

Г. И. АВАНЕСОВА

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ
 ПРИ ВЫНУЖДАЮЩИХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ
 РАДИАЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ

Рассматриваются следующие две задачи устойчивости замкнутой цилиндрической оболочки:

- 1) оболочка шарнирно оперта на обоих торцах и одному ее торцу сообщается осесимметричное радиальное перемещение $W_0 = C$;
- 2) оболочка шарнирно оперта на обоих торцах и на расстоянии $x = a$ от левого торца сообщается осесимметричное радиальное перемещение $W_0 = C$.

В обоих случаях ставится задача определения критического значения вынуждающих перемещений $W_0^{кр} = C_{кр}$, при которых оболочка теряет статическую устойчивость.

1. Разрешающая система нелинейных уравнений оболочки имеет вид

$$\frac{1}{Eh} \nabla^4 \Phi + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{1}{2} L(W; W) = 0 \tag{1.1}$$

$$D \nabla^4 W - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - L(W; \Phi) = q$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \tag{1.2}$$

$$L(W; \Phi) = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}$$

q — интенсивность внешней нагрузки, E — модуль Юнга, h — толщина стенки оболочки, ν — коэффициент Пуассона, R — радиус срединной плоскости цилиндрической оболочки, x и y — параметры, определяющие положение точки цилиндра, причем x — расстояние вдоль образующей, y — длина направляющей дуги цилиндра, $\Phi(x, y)$ — силовая функция, $W(x, y)$ — радиальное перемещение.

До потери статической устойчивости значения Φ и W обозначим Φ_0 и W_0 . Последние удовлетворяют уравнениям (1.1), которые могут быть приведены к виду

$$\frac{d^4 W_0}{dx^4} + 4\beta^2 W_0 = \frac{q}{D} \tag{1.3}$$

$$\frac{d^4 \Phi_0}{dx^4} = -\frac{Eh}{R} W_0 \quad \text{и} \quad \frac{3(1-\mu^2)}{R^2 h^2} \quad (1.4)$$

Общий интеграл уравнения (1.3) при $q = 0$ представляем в виде:

$$I \text{ задача} \quad W_0 = A_1 Y_1(\beta x) + A_2 Y_2(\beta x) + A_3 Y_3(\beta x) \quad (1.5)$$

$$II \text{ задача} \quad 0 \leq x \leq a \quad W_0 = A_2 Y_2(\beta x) + A_3 Y_3(\beta x) \quad (1.6)$$

$$a \leq x \leq l \quad W_0 = A_1 Y_1(\beta x) + A_2 Y_2(\beta x) + A_3 Y_3(\beta x) + A_4 Y_4(\beta x)$$

где $Y_1(\beta x)$, $Y_2(\beta x)$, $Y_3(\beta x)$, $Y_4(\beta x)$ — известные балоные функции А. Н. Крылова; A, A_i — постоянные интегрирования, которые определяются по заданным краевым условиям и условиям сопряжения.

При достижении перемещением $W_0 = C$ критического значения $C_{кр}$, деформации оболочки перестают быть осесимметричными и в уравнениях (1.1) должны быть приняты

$$W = W_0 + W_1 \quad (1.7)$$

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1$$

где $W_1(x, y)$, $\Phi_1(x, y)$ — возмущения, удовлетворяющие уравнениям

$$\frac{1}{Eh} \nabla^4 \Phi_1 - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} - \frac{d^2 W_0}{dx^2} \frac{\partial^2 W_1}{\partial y^2} = 0 \quad (1.8)$$

$$D \nabla^4 W_1 - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} - \frac{d^2 W_0}{dx^2} \frac{d^2 \Phi_1}{\partial y^2} - \frac{d^2 \Phi_0}{dx^2} \frac{\partial^2 W_1}{\partial y^2} = 0$$

Представим возмущения W_1 и Φ_1 в виде рядов

$$W_1 = \cos^{l_0} y \sum_{m=1}^{\infty} a_m \sin l_m x, \quad l_m = \frac{m\pi}{l} \quad (1.9)$$

$$\Phi_1 = \cos^{l_0} y \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin l_m x, \quad l_m = \frac{n}{R}$$

а известное решение (1.5) и (1.6) W_0 в виде

$$W_0 = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \cos^{l_k} x, \quad l_k = \frac{k\pi}{l} \quad (1.10)$$

После подстановки (1.9) и (1.10) в (1.8) с учетом (1.4) приходим к бесконечной системе алгебраических уравнений:

$$(V_p - 2S_0 + S_{2p}) a_0 - \sum_{m=1}^{p-1} (S_{p-m} - S_{p+m}) a_m - \sum_{m=p+1}^{\infty} (S_{m-p} - S_{m+p}) a_m = 0 \quad (1.11)$$

где

$$V_p = R \mu_n^2 \left[\frac{(\lambda_p^2 + \mu_n^2)^2}{4\beta^4} + \frac{\lambda_p^4}{(\lambda_p^2 + \mu_n^2)^2} \right] \quad (1.12)$$

$$S_{i,p}^{m,p} = \left\{ 1 + \left[\frac{\lambda_m^2}{(\lambda_m^2 + \mu_n^2)^2} + \frac{\lambda_p^2}{(\lambda_p^2 + \mu_n^2)^2} \right] \lambda_i^2 \right\} f_i; \quad i = \begin{pmatrix} p-m \\ p+m \\ m-p \end{pmatrix}$$

Приравняв нулю детерминант системы (1.11), получаем условия потери статической устойчивости в виде зависимости искомой величины вынуждающих перемещений $W_0 = C$ от числа полуволн n в окружном направлении.

$$\begin{vmatrix} V_1 - 2S_0 + S_2 & -S_1^{p-1} + S_3^{p-1} & -S_2^{p-3} + S_4^{p-3} & \dots \\ -S_1^{p-1} + S_3^{p-1} & V_2 - 2S_0 - S_4 & -S_1^{p-3} + S_3^{p-3} & \dots \\ -S_2^{p-1} + S_4^{p-1} & -S_1^{p-3} + S_3^{p-3} & V_3 - 2S_0 + S_4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0 \quad (1.13)$$

II. Ниже приведены результаты расчетов, причем в разложениях (1.9) и (1.10) учитываются несколько первых членов, соответствующих определителю четвертого порядка.

Для постоянного интегрирования уравнения (1.3) получаем следующие выражения:

$$\text{I. задача} \quad A_1 = C, \quad A_2 = -C \frac{\text{sh}2\beta l + \sin 2\beta l}{\text{ch}2\beta l - \cos 2\beta l} \quad (2.1)$$

$$A_4 = 2C \frac{\text{sh}2\beta l - \sin 2\beta l}{\text{ch}2\beta l - \cos 2\beta l}$$

а для задачи II значения постоянных, полученные из граничных условий, а также из условий сопряжений участков оболочки, приведены в табл. 1

Таблица 1

α	A_1	A_4	A_1'	A_2	A_1''	A_1'''
1/2	0.05822C	-0.15473C	13.67268C	43.17338C	-113.69213C	141.0375C
1/4	0.45726C	0.52355C	-9.38863C	13.53523C	-8.29320C	-10.48406C

Считая $\beta l > 6$, что имеет место даже для весьма коротких оболочек, для первой задачи имеем следующие коэффициенты разложения W_0 в ряд (1.10):

$$f_0 = \frac{C^*}{4\beta l}, \quad f_m = \frac{C^*}{2\beta l} (D_1 + D_2) \quad (2.2)$$

Для второй задачи

$$f_0 = \frac{C^*}{2\beta l} \left| \frac{A_2}{C} Y_3(\beta a) - \frac{A_1}{4C} (Y_1(\beta a) - 1) + \frac{\operatorname{ch}\beta a - \operatorname{sh}\beta a}{2C} \times \right. \\ \left. \times \left(A_2' \sin\beta a + \frac{A_4'}{2} \cos\beta a \right) \right| \quad (2.3)$$

$$f_m = \frac{C^*}{\beta l} \left\{ \frac{(-1)^m Y_3(\beta a)}{C} \left(A_2 D_1 + \frac{A_4}{2} D_2 \right) + \frac{1}{2C} ((-1)^m Y_1(\beta a) - 1) \times \right. \\ \times \left(A_2 D_2 - \frac{A_1}{2} D_1 \right) + \frac{\operatorname{ch}\beta a - \operatorname{sh}\beta a}{2C} \left[\cos\beta_m a \left(\sin\beta a \left(A_2 D_1 + \frac{A_4}{2} D_2 \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \cos\beta a \left(A_2 D_2 - \frac{A_1}{2} D_1 \right) \right) + \sin\beta_m a \left(\cos\beta a \left(A_2 D_2 - \frac{A_1}{2} D_1 \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \sin\beta a \left(A_2 D_1 + \frac{A_4}{2} D_2 \right) \right) \right] \right\} \left| \right|$$

где

$C^* = C/h$ — относительная величина нормального перемещения,
 D_1, D_2, D_3, D_4 — постоянные

$$D_1 = \frac{2\beta - i_m}{2[\beta^2 - (\beta - i_m)^2]} + \frac{2\beta + i_m}{2[\beta^2 + (\beta + i_m)^2]}$$

$$D_2 = \frac{i_m}{2[\beta^2 - (\beta - i_m)^2]} - \frac{i_m}{2[\beta^2 + (\beta + i_m)^2]} \quad (2.4)$$

$$D_3 = \frac{2\beta - i_m}{2[\beta^2 - (\beta - i_m)^2]} - \frac{2\beta + i_m}{2[\beta^2 + (\beta + i_m)^2]}$$

$$D_4 = \frac{i_m}{2[\beta^2 - (\beta - i_m)^2]} + \frac{i_m}{2[\beta^2 + (\beta + i_m)^2]}$$

Ниже приведена таблица значений $C_{кр}^* = C_{кр.}/h$, соответствующих потерю устойчивости оболочки, имеющей следующие характеристики

$$\frac{h}{R} = 0.331 \cdot 10^{-2}, \quad \frac{l}{R} = 0.1\pi \quad (2.5)$$

В первой строке таблицы даны значения $C_{кр.}^* = C_{кр.}/h$ без учета начального докритического прогиба, т. е. без учета в системе (1.8)

членов: $\frac{d^2 W_0}{dx^2}, \frac{d^2 W_1}{dy^2}, \frac{d^2 W_0}{dx^2}, \frac{d^2 d_1}{dy^2}$.

Во второй строке даны значения $C_{кр}^*$ с учетом этих членов.

В табл. 3 приведены значения $C_{кр}^*$ для различных конкретных α при $n = 19$.

Таблица 2

№ \ n	n				
	17	18	19	20	21
I	0.227	0.219	0.216	0.219	0.223
	0.209	0.205	0.204	0.205	0.207
II $\alpha = l/2$	0.219	0.213	0.208	0.212	0.217
	0.208	0.201	0.197	0.201	0.205

Таблица 3

n	19		
	0	1/4	1/2
II	0.216	0.209	0.208
	0.204	0.197	0.197

Из этой таблицы видно, что значения $W^* = C_{кр}^*$ возрастают при уменьшении $x = \alpha$ весьма незначительно.

Разница между значениями $C_{кр}^*$, вычисленными с учетом и без учета начального докритического прогиба, составляет $\approx 5 - 10\%$.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 10 VI 1970

Գ. Բ. ԱՂԱՆՅՈՒԿԱ

ՀԱՐԱՎՈՐԱԿԱՆ ԱՌԱՆՅՔԱՍԻՄԵՏՐԻԿ ՇՈՒՈՒՆՎՈՒՄԻՆ ՏՆՂԱՓՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ԳՆԵՂՎՈՒՄ ԳՂԱՆՈՅԻՆ ԹՈՂԱՆԹԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆ ՄՍՍՍԻՆ

Ս. մ փ ո փ ո լ մ

Աշխատանքում դիտարկվում է եզրերում հոդակապերով հենված փեր-
շավոր երկարությամբ զլանալին թաղանթի կալուստիվյան վերաբերյալ եր-
կու խնդիր՝ ստանդրտսիմետրիկ շտապիզալին տեղափոխություն ազդեցու-
թյան դեպքում: Առաջին խնդրում տեղափոխությունները փերջված են ձախ
հենարանում: Երկրորդ խնդրում՝ հենարանների միջև:

Դրվում է հարկադրական տեղափոխությունների կրիտիկական արժեք-
ների որոշման խնդիրը. որի դեպքում թաղանթը կորցնում է ստատիկա-
կան կալուստիվյանը:

էրկու զեւրթով էլ համասարումների հիմնական սիտեմները բերվում են զծալին հանրահաշվական համասարումների անվերջ սիտեմի, որոնց որոշիչի զրո լինելը հանգիստանում է թուղանթի ստատիկական կայունությանը կորցնելու պայման:

ON THE STABILITY OF A CYLINDRICAL SHELL UNDER FORCED AXISYMMETRIC RADIAL DISPLACEMENTS

G. I. AVANESOVA

S u m m a r y

In the present paper two problems on stability of a cylindrical shell of finite length hingely supported at the butt-ends under the action of axisymmetric radial displacements are considered. In the first problem this displacement is taken at the left butt-end, and in the second—in the span of the shell.

The problem on determination of the critical value of forced displacements when the shell loses statical stability is solved.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем. Физматгиз, М., 1963.
2. Гунин В. Ц., Мовсесян Л. А. К устойчивости моментного состояния цилиндрической оболочки. Докл. АН Арм. ССР, т. XVI, №4, 1968.