

А. А. БАБЛОЯН, В. С. ТОНОЯН

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПОЛОГО КОНЕЧНОГО ЦИЛИНДРА

Исследованию осесимметричной задачи для сплошного и полого круглого цилиндра конечной длины посвящено много работ, о которых подробно изложено в [1—2]. Во всех этих работах на боковых поверхностях заданы напряжения и, кроме [1—2], все задачи решены приближенно.

В настоящей статье дается точное решение осесимметричной задачи теории упругости для полого круглого цилиндра конечной длины, когда на боковой поверхности известны компоненты вектора перемещения, а на торцах заданы компоненты напряжений. Задача решается методом Фурье. Решение представляется в виде рядов Фурье и Фурье-Дини. Определение коэффициентов интегрирования сводится к решению бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. Доказывается, что эти системы вполне регулярны, а свободные члены ограничены.

Рассмотрим осесимметричную задачу для полого круглого изотропного цилиндра длиной l и радиусами R и s ($R > s$), когда на торцах цилиндра заданы напряжения, а на цилиндрических поверхностях известны перемещения. Будем пользоваться цилиндрической системой координат. Известно [3], что решение задачи осесимметричной деформации тела вращения сводится к определению одной бигармонической функции $\Phi(r, z)$, которая в рассматриваемой задаче удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} z_r(r, 0) &= f_1(r), & 2G\theta(s, z) &= f_3(z) \\ z_r(r, l) &= f_2(r), & 2G\theta(R, z) &= f_4(z) \\ 2Gw(s, z) &= f_5(z), & z_{rz}(r, 0) &= z_{rz}(r, l) = 0 \\ 2Gw(R, z) &= f_6(z), \end{aligned} \quad (1)$$

Решив бигармонические уравнения методом разделения переменных, для круглого полого цилиндра функцию $\Phi(r, z)$ получим в виде

$$\Phi(r, z) = \Phi_0(r, z) + \sum_{k=1}^{\infty} R_k(r) \sin \lambda_k z + \sum_{k=1}^{\infty} Z_k(z) W_0(\beta_k r) \quad (2)$$

($s \leq r \leq R, 0 \leq z \leq l$)

где $W_k(x)$ — функции Вебера

$$W_0(\beta_k r) = J_1(\beta_k r) Y_0(\beta_k R) - Y_1(\beta_k R) J_0(\beta_k r) \quad (3)$$

$J_l(x)$ и $Y_l(x)$ — функции Бесселя от действительного аргумента, соответственно, первого и второго родов,

$$\beta_k = \frac{k\pi}{l}$$

а β_k — корни уравнения

$$W_0(\beta_k s) = 0 \quad (4)$$

$$\Phi_0(r, z) = z(Ar^2 + Bz^2 + Cz + D) \ln r$$

$$Z_k(z) = A_k \operatorname{sh} \beta_k z + B_k \operatorname{ch} \beta_k z + C_k \beta_k z \operatorname{sh} \beta_k z + D_k \beta_k z \operatorname{ch} \beta_k z$$

$$R_k(r) = E_k P_0(\beta_k r) + F_k Q_0(\beta_k r) + G_k \beta_k r P_1(\beta_k r) + H_k \beta_k r Q_1(\beta_k r)$$

$$P_0(\beta_k r) = I_0(\beta_k r) K_0(\beta_k R) - I_0(\beta_k R) K_0(\beta_k r) \quad (5)$$

$$Q_0(\beta_k r) = I_0(\beta_k r) K_0(\beta_k s) - I_0(\beta_k s) K_0(\beta_k r)$$

$$P_1(\beta_k r) = I_1(\beta_k r) K_1(\beta_k s) - K_1(\beta_k r) I_1(\beta_k s)$$

$$Q_1(\beta_k r) = I_1(\beta_k R) K_1(\beta_k r) - I_1(\beta_k r) K_1(\beta_k R)$$

$I_l(x)$, $K_l(x)$ — функции Бесселя от мнимого аргумента, соответственно, первого и второго родов.

Используя обычные формулы для напряжений и перемещений, выраженных через искомую функцию $\Phi(r, z)$ [3], будем иметь

$$\begin{aligned} \varepsilon_r(r, z) &= 4(2-\nu)A + 6(1-\nu)B + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^3 \{ (1-2\nu)D_k - A_k \} \operatorname{ch} \beta_k z + \{ (1-2\nu)C_k - B_k \} \operatorname{sh} \beta_k z - \\ &- C_k \beta_k z \operatorname{ch} \beta_k z - D_k \beta_k z \operatorname{sh} \beta_k z \} W_0(\beta_k r) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \{ R_k(\beta_k r) - 2(2-\nu)[G_k P_0(\beta_k r) - H_k Q_0(\beta_k r)] \} \cos \beta_k z \\ \varepsilon_z(r, z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^3 \{ [A_k + 2\nu D_k] \operatorname{sh} \beta_k z + [B_k + 2\nu C_k] \operatorname{ch} \beta_k z + \\ &+ C_k \beta_k z \operatorname{sh} \beta_k z + D_k \beta_k z \operatorname{ch} \beta_k z \} W_1(\beta_k r) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \{ R_k(\beta_k r) + 2(1-\nu)[G_k P_1(\beta_k r) - H_k Q_1(\beta_k r)] \} \sin \beta_k z \\ 2Gu(r, z) &= 2Ar - \frac{D}{r} + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k W_1(\beta_k r) \{ (A_k + D_k) \operatorname{ch} \beta_k z + \\ &+ (B_k + C_k) \operatorname{sh} \beta_k z + C_k \beta_k z \operatorname{ch} \beta_k z + D_k \beta_k z \operatorname{sh} \beta_k z \} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k^2 K_k(\nu_k r) \cos \nu_k z \\
2Gw(r, z) = & 2(1-2\nu)C + [8(1-\nu)A + 6(1-2\nu)B]z + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^2 \{ [2(1-2\nu)D_k - A_k] \operatorname{sh} \beta_k z + [2(1-2\nu)C_k - B_k] \operatorname{ch} \beta_k z - \\
& - C_k \beta_k z \operatorname{sh} \beta_k z - D_k \beta_k z \operatorname{ch} \beta_k z \} W_0(\beta_k r) + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \{ R_k(\lambda_k r) + 4(1-\nu) [G_k P_\nu(\lambda_k r) - H_k Q_\nu(\lambda_k r)] \} \sin \lambda_k z \quad (6)
\end{aligned}$$

где

$$P_\nu(\lambda_k r) = I_0(\lambda_k r) K_1(\lambda_k s) + K_0(\lambda_k r) I_1(\lambda_k s) \quad (7)$$

$$Q_\nu(\lambda_k r) = I_0(\lambda_k r) K_1(\lambda_k R) + K_0(\lambda_k r) I_1(\lambda_k R)$$

В граничных условиях (1) допускаем, что функции $\{f_i\}$ можно представить в виде рядов Фурье и Фурье-Дини [4]

$$\begin{aligned}
f_1(r) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k W_0(\beta_k r), & f_2(r) &= \sum_{k=1}^{\infty} a'_k W_0(\beta_k r) \\
f_3(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos \nu_k z, & f_4(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} b'_k \cos \nu_k z \\
f_5(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin \nu_k z, & f_6(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} c'_k \sin \nu_k z
\end{aligned} \quad (8)$$

Кроме того, предполагаем, что функции f_3, f_5, f_4, f_6 и их первые производные непрерывны в указанных интервалах.

Удовлетворяя условиям (1) и имея в виду (8), для определения постоянных интегрирования, входящих в выражение (5), получаем следующие соотношения:

$$C = 0, \quad B = -\frac{4(1-\nu)}{3(1-2\nu)} A$$

$$2AR + \frac{D}{R} + b'_0 + \frac{2\nu}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k W_1(\beta_k R) [D_k \operatorname{sh} \beta_k l + C_k (\operatorname{ch} \beta_k l - 1)] = 0 \quad (9)$$

$$2As + \frac{D}{s} + b_0 + \frac{2\nu}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k W_1(\beta_k s) [D_k \operatorname{sh} \beta_k l + C_k (\operatorname{ch} \beta_k l - 1)] = 0$$

$$B_k = -2\nu C_k, \quad A_k = -\beta_k l C_k - D_k (2\nu + \beta_k l \operatorname{cth} \beta_k l) \quad (10)$$

$$b_{1k} E_k = -\frac{c_k}{\nu_k} + \frac{4(1-\nu)}{\nu_k s} G_k + [\beta_k \lambda_k s - 4(1-\nu) \lambda_{1k}] H_k$$

$$\delta_{1k} F_k = \frac{c_k}{i_k^2} - [\delta_{2k} i_k R - 4(1-\nu) \delta_{3k}] G_k + \frac{4(1-\nu)}{\lambda_k R} H_k \quad (10)$$

$$\begin{aligned} i_p K_p(i_p R) + b_p = & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4\beta_k^3 (-1)^n W_1(\beta_k R) [(1-\nu) i_p^2 - \nu \beta_k^2]}{I(\beta_k^2 + i_p^2)^2} \times \\ & [D_k \operatorname{sh} \beta_k l - C_k [\operatorname{ch} \beta_k l - (-1)^n]] \\ i_p R_p(i_p s) + b_p = & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4\beta_k^3 (-1)^n W_1(\beta_k s) [(1-\nu) i_p^2 - \nu \beta_k^2]}{I(\beta_k^2 + i_p^2)^2} \times \\ & [D_k \operatorname{sh} \beta_k l - C_k [\operatorname{ch} \beta_k l - (-1)^n]] \\ \beta_p N_p \{ [D_p(1-2\nu) - A_p] (\operatorname{ch} \beta_p l + 1) + [C_p(1-2\nu) - B_p] \operatorname{sh} \beta_p l - \\ & - \beta_p l (C_p \operatorname{ch} \beta_p l + D_p \operatorname{sh} \beta_p l) \} - (a_p + a_p^-) N_p - \\ & - \frac{8\nu A}{1-2\nu} \frac{R W_1(\beta_p R) - s W_1(\beta_p s)}{\beta_p} + \\ & + 2\beta_p \sum_{k=1}^{\infty} i_k \left| \frac{c_k R W_1(\beta_p R) - c_k s W_1(\beta_p s)}{i_k^2 (\lambda_k^2 + \beta_p^2)} + \right. \\ & + \frac{2[(1-\nu) i_k^2 - \nu \beta_p^2]}{\lambda_k (i_k^2 + \beta_p^2)^2} \left| W_1(\beta_p s) (G_k - H_k i_k s i_{1k}) \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{\beta_p R} (H_k - G_k i_k R i_{1k}) \right| \right| = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \beta_p N_p \{ [D_p(1-2\nu) - A_p] (\operatorname{ch} \beta_p l - 1) + [C_p(1-2\nu) - B_p] \operatorname{sh} \beta_p l - \\ - \beta_p l (C_p \operatorname{ch} \beta_p l + D_p \operatorname{sh} \beta_p l) \} \\ - N_p (a_p - a_p^-) - 2\beta_p \sum_{k=1}^{\infty} i_k \left| \frac{c_k R W_1(\beta_p R) - c_k s W_1(\beta_p s)}{i_k^2 (\lambda_k^2 + \beta_p^2)} + \right. \\ + \frac{2[(1-\nu) i_k^2 - \nu \beta_p^2]}{i_k (i_k^2 + \beta_p^2)^2} \left| W_1(\beta_p s) (G_k - H_k i_k s i_{1k}) \right. \\ \left. + \frac{1}{\beta_p R} (H_k - G_k i_k R i_{1k}) \right| \Big| \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \delta_{1k} &= K_0(i_k s) I_0(i_k R) - I_0(i_k s) K_0(i_k R) \\ \delta_{2k} &= K_1(i_k s) I_1(i_k R) - I_1(i_k s) K_1(i_k R) \\ \delta_{3k} &= K_1(i_k s) I_0(i_k R) + I_1(i_k s) K_0(i_k R) \\ \delta_{4k} &= K_1(i_k R) I_0(i_k s) + I_1(i_k R) K_0(i_k s) \end{aligned} \quad (12)$$

$$N_p = \int_0^R r W_1^2(\beta_p r) dr = \int_0^R r W_0^2(\beta_p r) dr = \frac{R^2}{2} W_1^2(\beta_p R) - \frac{s^2}{2} W_1^2(\beta_p s) \quad (13)$$

При получении этих соотношений были использованы разложения Фурье функций $\operatorname{sh} \beta_k z$, $\operatorname{ch} \beta_k z$, $z \operatorname{sh} \beta_k z$, $z \operatorname{ch} \beta_k z$ по функциям $\left| 1; \cos \frac{p\pi z}{l} \right|$ и Фурье-Дини [4] функций $P_i(\beta_k r)$, $Q_i(\beta_k r)$ ($i = 0, 1, 2$) по функциям $W_0(\beta_k r)$, где β_k — корни уравнения (4).

Из соотношений (9) и (10) коэффициенты A , B , D , A_k , B_k , E_k , F_k выражаются через коэффициенты C_k , D_k , G_k , H_k . Для определения постоянных C_k , D_k , G_k и H_k из соотношений (11) получаем следующую бесконечную систему четырех линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} d_{11}U_p + d_{12}V_p &= \sum_{k=1}^{\infty} a_{kp} Z_{kp} + \gamma_p^{(1)} \\ d_{21}U_p + d_{22}V_p &= \sum_{k=1}^{\infty} b_{kp} Z_{kp} + \gamma_p^{(2)} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} d_{33}X_p &= \sum_{k=1, 3}^{\infty} c_{kp} L_{kp} + \gamma_p^{(3)} \\ d_{33}Y_p &= - \sum_{k=2, 4}^{\infty} c_{kp} L_{kp} + \gamma_p^{(4)} \end{aligned}$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \beta_k^2 [D_k \operatorname{sh} \beta_k l + C_k (\operatorname{ch} \beta_k l + 1)] &= \frac{\alpha W_1(\beta_k R)}{N_k} X_k \\ \beta_k^2 [D_k \operatorname{sh} \beta_k l + C_k (\operatorname{ch} \beta_k l - 1)] &= \frac{\alpha W_1(\beta_k R)}{N_k} Y_k \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{k_k^2 R}{2} [(1 - \lambda_k | \overline{R s} \beta_{1k}) H_k + (| \overline{R s} - \lambda_k R \beta_{2k}) G_k] &= V_k \\ \frac{k_k^2 R}{2} [(1 + \lambda_k | \overline{R s} \beta_{1k}) H_k - (| \overline{R s} + \lambda_k R \beta_{2k}) G_k] &= U_k \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} Z_{kp} &= Y_k + \frac{1 - (-1)^p}{2} (X_k - Y_k) \\ L_{kp} &= \frac{1}{2} [V_k + U_k + (-1)^p (1 + M_p) (V_k - U_k)] \end{aligned} \quad (17)$$

$$M_p = (-1)^p \left\{ \overline{R s} \beta_p R W_1(\beta_p s) - 1 \right.$$

$$\begin{aligned}
 a_{kp} &= \frac{4(-1)^k \varepsilon_{kp} R}{l} \frac{W_1^2(\beta_k R) [(1-\nu) \varepsilon_p^2 - \nu \beta_k^2]}{N_k (\beta_k^2 + \varepsilon_p^2)^2} \left(1 - s/R \frac{W_1(\beta_k s)}{W_1(\beta_k R)} + 1 \right) \\
 b_{kp} &= \frac{4(-1)^k \varepsilon_{kp} R}{l} \frac{W_1^2(\beta_k R) [(1-\nu) \varepsilon_p^2 - \nu \beta_k^2]}{N_k (\beta_k^2 + \varepsilon_p^2)^2} \left(1 - s/R \frac{W_1(\beta_k s)}{W_1(\beta_k R)} - 1 \right) \\
 c_{kp} &= \frac{8(1-\nu) \varepsilon_k^2 - \nu \beta_p^2}{R^2 (\beta_p^2 + \varepsilon_k^2)^2} \quad (18)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R \hat{\sigma}_{1p} d_{11} &= 4(1-\nu) (\hat{\sigma}_{1p} - \hat{\sigma}_{3p}) + \frac{(\hat{\sigma}_{1p} - \hat{\sigma}_{3p})(R-s)}{i_p R s [\hat{\sigma}_{3p} \hat{\sigma}_{4p} - (\varepsilon_p^2 R s)^{-1}]} - \\
 &\quad \frac{i_p R \hat{\varepsilon}_{1p} (\hat{\sigma}_{1p} \hat{\sigma}_{3p} - \hat{\sigma}_{2p} \hat{\sigma}_{4p}) - i_p s \hat{\varepsilon}_{1p} (\hat{\sigma}_{2p} \hat{\sigma}_{3p} - \hat{\sigma}_{1p} \hat{\sigma}_{4p})}{\hat{\sigma}_{3p} \hat{\sigma}_{4p} - (\varepsilon_p^2 R s)^{-1}} \\
 R \hat{\sigma}_{1p} d_{12} &= 4(1-\nu) (\hat{\sigma}_{3p} + \hat{\sigma}_{4p}) + \frac{(\hat{\sigma}_{1p} - \hat{\sigma}_{2p})(R-s)}{i_p R s [\hat{\sigma}_{1p} \hat{\sigma}_{4p} - (\varepsilon_p^2 R s)^{-1}]} + \\
 &\quad \frac{2}{i_p | R s} \left| 4(1-\nu) + \frac{i_p \hat{\sigma}_{3p} (R \hat{\sigma}_{4p} - s \hat{\sigma}_{1p})}{\hat{\sigma}_{2p} \hat{\sigma}_{4p} - (\varepsilon_p^2 R s)^{-1}} \right| - \\
 &\quad \frac{i_p R \hat{\varepsilon}_{1p} (\hat{\sigma}_{1p} \hat{\sigma}_{3p} - \hat{\sigma}_{2p} \hat{\sigma}_{4p}) + i_p s \hat{\varepsilon}_{1p} (\hat{\sigma}_{2p} \hat{\sigma}_{3p} - \hat{\sigma}_{1p} \hat{\sigma}_{4p})}{\hat{\sigma}_{3p} \hat{\sigma}_{4p} - (\varepsilon_p^2 R s)^{-1}} \\
 R \hat{\sigma}_{1p} d_{21} &= -4(1-\nu) (\hat{\sigma}_{3p} + \hat{\sigma}_{4p}) - \frac{(\hat{\sigma}_{1p} + \hat{\sigma}_{2p})(R-s)}{i_p R s [\hat{\sigma}_{3p} \hat{\sigma}_{4p} - (\varepsilon_p^2 R s)^{-1}]} + \\
 &\quad \frac{2}{i_p | R s} \left| 4(1-\nu) + \frac{i_p \hat{\sigma}_{2p} (R \hat{\sigma}_{4p} - s \hat{\sigma}_{1p})}{\hat{\sigma}_{3p} \hat{\sigma}_{4p} - (\varepsilon_p^2 R s)^{-1}} \right| + \\
 &\quad \frac{i_p R \hat{\varepsilon}_{1p} (\hat{\sigma}_{1p} \hat{\sigma}_{3p} - \hat{\sigma}_{2p} \hat{\sigma}_{4p}) + i_p s \hat{\varepsilon}_{1p} (\hat{\sigma}_{2p} \hat{\sigma}_{3p} - \hat{\sigma}_{1p} \hat{\sigma}_{4p})}{\hat{\sigma}_{3p} \hat{\sigma}_{4p} - (\varepsilon_p^2 R s)^{-1}} \quad (19)
 \end{aligned}$$

$$d_{32} = s W_1(\beta_p R) \operatorname{th} \frac{\beta_p l}{2} \left(1 - \frac{\beta_p l}{\operatorname{sh} \beta_p l} \right)$$

$$d_{33} = s W_1(\beta_p R) \operatorname{cth} \frac{\beta_p l}{2} \left(1 + \frac{\beta_p l}{\operatorname{sh} \beta_p l} \right)$$

$$\gamma_p^{(1)}/R = \frac{c_p \hat{\sigma}_{3p} - c_p' \hat{\sigma}_{4p}}{\hat{\sigma}_{1p}} + \frac{1}{i_p \hat{\sigma}_{1p}} \left(\frac{c_p}{R} - \frac{c_p'}{s} \right) - (b_p + b_p')$$

$$\gamma_p^{(2)}/R = \frac{c_p \hat{\sigma}_{3p} + c_p' \hat{\sigma}_{4p}}{\hat{\sigma}_{1p}} - \frac{1}{i_p \hat{\sigma}_{1p}} \left(\frac{c_p}{R} - \frac{c_p'}{s} \right) - (b_p - b_p')$$

$$\gamma_p^{(3)} = N_p (a_p' - a_p) + 2 \beta_p \sum_{k=1,3,5}^{\infty} i_k \frac{c_k R W_1(\beta_p R) - c_k s W_1(\beta_p s)}{\varepsilon_k^2 + \beta_p^2}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma_p^{(4)} &= N_p (a_p' - a_p) + \frac{8 \nu A}{1-2\nu} \frac{R W_1(\beta_p R) - s W_1(\beta_p s)}{\beta_p} - \\
 &= 2 \beta_p \sum_{k=2,4}^{\infty} i_k \frac{c_k R W_1(\beta_p R) - c_k s W_1(\beta_p s)}{\varepsilon_k^2 - \beta_p^2} \quad (20)
 \end{aligned}$$

Здесь α — постоянная, подлежащая определению. Если p четное, то $Z_{kp} = Y_k$, $L_{kp} = V_k + M_p(V_k - U_k)$, а если p нечетное, то $Z_{kp} = X_k$, $L_{kp} = U_k + M_p(U_k - V_k)$, где M_p стремится к нулю. Докажем, что система (14) квази-полное регулярна. Действительно,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{kp}| &< \frac{4\alpha R}{l} \left| \frac{1}{2R} \frac{\partial_{1p}}{\partial_{1p}} - \frac{(1-2\nu)\partial_{1p}}{2R} \left(\frac{\partial_{1p}}{\partial_{1p}} \right) - \right. \\ &- (1-\nu) \frac{1 + \frac{1}{\lambda_p} \frac{R}{s}}{\lambda_p R^2 \ln R/s} + \frac{1}{\overline{R/s}} \frac{(1-2\nu)\partial_{1p}^2 \lambda_p + 2(1-\nu)\partial_{1p}}{2\nu R^2 \partial_{1p}} = \\ &= \frac{4\alpha}{2l} \left| 1 - \frac{1-\nu}{\lambda_p R} \left(1 + 2 \frac{1 + \frac{1}{\lambda_p} \frac{R}{s}}{\ln R/s} \right) - \frac{3-4\nu}{8\lambda_p^2 R^2} \dots \right| \quad (21) \\ \sum_{k=1}^{\infty} |b_{kp}| &< \frac{4\alpha R}{l} \left| \frac{1}{2R} \frac{\partial_{1p}}{\partial_{1p}} - \frac{(1-2\nu)\partial_{1p}}{2R} \left(\frac{\partial_{1p}}{\partial_{1p}} \right) - (1-\nu) \frac{1 + \frac{1}{\lambda_p} \frac{R}{s}}{\lambda_p R^2 \ln R/s} - \right. \\ &- \frac{1}{\overline{R/s}} \frac{(1-2\nu)\partial_{1p}^2 \lambda_p + 2(1-\nu)\partial_{1p}}{2\nu R^2 \partial_{1p}} \left| = \frac{4\alpha}{2l} \left| 1 - \frac{1-\nu}{\lambda_p R} \left(1 + \right. \right. \right. \\ &\left. \left. + 2 \frac{1 + \frac{1}{\lambda_p} \frac{R}{s}}{\ln R/s} - \frac{3-4\nu}{8\lambda_p^2 R^2} \dots \right| \right| \end{aligned}$$

где штрих при ∂_{1p} означает производную по λ_p .

Решая первые два уравнения системы (14) относительно L_p и V_p , получим новые коэффициенты R_{kp} и Q_{kp} при неизвестных Z_{kp}

$$R_{kp} = \frac{a_{kp}d_{11} - b_{kp}d_{21}}{d_{11}^2 + d_{12}d_{21}}, \quad Q_{kp} = \frac{a_{kp}d_{21} - b_{kp}d_{11}}{d_{11}^2 + d_{12}d_{21}} \quad (22)$$

Пользуясь оценками (21) и асимптотическими разложениями функций $\partial_{ip}(\lambda_p)$ ($i = 1, 2, 3, 4$) [5], получим следующие оценки:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |R_{kp}| &< \frac{\alpha R}{l(3-4\nu)} \left| 1 - \frac{1-\nu}{\lambda_p R} \left(1 + 2 \frac{1 + \frac{1}{\lambda_p} \frac{R}{s}}{\ln R/s} + 2 \frac{R}{(3-4\nu)s} + \dots \right) \right| \quad (23) \\ \sum_{k=1}^{\infty} |Q_{kp}| &< \frac{\alpha R}{l(3-4\nu)} \left| 1 - \frac{1-\nu}{\lambda_p R} \left(1 + 2 \frac{1 + \frac{1}{\lambda_p} \frac{R}{s}}{\ln R/s} + 2 \frac{R}{(3-4\nu)s} + \dots \right) \right| \end{aligned}$$

Аналогично для последних двух уравнений системы (14) имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{d_{12}} \sum_{k=1}^{\infty} |c_{kp}| &< \frac{l}{R\alpha} \frac{1 + (1-2\nu) \frac{\beta_p l}{\text{sh}^2 \beta_p l}}{1 - \frac{\beta_p l}{\text{sh}^2 \beta_p l}} \\ \frac{1}{d_{13}} \sum_{k=1}^{\infty} |c_{kp}| &< \frac{l}{R\alpha} \frac{1 - \frac{4\nu}{\beta_p l \text{cth}^2 \beta_p l / 2} - \frac{(1-2\nu)\beta_p l}{\text{sh}^2 \beta_p l}}{1 + \beta_p l \text{sh}^2 \beta_p l} \quad (24) \end{aligned}$$

Если α выбрать из равенства

$$\frac{\alpha R}{l(3-4\nu)} = \frac{1}{2K}, \quad \alpha = \frac{l}{R} \sqrt{3-4\nu} \quad (25)$$

то из оценок (23) и (24) будет видно, что суммы коэффициентов при неизвестных стремятся к пределу $(3-4\nu)^{-1}$, то есть система (14) квази-полное регулярна. Свободные члены (20) системы (14) ограничены. Решая систему (14), получаем выражения коэффициентов X_k , Y_k , U_k , V_k . Далее по формулам (9), (10), (15) и (16) искомые коэффициенты интегрирования выражаются через X_k , Y_k , U_k , V_k по формулам

$$A = \frac{3(1-2\nu)}{4(1-\nu)} B = \frac{b_0 s}{2(R^2 - s^2)} - \frac{b_0 R}{l(R^2 - s^2)} - \frac{\nu s}{l(R^2 - s^2)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{W_1^2(\beta_k R)}{\beta_k^2 N_k} Y_k$$

$$D = \frac{(b_0 s - b_0 R) R s}{R^2 - s^2} - \frac{4\nu R s}{l(R^2 - s^2)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{W_1^2(\beta_k R)}{\beta_k^2 N_k} Y_k$$

$$A_k = \frac{\pi W_1(\beta_k R)}{2N_k \beta_k^2} \left[X_k \operatorname{th} \frac{\beta_k l}{2} \left(2\nu - \frac{\beta_k l}{\operatorname{sh} \beta_k l} \right) - Y_k \operatorname{cth} \frac{\beta_k l}{2} \left(2\nu - \frac{\beta_k l}{\operatorname{sh} \beta_k l} \right) \right]$$

$$C_k = \frac{B_k}{2s} = \frac{\pi W_1(\beta_k R)}{2N_k \beta_k^2} (X_k - Y_k)$$

$$D_k = \frac{\pi W_1(\beta_k R)}{2N_k \beta_k^2} \left[Y_k \operatorname{cth} \frac{\beta_k l}{2} - X_k \operatorname{th} \frac{\beta_k l}{2} \right]$$

$$G_k = \frac{(1 - \nu_k) \sqrt{R s \beta_{2k}} V_k - (\nu_k \sqrt{R s \beta_{2k}} - 1) U_k}{\beta_{2k} R (1 - R/s - \beta_{2k}^2 R \sqrt{R s \beta_{2k} \beta_{2k}})}$$

$$H_k = \frac{(1 - \overline{\nu_k s} - \nu_k R \beta_{2k}) V_k - (1 - \overline{R/s} - \nu_k R \beta_{2k}) U_k}{\beta_{2k} R (1 - \overline{R/s} - \beta_{2k}^2 R \sqrt{R s \beta_{2k} \beta_{2k}})}$$

$$\beta_{2k} E_k = - \frac{c_k}{\beta_{2k}^2} - \frac{4(1-\nu) [(1 - \nu_k) \sqrt{R s \beta_{2k}} V_k + (\nu_k \sqrt{R s \beta_{2k}} - 1) U_k]}{\beta_{2k} R (1 - R/s - \beta_{2k}^2 R \sqrt{R s \beta_{2k} \beta_{2k}})}$$

$$+ \frac{[\beta_{2k} \nu_k s - 4(1-\nu) \beta_{2k}] [(1 - \overline{R/s} + \nu_k R \beta_{2k}) V_k - (1 - \overline{R/s} - \nu_k R \beta_{2k}) U_k]}{\beta_{2k} R (1 - \overline{R/s} - \beta_{2k}^2 R \sqrt{R s \beta_{2k} \beta_{2k}})}$$

$$\beta_{2k} F_k = \frac{c_k}{\beta_{2k}^2}$$

$$- \frac{[\beta_{2k} \nu_k R + 4(1-\nu) \beta_{2k}] [(1 + \nu_k) \sqrt{R s \beta_{2k}} V_k - (\nu_k \sqrt{R s \beta_{2k}} - 1) U_k]}{\beta_{2k} R (1 - R/s - \beta_{2k}^2 R \sqrt{R s \beta_{2k} \beta_{2k}})}$$

$$+ \frac{4(1-\nu) [(1 - \overline{R/s} + \nu_k R \beta_{2k}) V_k - (1 - \overline{R/s} - \nu_k R \beta_{2k}) U_k]}{\beta_{2k} R (1 - \overline{R/s} - \beta_{2k}^2 R \sqrt{R s \beta_{2k} \beta_{2k}})}$$

Следовательно, напряжения и перемещения по известным формулам будут определены в любой точке полого цилиндра.

Институт математики и механики

АН Армянской ССР

Поступил 1 VI 1970

Ա. Հ. ԲԱԲԼՅԱՆ, Վ. Ս. ՏՈՆՅԱՆ

ՎԵՐՋԱՆԱԿ՝ ՈՆԱԿԵԶ ԿԱՆԻ ՄԵ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա ճ փ ո փ ո լ լ

Իերկա աշխատանքում տրված է վերջավոր երկարությամբ կտր սնամեկ զրանի առանցքի նկատմամբ սիմետրիկ դեֆորմացիայի մի խնդրի ճշգրիտ լուծումը. երբ կողմնալին մակերևույթի վրա հալանի են տեղափոխման վեկտորի բաղադրիչները, իսկ հիմքերի վրա՝ լարման բաղադրիչները: Խնդիրը լուծված է Ֆուրյեի մեթոդով: Լուծումը ներկայացված է Ֆուրյեի և Ֆուրյե-Զինի շարքերի գումարի տեսքով: Բնակցման գործակիցների որոշումը բերվել է գծային հանրահաշիվական համասարմաների անվերջ սխառման: Ապացուցված է, որ այդ սխառմանը չի ունի սեղուկար է և ունի սահմանափակ ազատ անդամներ:

ON A PROBLEM OF A FINITE HOLLOW CYLINDER

A. H. BABLOYAN, V. S. TONoyAN

S u m m a r y

In the present paper an axisymmetric problem for a finite length circular hollow cylinder is considered where the vector components of displacement on the lateral surface and the stress components on the butts are prescribed. The solution is represented as a sum of the Fourier and Fourier-Dini series. The determination of the integration coefficients is reduced to the solving of an infinite system of algebraic equations. This system is proved to be quasi-quite regular.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Абрамян Б. А., Баблюян А. А. Об одной задаче осесимметричной деформации полого цилиндра конечной длины. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XV, № 2, 1962.
2. Баблюян А. А., Тонян В. С. Изгиб двухслойной плиты осесимметричной нагрузкой. Изв. АН Арм. ССР, Механика, т. XVI, № 1, 1963.
3. Тимошенко С. П. Теория упругости. ОНТИ, М., 1937.
4. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. ИЛ, ч. 1, М., 1949.
5. Грей Э., Мэтьюс Г. Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. Гостехиздат, М., 1949.