$$z = w(\zeta) = R \left[\zeta - \varepsilon f(\zeta) \right] \quad (z = re^{i\theta}, \zeta = \rho e^{i\phi}) \quad (1)$$

которая реализует конформное отображение бесконечной плоскости с круглым отверстием единичного радиуса на бесконечную плоскость с отверстием рассматриваемой формы. Параметры R и ε , а также функция $f(\zeta)$ характеризуют форму и размеры отверстия и имеют для эллиптического отверстия значения: $R = \frac{a+b}{2}$, $\varepsilon = \frac{a-b}{a+b}$, $f(\zeta) = \zeta^2$,

где a и b — полуоси эллипса.

Предполагаем, что деформации малы, а материал пластинки подчиняется нелинейному закону упругости [4]

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ii} = & \sigma_{11} \varepsilon_{11} + \sigma_{12} \varepsilon_{12} + \sigma_{21} \varepsilon_{21} + \sigma_{22} \varepsilon_{22} + \sigma_{33} \varepsilon_{33} + \sigma_{34} \varepsilon_{34} + \sigma_{43} \varepsilon_{43} + \sigma_{44} \varepsilon_{44} + \\ & \sigma_{13} \varepsilon_{13} + \sigma_{31} \varepsilon_{31} + \sigma_{14} \varepsilon_{14} + \sigma_{41} \varepsilon_{41} + \sigma_{23} \varepsilon_{23} + \sigma_{32} \varepsilon_{32} + \sigma_{24} \varepsilon_{24} + \sigma_{42} \varepsilon_{42} + \end{aligned} \quad (2)$$

где ε_{ij} , σ_{ij} — соответственно компоненты тензора напряжений и деформаций, δ_{ij} — символ Кронекера, F_{ij} — постоянные, характеризующие механические свойства высокоэластичных полимерных материалов, повторяющиеся индексы обозначают суммирование.

Выражая компоненты тензора напряжений через функцию напряжений Эйри

$$\varepsilon_{ij} = F_{ik} \delta_{kj} - F_{ij} \quad (3)$$

и подставляя компоненты тензора деформаций (2) в условие совместности деформаций, получим основное уравнение физически нелинейной плоской теории упругости в виде

$$\Delta \Delta F + \alpha \Delta [(\Delta F)^2] + \beta \left\{ \Delta (F_{,ij} F_{,ij}) - 2(\Delta F F_{,ij})_{,ij} \right\} + \gamma \Delta [(\Delta F)^3] + \delta (F_{,ij} F_{,ij} F_{,km})_{,km} + \omega \left\{ \Delta (\Delta F F_{,ij} F_{,ij}) - (\Delta F)^2 F_{,ij} \right\} = 0 \quad (4)$$

где запятая обозначает дифференцирование по соответствующим координатам.

Приближенное решение нелинейного уравнения (4) для случая, когда бесконечная плоскость ослаблена криволинейным отверстием (1), представим в виде двойного ряда по малым параметрам

$$F(r, \varphi, x, z) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^i z^j F^{(i,j)} \quad (5)$$

Решение линейной задачи по методу возмущений с учетом двух приближений (в ряду (5) сохранялись слагаемые с точностью до α^2) отличается от точного решения [1-3] не более чем на $3\alpha^2/0$. Решение нелинейной задачи для кругового отверстия при этом законе упругости (2) дает право с небольшой погрешностью решать поставленную задачу с учетом трех приближений.

Подставляя неизвестную функцию (5) в разрешающее уравнение (4), в каждом из приближений получим последовательность бесконечных неоднородных бигармонических уравнений

$$\Delta \Delta F^{(i,j)} = L_{ij}(F^{(0,0)}, \dots, F^{(i-1,j-1)}) \quad (6)$$

Явный вид операторов L_{ij} для физически нелинейной пластинки с круглым отверстием в первом приближении имеет вид

$$\Delta \Delta F^{(1,0)} + \alpha \Delta [(\Delta F^{(0,0)})^2] + \beta \left\{ \Delta \left[F_{,rr}^{(0,0)} F_{,rr}^{(0,0)} + \left(\frac{1}{r} F_{,r\varphi}^{(0,0)} + \frac{1}{r} F_{,\varphi r}^{(0,0)} \right)^2 + 2 \left(\frac{1}{r} F_{,\varphi\varphi}^{(0,0)} - \frac{1}{r^2} F_{,\varphi\varphi}^{(0,0)} \right)^2 \right] + 2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\Delta F^{(0,0)} F_{,rr}^{(0,0)} \right) + \right. \quad (7)$$

$$\left. + 2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \left[\Delta F^{(0,0)} \left(\frac{1}{r} F_{,r\varphi}^{(0,0)} + \frac{1}{r} F_{,\varphi r}^{(0,0)} \right) \right] + \right.$$

$$+ 4 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r \partial z} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \left| \Delta F^{(0,0)} \left(\frac{1}{r} F_{,r}^{(0,0)} - \frac{1}{r^2} F_{,\varphi}^{(0,0)} \right) \right| = 0 \quad (7)$$

Для определения напряженного состояния нелинейно-упругой пластики с криволинейным отверстием имеем уравнение

$$\begin{aligned} \Delta \Delta F^{(0,1)} + \tau \Delta [2\Delta F^{(0,0)} \Delta F^{(0,1)}] &= \beta \left\{ 2\Delta \left[F_{,rr}^{(0,0)} F_{,rr}^{(0,1)} + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \left(\frac{1}{r} F_{,\varphi}^{(0,0)} + \frac{1}{r^2} F_{,\varphi\varphi}^{(0,0)} \right) \left(\frac{1}{r} F_{,r}^{(0,1)} + \frac{1}{r^2} F_{,\varphi}^{(0,1)} \right) \right] + \right. \\ &+ 2 \left(\frac{1}{r} F_{,rr}^{(0,0)} - \frac{1}{r^2} F_{,\varphi\varphi}^{(0,0)} \right) \left(\frac{1}{r} F_{,r}^{(0,1)} - \frac{1}{r^2} F_{,\varphi}^{(0,1)} \right) \left. \right\} - 2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} [(\Delta F^{(0,0)}) F_{,rr}^{(0,1)} + \\ &+ (\Delta F^{(0,0)}) F_{,\varphi\varphi}^{(0,0)}] - 2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \left| \Delta F^{(0,0)} \left(\frac{1}{r} F_{,r}^{(0,1)} + \frac{1}{r^2} F_{,\varphi}^{(0,1)} \right) \right| + \\ &+ \Delta F^{(0,1)} \left(\frac{1}{r} F_{,r}^{(0,0)} + \frac{1}{r^2} F_{,\varphi}^{(0,0)} \right) \left. \right\} + 4 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r \partial z} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \times \\ &\times \left\{ \Delta F^{(0,0)} \left(\frac{1}{r} F_{,r}^{(0,1)} - \frac{1}{r^2} F_{,\varphi}^{(0,1)} \right) + \Delta F^{(0,1)} \left(\frac{1}{r} F_{,r}^{(0,0)} - \frac{1}{r^2} F_{,\varphi}^{(0,0)} \right) \right\} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Для определения напряженного состояния пластики с криволинейным отверстием (1) необходимо воспользоваться формулами преобразования при повороте системы координат [1]. Представляя компоненты тензора напряжений σ_{ij} также в виде двойного ряда

$$\sigma_{km} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^l \varrho^j \sigma_{km}^{(l,j)} \quad (9)$$

и учитывая вид отображающей функции (1), получим напряжения в криволинейной системе координат

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(l,j)} &= \left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} \right) F^{(l,j)}(\varrho, \theta) + \sum_{k=0}^{l-1} \left[L_1^{(j-k)} \left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} \right) + \right. \\ &+ \left. L_2^{(j-k)} \left(2 \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} - \Delta \right) - L_3^{(j-k)} \frac{\partial^2}{\partial \varrho \partial \theta} \frac{1}{\varrho} \right] F^{(l,k)}(\varrho, \theta) \\ \sigma_\theta^{(l,j)} &= \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} F^{(l,j)}(\varrho, \theta) + \sum_{k=0}^{l-1} \left[L_1^{(j-k)} \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} + \right. \\ &+ \left. L_2^{(j-k)} \left(\Delta - 2 \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} \right) + L_3^{(j-k)} \frac{\partial^2}{\partial \varrho \partial \theta} \frac{1}{\varrho} \right] F^{(l,k)}(\varrho, \theta) \\ \tau_{\varrho\theta} &= \frac{\partial^2}{\partial \varrho \partial \theta} \frac{1}{\varrho} F^{(l,j)}(\varrho, \theta) + \sum_{k=0}^{l-1} \left[(L_1^{(j-k)} - 2L_2^{(j-k)}) \frac{\partial^2}{\partial \varrho \partial \theta} \frac{1}{\varrho} + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} L_3^{(j-k)} \left(\Delta - 2 \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} \right) \right] F^{(l,k)}(\varrho, \theta) \end{aligned} \quad (10)$$

где $L_1^{(-1)}$, $L_2^{(-k)}$, $L_3^{(-b)}$ — дифференциальные операторы, вид которых зависит от отображающей функции (1).

Функции $F^{(l, j)}(\varphi, \psi)$, входящие в (10), представляют собой решение уравнения (6) в виде ряда Фурье, в которых переменные r, z заменены соответственно на φ и ψ .

2. Исследуем напряженное состояние нелинейно-упругой пластинки с эллиптическим отверстием при всестороннем растяжении. Функция напряжений линейной задачи для кругового отверстия имеет вид [2]

$$F^{(0,0)} = \frac{p}{2} (r^2 - 2\ln r) \quad (11)$$

Подставляя значение этой функции и ее производных в уравнение (6), (7), получим характеристики напряженного состояния нелинейно-упругой пластинки с круговым отверстием по второму приближению

$$\begin{aligned} F^{(0,0)} &= -p^2 \left(\frac{1}{2r^2} + 4\ln^2 r - \ln r \right) \\ F^{(2,0)} &= 2p^2 \left(\frac{2}{r^2} + 16\ln^2 r - 4\ln r \right) + 2p^2 \left(34\ln^2 r + \frac{27}{2} \frac{1}{r^2} + \frac{2}{3} \frac{1}{r^2} - \right. \\ &\quad \left. - 80\ln^2 r + \frac{80}{3} \ln^3 r + \frac{89}{3} \ln r \right) - 2p^2 \left(2\ln^2 r + \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{6} \frac{1}{r^2} + \frac{5}{3} \ln r \right) - 4p^2 \left(4\ln^2 r + \frac{1}{r^2} + 2\ln r \right) \end{aligned} \quad (12)$$

Для линейно-упругой пластинки с эллиптическим отверстием функции напряжений с точностью ε^2 имеют вид

$$F^{(0,1)} = p \left(\frac{1}{r^2} - 1 \right) \cos 2\varphi \quad (13)$$

$$F^{(0,2)} = p \left[\left(\frac{3}{2} \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2} \right) \cos 4\varphi - \ln r \right]$$

Подставляя значение функций (11) — (13) и их производных в уравнение (8), получим разрешающее уравнение для нелинейно-упругой пластинки с эллиптическим отверстием

$$\Delta \Delta F^{(0,1)} + 3p^2 \left(\frac{320}{r^4} + \frac{768}{r^2} \right) \cos 2\varphi = 0 \quad (14)$$

Решение этого уравнения представим в виде частного интеграла

$$F_{\text{част}}^{(0,1)} = \left(k_1 \frac{\ln r}{r^2} + k_2 \frac{1}{r^2} \right) \cos 2\varphi \quad (15)$$

и интеграла однородного уравнения

$$F_{\text{одн}}^{(0,1)} = \sum_{m=2}^{\infty} (c_{2m} r^{2m-2} + c_{-2m} r^{-2m}) \cos m\varphi \quad (16)$$

Постоянные интегрирования c_{m1} , c_{m2} определены из граничных условий на контуре свободного от внешних условий отверстия при

$$\begin{aligned} \left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) F^{(1,1)} \Big|_{r=1} &= \left[L_1^{(1)} \left(\Delta - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) + L_2^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \right. \\ &\quad \left. - L_3^{(1)} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \frac{1}{\rho} \right] F^{(1,1)} \Big|_{r=1} = 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \frac{1}{\rho} F^{(1,1)} \Big|_{r=1} &= \left[(L_1^{(1)} - 2L_2^{(1)}) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \frac{1}{\rho} + \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} L_3^{(1)} \left(\Delta - 2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) \right] F^{(1,1)} \Big|_{r=1} = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

где L_i для отображающей функции $z = K \left(\xi + \frac{\eta}{\xi} \right)$ имеют вид

$$L_1^{(1)} = \frac{\cos 2b}{\rho} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\sin 2b}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad L_2^{(1)} = 0, \quad L_3^{(1)} = \frac{4 \sin 2b}{\rho^2} \quad (18)$$

Учитывая (14) – (18), получим

$$F^{(1,1)}(r, \xi) = \rho^2 \left(\frac{20}{3} \frac{\ln r}{r^2} - \frac{2}{r^2} - \frac{5}{3} + \frac{11}{r^2} \right) \cos 2\xi \quad (19)$$

Для анализа нелинейных эффектов напряженного состояния приведем выражения коэффициентов концентрации напряжений $k = \frac{\sigma_0}{p}$.

Учитывая (9), (11), (12), (13), (19), найдем компоненты тензора напряжений (10).

Коэффициент концентрации напряжений на контуре отверстия имеет вид

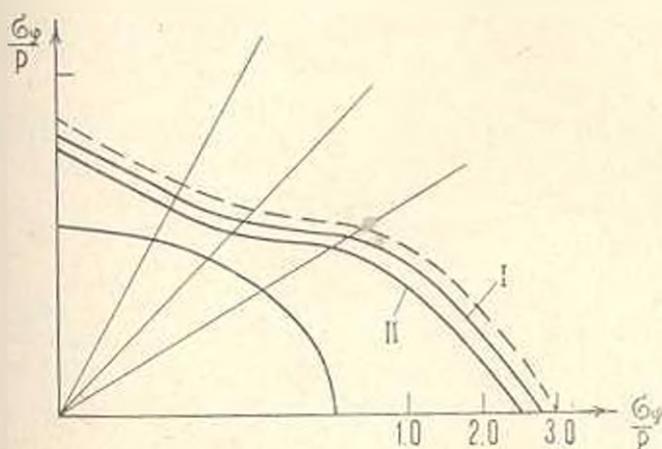
$$\begin{aligned} k &= 2 - 10^2 \rho + \left(40\xi^2 - \frac{82}{3} \xi^2 - \frac{26}{3} \xi - 12 \right) \rho^2 + \\ &= 4 \cos 2b - \xi^2 (16 \cos 4b - 12) - \frac{80}{3} \rho^2 \cos 2b \end{aligned} \quad (20)$$

На фиг. 1 приведен коэффициент концентрации (20) по контуру отверстия для различных параметров внешней нагрузки, механических свойства материала и кривизны контура. Пунктирная линия относится к линейной теории, а сплошная – к нелинейной.

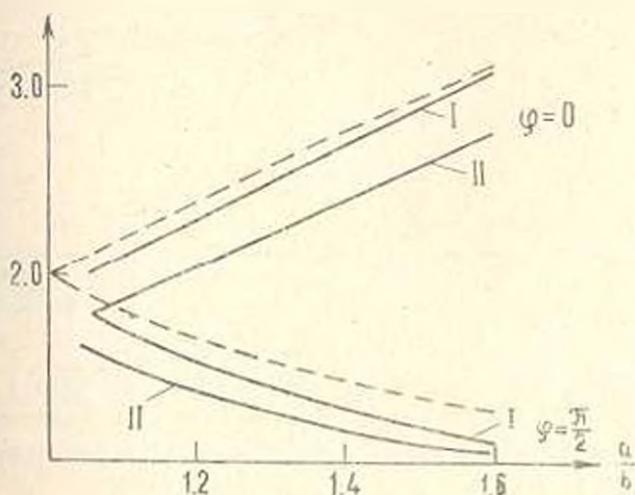
Кривая I построена для сжатия при $p = 120$, $\xi = 0.1 \cdot 10^{-2}$; $\alpha = 0.1 \cdot 10^{-2}$; $\beta = 0.1 \cdot 10^{-1}$; $\gamma = 0.1 \cdot 10^{-1}$; $\frac{a}{b} = 1.5$. Кривая II – для тех же параметров при растяжении.

На фиг. 2 приведено значение коэффициента концентрации (20) в зависимости от кривизны контура для материала с характеристиками

$\beta = 0.1 \cdot 10^{-3}$; $\alpha = 0.1 \cdot 10^{-3}$; $\bar{\sigma} = 0.1 \cdot 10^{-3}$; $\omega = 0.1 \cdot 10^{-3}$ при $\rho = 100$.
 Пунктирная линия относится к линейной теории, сплошная—к нелинейной.



Фиг. 1.

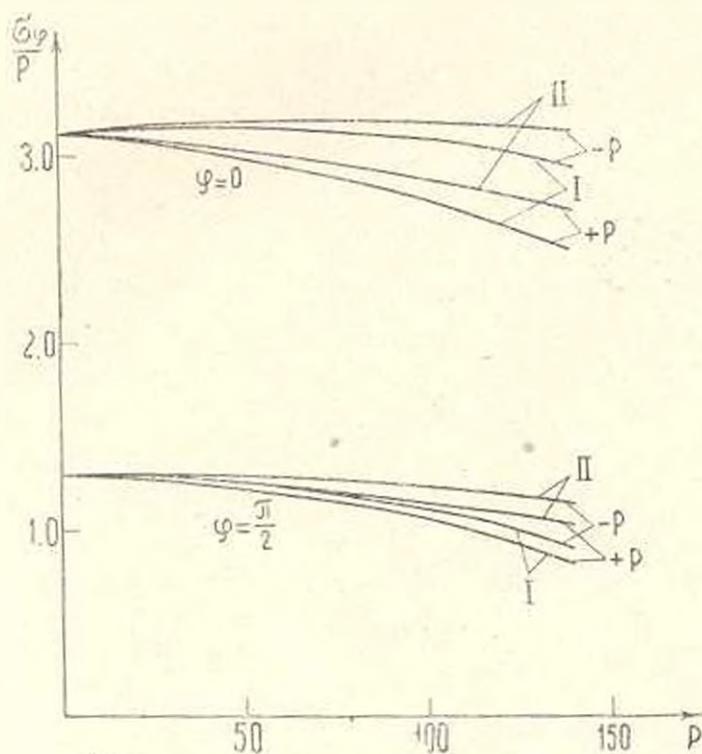


Фиг. 2.

Кривая I построена при сжатии, II—при растяжении.

На фиг. 3 показано изменение коэффициента концентрации (20) в зависимости от величины внешней нагрузки при $\varphi = 0$ и $\varphi = \frac{\pi}{2}$ для растяжения и сжатия для различных физически нелинейных материалов. Кривая I—для материала с характеристиками $\alpha = 0.1 \cdot 10^{-3}$; $\beta = 0.1 \cdot 10^{-3}$; $\bar{\sigma} = 0.1 \cdot 10^{-3}$; $\omega = 0.1 \cdot 10^{-3}$; II— $\alpha = 0.1 \cdot 10^{-3}$; $\beta = 0.1 \cdot 10^{-3}$; $\bar{\sigma} = 0.5 \cdot 10^{-3}$; $\omega = 0.5 \cdot 10^{-3}$.

Результаты анализа решений поставленной задачи показывают: коэффициенты концентрации нелинейно зависят от свойства материала, величины нагрузки и кривизны контура; для высокоэластичных материалов незначительное увеличение нагрузки приводит к существенному уменьшению коэффициента концентрации в наиболее опасной



Фиг. 3.

точке контура; учет нелинейных эффектов приводит к выравниванию поля напряжений в зоне концентрации; коэффициент концентрации в отличие от другого варианта нелинейной теории упругости [1—3] имеет разное значение при растяжении и сжатии.

Институт механики
АН Украинской ССР

Получила 20 VII 1970

И. П. БИБЮК, И. А. ЦУРПАЛ

ЦЕНТРАЛЬНИЙ НАУКОВИЙ ІНСТИТУТ МЕХАНІКИ АН УРСР
НАУКОВИЙ ВІСНИК ІНСТИТУТУ МЕХАНІКИ АН УРСР

И. м. ф. м. ф. м. с. м.

Установи́ти відсутність порушень умов при застосуванні методу
Літтературні й інформаційні матеріали по даній темі надати за адресою: м. Київ, вул. М. Коцюбинського, 13/1

լարամենքի կոնցենտրացիայի մասին խնդիրների լուծման եղանակ: Խնդիրները լուծվում են փոքր պարամետրի մեթոդով: Արդեն օրինակ զիտարկվում է կորագիծ անցքի մաս լարամենքի կոնցենտրացիայի մասին խնդրի լուծումը:

Յուրյ է արված նոր Հաստատունների և արտաքին բևի մեծություն և տեսքի ազդեցությունը լարամենքի կոնցենտրացիայի վրա:

NONLINEAR PROBLEMS OF STRESS CONCENTRATION FOR PLATES WITH CURVILINEAR HOLES

S. N. BABIUK, I. A. CIURPAL

S u m m a r y

The paper presents a method for solving problems of stress concentration near arbitrary holes without corner points with an arbitrary stress field on the infinity for a new variant (the cubic law) of nonlinear stress-strain relations. To solve the nonlinear equations a combination of the method of disturbance of the boundary shape with the method of small parameter is employed.

As an example the problem of stress concentration near a curvilinear hole is considered. The effect of physical nonlinearity and of the value of load on the stress concentration along the hole boundary is also studied.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Губь А. Н., Савин Г. Н., Цурпал И. А. Концентрация напряжений около криволинейных отверстий в физически нелинейной упругой пластинке. Arch. Mech. Stos., т. 16, 1, 1964, 1009.
2. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. Изд. «Наукова думка», К., 1968.
3. Цурпал И. А. Некоторые задачи концентрации напряжений около отверстий и полостей с учетом физической нелинейности материала. Сб. Концентрация напряжений. 1968, вып. 2, 241.
4. Пистер К. С., Ивань Р. И. Расчет упругих напряжений в физически нелинейных твердых телах. Ракетная техника и космонавтика, 4, 11, 1966, 35.
5. Цурпал И. А. Об одном варианте задачи о концентрации напряжений в нелинейной постановке. Прикл. механ., т. 4, вып. 10, 1968, 31.