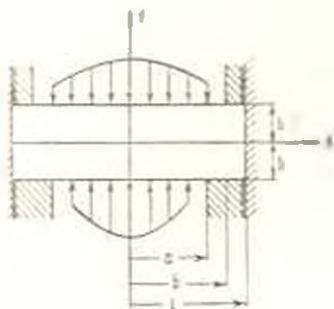


А. А. БАБЛОЯН, А. П. МЕЛКОНЯН

ОБ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ*

Оссимметричные смешанные задачи теории упругости для цилиндра конечных размеров, когда граничные условия на одной из торцевых плоскостей заданы в смешанном виде, на другой плоскости заданы напряжения, рассмотрены в работе [1].

В настоящей работе рассматривается плоская смешанная задача теории упругости для прямоугольника, заделанного в стенку обоими концами на некоторую, различную для верхней и нижней плоскостей, глубину, в случае симметричных граничных условий относительно вертикальной оси y (фиг. 1).



Фиг. 1.

Для простоты предполагается, что касательные напряжения на плоскости прямоугольника отсутствуют. Решение задачи представлено в виде тригонометрического ряда. Определение постоянных интегрирования сведено к решению совокупности двух бесконечных линейных квазиполне регулярных систем алгебраических уравнений.

В частности, получено решение задачи изгиба балки под действием равномерно распределенной нагрузки интенсивности p , когда балка по верхней и нижней плоскостям заделана в стенку на одну и ту же величину $(l-a)$. Получены формулы для определения контактных напряжений и нормальных перемещений.

Решение этой задачи для различных относительных размеров балки $\frac{h}{l}$ и степени заделки $\frac{l-a}{2h}$ доведено до численных результатов, показывающих влияние степени заделки на напряженное состояние балки.

* Работа должна ле Национальной академии наук по прикладной механике (Буварест, июнь 1969 г.).

1. Пусть прямоугольник заделан симметрично обоими концами в абсолютно гладкую и жесткую стенку; по верхней и нижней границам прямоугольника приложены нормальные нагрузки, симметричные относительно оси yy'' , как это показано на фиг. 1. Граничные условия для этой задачи запишутся в виде

$$\tau_{yx}(\pm l, y) = u(\pm l, y) = 0, \quad -h \leq y \leq h \quad (1.1)$$

$$\tau_{xy}(x, \pm h) = 0 \quad -l \leq x \leq l$$

$$\sigma_y(x, -h) = f_1(x) \quad 0 \leq |x| < a \quad (1.2)$$

$$v(x, -h) = v_1(x) \quad a < |x| < l$$

$$\sigma_y(x, h) = f_2(x) \quad 0 \leq |x| < b \quad (1.3)$$

$$v(x, h) = v_2(x) \quad b < |x| < l$$

где $f_i(x)$, $v_i(x)$ являются четными функциями, причем полагаем, что $f_i(x)$ — кусочно-непрерывные, а $v_i(x)$ — кусочно-гладкие функции.

Как известно [2], в плоской задаче теории упругости напряжения и перемещения могут быть выражены через одну бигармоническую функцию $\Phi(x, y)$ соотношениями:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \\ u &= \frac{1}{E} \left[\int \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} dx - \nu \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right] = a_0 y + b_0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$v = \frac{1}{E} \left[\int \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} dy - \nu \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right] = a_0 x + d_0$$

$$\Delta \Delta \Phi = 0, \quad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

где E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона, a_0 , b_0 , d_0 — постоянные.

Бигармоническую функцию $\Phi(x, y)$ для рассматриваемой здесь задачи представим в виде

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= \frac{x^2 + y^2}{2} C_0 + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k \operatorname{sh} \lambda_k y + B_k \operatorname{ch} \lambda_k y + \lambda_k y (C_k \operatorname{sh} \lambda_k y + D_k \operatorname{ch} \lambda_k y) \right] \cos \lambda_k x \end{aligned} \quad (1.5)$$

где $\lambda_k = \frac{\pi}{l} k$.

Из выражений компонент напряжений и перемещений, вычисленных по формулам (1.4) с помощью (1.5), следует, что:

1. постоянные $a_0 = b_0 = 0$ в силу симметрии граничных условий задачи,

2. первые из граничных условий (1.1) удовлетворяются тождественно, а условия $\tau_{zr}(x, z = h) = 0$ приводят к зависимостям

$$\begin{aligned} A_k &= -(1 - \omega_k \operatorname{th} \omega_k) D_k \\ B_k &= -(1 + \omega_k \operatorname{cth} \omega_k) C_k \end{aligned} \quad (1.6)$$

где $\omega_k = \alpha_k h = k \frac{\pi h}{l}$.

Подставив найденные выражения напряжений и перемещений в граничные условия (1.2) и (1.3) и далее учитывая (1.6), после некоторых преобразований и перехода к новой независимой переменной $\varphi = \frac{\pi}{l} x$ получим следующую систему двух парных тригонометрических рядов-уравнений

$$\begin{cases} X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} k [H_k Z_k - (1 - T_k) X_k] \cos k\varphi = \frac{l}{\pi} f_1 \left(\frac{l}{\pi} \varphi \right), & (0 \leq \varphi < \lambda_1) \\ \mu Z_0 - \varepsilon X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k \cos k\varphi = \frac{l}{2} \gamma_1 \left(\frac{l}{\pi} \varphi \right), & (\lambda_1 < \varphi < \pi) \end{cases} \quad (1.7)$$

$$\begin{cases} X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} k [(1 - T_k) Z_k - H_k X_k] \cos k\varphi = \frac{l}{\pi} f_2 \left(\frac{l}{\pi} \varphi \right), & (0 \leq \varphi < \lambda_2) \\ \mu Z_0 + \varepsilon X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} Z_k \cos k\varphi = \frac{E}{2} \gamma_2 \left(\frac{l}{\pi} \varphi \right), & (\lambda_2 < \varphi < \pi) \end{cases} \quad (1.8)$$

здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{l}{\pi} C_0, & Z_0 &= d_0, & \mu &= \frac{E}{2}, & \varepsilon &= \frac{(1 - \nu^2) \pi h}{2l} \\ X_k &= \alpha_k [D_k \operatorname{ch} \omega_k - C_k \operatorname{sh} \omega_k], & Z_k &= \alpha_k [D_k \operatorname{ch} \omega_k + C_k \operatorname{sh} \omega_k] \\ T_k &= \frac{1 - 4\omega_k \cdot e^{-4\omega_k}}{2\operatorname{sh}^2 2\omega_k}, & H_k &= \frac{\operatorname{sh} 2\omega_k + 2\omega_k \operatorname{ch} 2\omega_k}{\operatorname{sh}^2 2\omega_k} \\ \lambda_1 &= \frac{\pi a}{l}, & \lambda_2 &= \frac{\pi b}{l} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Таким образом, коэффициенты C_0, A_k, B_k, C_k, D_k , входящие в выражение (1.5), будут определены, если будут найдены X_k и Z_k из

системы парных рядов-уравнений (1.7) и (1.8). Далее могут быть найдены компоненты напряжений и перемещений в любой точке прямоугольника.

В частном случае, когда $l_1 = l_2$ ($a = b$), т. е. когда балка по верхней и нижней плоскостям заделана в стенку на одну и ту же глубину $(l - a)$, из (1.7) и (1.8) получается следующая система двух независимых парных тригонометрических рядов-уравнений:

$$\begin{cases} w_n + \sum_{k=1}^{\infty} k w_k \cos k\varphi = f_1^*(\varphi) & (0 \leq \varphi < l) \\ \varepsilon w_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (1 - Q_k) w_k \cos k\varphi = \gamma_1^*(\varphi) & (l < \varphi < \pi) \end{cases} \quad (1.10)$$

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} k (1 - N_k) q_k \cos k\bar{\varphi} = f_2^*(\bar{\varphi}) & (0 \leq \bar{\varphi} < l) \\ \eta q_0 + \sum_{k=1}^{\infty} q_k \cos k\bar{\varphi} = \gamma_2^*(\bar{\varphi}) & (l < \bar{\varphi} < \pi) \end{cases} \quad (1.11)$$

здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} w_0 &= X_0, & q_0 &= Z_0 \\ w_k &= \frac{X_k - X_k}{2(1 - Q_k)} = \alpha_k \frac{2\omega_k - \operatorname{sh} 2\omega_k}{2\operatorname{sh}\omega_k} C_k \\ q_k &= \frac{X_k + Z_k}{2} = \alpha_k \operatorname{ch}\omega_k D_k \\ Q_k &= \frac{H_k - T_k}{1 - T_k - H_k} = \frac{1 + 2\omega_k - e^{-2\omega_k}}{2\omega_k + \operatorname{sh} 2\omega_k} \\ N_k &= T_k + H_k = \frac{1 + 2\omega_k + e^{-2\omega_k}}{2\operatorname{ch}^2\omega_k} \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$f_1^*(\varphi) = \frac{l}{2\varepsilon} \left[f_1\left(\frac{l}{\pi}\varphi\right) + f_2\left(\frac{l}{\pi}\varphi\right) \right]$$

$$f_2^*(\bar{\varphi}) = \frac{l}{2\varepsilon} \left[f_2\left(\frac{l}{\pi}\bar{\varphi}\right) - f_1\left(\frac{l}{\pi}\bar{\varphi}\right) \right]$$

$$\gamma_1^*(\varphi) = \frac{E}{4} \left[\gamma_2\left(\frac{l}{\pi}\varphi\right) - \gamma_1\left(\frac{l}{\pi}\varphi\right) \right]$$

$$\gamma_2^*(\bar{\varphi}) = \frac{E}{4} \left[\gamma_1\left(\frac{l}{\pi}\bar{\varphi}\right) + \gamma_2\left(\frac{l}{\pi}\bar{\varphi}\right) \right]$$

2. Применяя методы решения парных рядов-уравнений, предложенные в работах [3, 4, 5, 6], к решению систем (1.7) и (1.8), для определения неизвестных X_k и Z_k получим следующую совокупность двух бесконечных систем линейных алгебраических уравнений:

$$X_n = \sum_{k=1}^{\infty} c_{kn}^{(1)} X_k + \sum_{k=1}^{\infty} d_{kn}^{(1)} Z_k + b_n^{(1)} \quad (2.1)$$

$$Z_n = \sum_{k=1}^{\infty} c_{kn}^{(2)} Z_k + \sum_{k=1}^{\infty} d_{kn}^{(2)} X_k + b_n^{(2)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

здесь введены следующие обозначения:

$$c_{kn}^{(1)} = \frac{k}{2} T_k I_{kn}(i_l) \quad d_{kn}^{(1)} = \frac{k}{2} H_k I_{kn}(i_l)$$

$$I_{kn}(i_l) = \int_0^{i_l} y_k(\cos \theta) y_n(\cos \theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta = \\ = \frac{ny_k(x_i) z_n(x_i) - ky_n(x_i) z_k(x_i)}{n^2 - k^2} \quad (k \neq n)$$

$$I_{nn}(i_l) = \frac{1}{2n} \left\{ 2 + P_{n-1}^2(x_i) - P_n^2(x_i) - 4x_i + 2P_n(x_i) P_{n-1}(x_i) + \right. \\ \left. + 4 \sum_{k=1}^{n-1} P_k(x_i) [P_{k-1}(x_i) - x_i P_k(x_i)] \right\} \quad x_i = \cos i_l$$

$$b_n^{(1)} = (-1)^{n+1} \frac{z_n(\cos i_l)}{n} X_0 + (-1)^n \int_0^{i_l} F_n(\theta) y_n(\cos \theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta - \\ - \int_0^{i_l} G_n(\theta) y_n(\cos \theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta \quad (2.2)$$

$$F_n(\theta) = \frac{2 \sqrt{2} l}{\pi^2} \int_0^{\theta} \frac{J_n\left(\frac{l}{\pi} \varphi\right) \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi}{(\cos \varphi - \cos \theta)^{1/2}} \quad (0 < \theta < i_l)$$

$$G_n(\theta) = \frac{1 \sqrt{2} E l}{\pi^2} \int_0^{i_l} \frac{d\varphi \left(\frac{l}{\pi} \varphi\right)}{d\left(\frac{l}{\pi} \varphi\right)} \times$$

$$\times \frac{\cos \frac{\varphi}{2} d\varphi}{(\cos^b - \cos \varphi)^{1/2}} \quad (b_i < b < \pi) \quad (i = 1, 2) \quad (2.2)$$

где $y_k(x) = P_{k-1}(x) + P_k(x)$, $z_k(x) = P_{k-1}(x) - P_k(x)$, $P_k(x)$ — полиномы Лежандра $|x| \leq 1$.

Нетрудно показать, что полученная выше система (2.1) квази- вполне регулярна, то есть имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_{kn}^{(i)}| + \sum_{k=1}^{\infty} |d_{kn}^{(i)}| < 1 - \varepsilon \quad (n \geq n_0) \quad (2.3)$$

Действительно, для случая, когда T_k и H_k имеют порядок $O(k^{-1})$, каждая из сумм, входящих в неравенство (2.3), будет иметь порядок $O(k^{-1} \ln k)$. Если же T_k и H_k имеют более высокий порядок $T_k, H_k = o(k^{-1})$, то нетрудно убедиться, что каждая из сумм (2.3) будет стремиться к нулю, как $O(k^{-1} \ln k)$, откуда и следует квази- вполне регулярность систем (2.1).

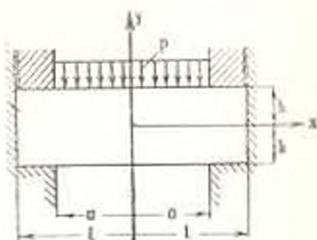
При получении (2.1) предварительно были продифференцированы соответственно вторые уравнения (1.7) и (1.8). Поэтому (2.1) тождественно удовлетворяют первым уравнениям (1.7) и (1.8). Для тождественного удовлетворения вторым уравнениям (1.7) и (1.8) подставим (2.1) во вторые уравнения. После некоторых преобразований и формальных выкладок члены, содержащие независимую переменную φ , исчезают, и для определения X_0 и Z_0 получим следующую систему двух алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} 2 \left(\ln \cos^2 \frac{\lambda_1}{2} - \varepsilon \right) X_0 + 2\mu Z_0 - \sum_{k=1}^{\infty} [T_k X_k + H_k Z_k] z_k(\cos \lambda_1) = \\ = E_{\gamma_1}(l) - \int_0^{\lambda_1} F_1(\theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta - \int_{\lambda_1}^{\pi} G_1(\theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} -2 \left(\ln \cos^2 \frac{\lambda_2}{2} - \varepsilon \right) X_0 + 2\mu Z_0 - \sum_{k=1}^{\infty} [T_k Z_k + H_k X_k] z_k(\cos \lambda_2) = \\ = E_{\gamma_2}(l) + \int_0^{\lambda_2} F_2(\theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta - \int_{\lambda_2}^{\pi} G_2(\theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta \end{aligned} \quad (2.5)$$

3. Рассмотрим частный случай, когда балка по верхней и нижней плоскостям заделана в стенку на одну и ту же глубину $(l-a)$, т. е. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, а верхние абсолютно жесткие и гладкие плоскости вдавли-

входят в балку на величину v_0 по всей длине заделки $a \leq |x| \leq l$ при $y = h$, и равномерно распределенная нагрузка интенсивности p приложена только по верхней плоскости $y = h$ балки (фиг. 2).



Фиг. 2

Решение сформулированной здесь задачи сводится к решению парных уравнений (1.10) и (1.11), в которых следует положить

$$f_1(x) = \gamma_1(x) = 0, \quad f_2(x) = -p = \text{const}, \quad \eta_2(x) = -v_0 = \text{const} \quad (3.1)$$

откуда

$$f_1^*(\varphi) = f_2^*(\varphi) = -\frac{pl}{2z}, \quad \gamma_1^*(\varphi) = \gamma_2^*(\varphi) = -\frac{Ev_0}{4} \quad (3.2)$$

Решения уравнений (1.10) и (1.11), как частные случаи, могут быть получены из решений (2.1) с учетом условий (3.1), (3.2), $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ и (1.12) и приводятся к следующим бесконечным системам линейных алгебраических уравнений:

$$w_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} w_k + b_n \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (3.3)$$

$$q_n = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{a}_{nk} q_k + b_n \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (3.4)$$

где

$$a_{n0} = -\frac{z_n(\cos \lambda)}{n}, \quad a_{nk} = \frac{k}{2} \left[\frac{2}{n} z_{nk} - I_{nk}(\lambda) \right] Q_k$$

$$I_{nk}(\lambda) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} y_k(\cos t) y_n(\cos t) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d^{\theta} \quad (3.5)$$

$$\bar{a}_{n2} = \frac{k}{2} N_k I_{kn}(\lambda), \quad b_n = -\frac{pl}{2z} \frac{z_n(\cos \lambda)}{n}$$

δ_{kn} — символ Кронекера.

Уравнения же для определения w_0 и q_0 , получаемые из (2.4) и (2.5) с учетом (3.1), (3.2), $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, (1.12) и (2.2), имеют вид

$$4 \left(\varepsilon - \text{In} \cos^2 \frac{\lambda}{2} \right) \omega_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} Q_k z_k (\cos^2) \omega_k = -E v_0 + \frac{2pl}{\varepsilon} \text{In} \cos^2 \frac{\lambda}{2} \quad (3.6)$$

$$q_0 - \frac{1}{E} \sum_{k=1}^{\infty} N_k z_k (\cos^2) q_k = -\frac{v_0}{2} + \frac{pl}{\varepsilon E} \text{In} \cos^2 \frac{\lambda}{2} \quad (3.7)$$

Таким образом, определив ω_k и q_k из бесконечных систем (3.3) и (3.4) и подставив их соответственно в (3.6) и (3.7), найдем ω_0 и q_0 . После чего могут быть вычислены компоненты напряжений и перемещений в любой точке балки по следующим формулам, получаемым из (1.4) с помощью (1.5) и учетом (1.6) и (1.12):

$$\begin{aligned} z_x &= v \frac{\pi}{l} \omega_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \frac{(\text{ch}^{\omega_k} - \omega_k \text{sh}^{\omega_k}) \text{sh} z_k y + z_k y \text{ch}^{\omega_k} \text{ch} z_k y}{\text{ch}^{2\omega_k}} q_k \cos z_k x + \\ &+ 2 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \frac{(\text{sh}^{\omega_k} - \omega_k \text{ch}^{\omega_k}) \text{ch} z_k y + z_k y \text{sh}^{\omega_k} \text{sh} z_k y}{2\omega_k + \text{sh} 2\omega_k} \omega_k \cos z_k x \\ \sigma_y &= \frac{\pi}{l} \omega_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \frac{(\text{ch}^{\omega_k} + \omega_k \text{sh}^{\omega_k}) \text{sh} z_k y - z_k y \text{ch}^{\omega_k} \text{ch} z_k y}{\text{ch}^{2\omega_k}} q_k \cos z_k x + \\ &+ 2 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \frac{(\text{sh}^{\omega_k} + \omega_k \text{ch}^{\omega_k}) \text{ch} z_k y - z_k y \text{sh}^{\omega_k} \text{sh} z_k y}{2\omega_k + \text{sh} 2\omega_k} \omega_k \cos z_k x \\ \tau_{xy} &= - \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \frac{\omega_k \text{sh}^{\omega_k} \text{ch} z_k y - z_k y \text{ch}^{\omega_k} \text{sh} z_k y}{\text{ch}^{2\omega_k}} q_k \sin z_k x - \\ &- \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \frac{\omega_k \text{ch}^{\omega_k} \text{sh} z_k y - z_k y \text{sh}^{\omega_k} \text{ch} z_k y}{2\omega_k + \text{sh} 2\omega_k} \omega_k \sin z_k x \quad (3.8) \\ u &= \frac{1}{E} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_k}{\text{ch}^{2\omega_k}} [(1-v) \text{ch}^{\omega_k} \text{sh} z_k y + (1+v) (z_k y \text{ch}^{\omega_k} \text{ch} z_k y - \\ &- \omega_k \text{sh}^{\omega_k} \text{sh} z_k y)] \sin z_k x + \frac{2}{E} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega_k}{(2\omega_k + \text{sh} 2\omega_k)} [(1-v) \text{sh}^{\omega_k} \text{ch} z_k y + \\ &+ (1+v) (z_k y \text{sh}^{\omega_k} \text{sh} z_k y - \omega_k \text{ch}^{\omega_k} \text{ch} z_k y)] \sin z_k x \\ v &= q_0 + \frac{2}{E} \frac{\varepsilon}{h} \omega_0 y + \frac{1}{E} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_k}{\text{ch}^{2\omega_k}} [2 \text{ch}^{\omega_k} \text{ch} z_k y + (1+v) (\omega_k \text{sh}^{\omega_k} \text{ch} z_k y - \\ &- z_k y \text{ch}^{\omega_k} \text{sh} z_k y)] \cos z_k x + \frac{2}{E} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega_k}{2\omega_k + \text{sh} 2\omega_k} [2 \text{sh}^{\omega_k} \text{sh} z_k y + \\ &+ (1+v) (\omega_k \text{ch}^{\omega_k} \text{sh} z_k y - z_k y \text{sh}^{\omega_k} \text{ch} z_k y)] \cos z_k x \end{aligned}$$

Ряды, входящие в выражения напряжений и перемещений, сходятся достаточно быстро внутри области $|y| < h$. На границе же области $y = \pm h$ сходимость этих рядов ухудшается и формулы (3.8) не пригодны для вычислений. Однако, предварительно улучшив сходимость этих рядов и выделив при этом особенности, можно получить формулы, пригодные для вычисления напряжений и перемещений на границе области $y = \pm h$. Так, например, из (3.8) с учетом (1.12) имеем

$$z_k(x, h) = \frac{\pi}{l} w_0 + \sum_{k=1}^{\infty} z_k (1 - N_k) q_k \cos z_k x + \sum_{k=1}^{\infty} z_k w_k \cos z_k x \quad (3.9)$$

Подставив сюда значения q_k и w_k из бесконечных систем (2.1) и далее пользуясь значением ряда [4]

$$1 - \sum_{k=1}^{\infty} z_k (\cos \vartheta) \cos k \varphi = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\sin \varphi/2}{\cos \vartheta - \cos \varphi} & \varphi > \vartheta \\ 0 & \varphi < \vartheta \end{cases} \quad (3.10)$$

окончательно получим

$$\sigma_y(\varphi, h) = -p + \frac{\sin \varphi/2}{1 - \cos \lambda - \cos \varphi} (M_2 + \sqrt{2} p) + R_1(\varphi) \quad (\lambda \leq \varphi < \pi) \quad (3.11)$$

Аналогично нетрудно получить

$$\sigma_y(\varphi, -h) = \frac{M_2 \sin \varphi/2}{1 - \cos \lambda - \cos \varphi} + R_2(\varphi), \quad (\lambda < \varphi < \pi) \quad (3.12)$$

где

$$M_i = \frac{\pi \sqrt{2}}{2l} \left\{ 2w_0 + \sum_{k=1}^{\infty} k \left[Q_k w_k + (-1)^i N_k q_k \right] y_k(\cos \lambda) \right\} \quad (3.13)$$

$$R_i(\varphi) = (-1)^{i-1} \frac{\pi \sqrt{2}}{2l} \sin \frac{\varphi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} k^2 [N_k q_k + (-1)^i Q_k w_k] \times$$

$$\times \int_{\lambda}^{\varphi} \frac{z_k(\cos \vartheta) \operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{2} d\vartheta}{(\cos \vartheta - \cos \varphi)^{3/2}}, \quad i = 1, 2.$$

Таким же образом получим

$$\begin{aligned} E\nu(\varphi, h) = & -E\nu_0 - 2 \left(\frac{pl}{\pi} + w_0 \right) \ln \frac{1 + \cos \varphi}{1 - \cos \varphi} + \frac{1 - \cos \varphi - \cos \lambda}{1 + \cos \varphi - \cos \lambda} + \\ & + \sqrt{2} \cos \frac{\varphi}{2} \sum_{k=1}^{\infty} k (N_k q_k - Q_k w_k) \int_{\lambda}^{\varphi} \frac{y_k(\cos \vartheta) \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} d\vartheta}{(\cos \vartheta - \cos \varphi)^{3/2}}, \quad (0 < \varphi \leq \lambda) \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned}
 E\nu(\varphi, -h) = & 2w_0 \ln \frac{1 + \cos\varphi + 1 + \cos\varphi'}{1 + \cos\varphi - 1 + \cos\varphi'} - \\
 & + 1 - 2 \cos \frac{\varphi}{2} \sum_{l=1}^{\infty} k(N_l q_l + Q_l w_l) \int_0^l \frac{y_l(\cos\theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta}{(\cos\varphi - \cos\theta)^{1/2}}, \quad (0 < \varphi < \pi)
 \end{aligned}
 \tag{3.15}$$

Из выражений (3.11), (3.12) и (3.13) видно, что ряды, входящие в формулы для $\varepsilon_\nu(\varphi, \pm h)$, сходятся абсолютно и равномерно при $\varphi \rightarrow \pi$, то есть в рассматриваемой здесь задаче концентрации напряжений в угловых точках ($l; \pm h$) не имеет места.

Приведем здесь также выражение результирующих сил реакций, возникающих по верхней и нижней плоскостям заделки,

$$P_1 = \int_0^l \varepsilon_\nu(x, h) dx = -w_0 \rho a
 \tag{3.16}$$

$$P_2 = \int_0^l \varepsilon_\nu(x, -h) dx = -w_0$$

и распорной силы

$$T = \int_{-h}^h \varepsilon_x(l, y) dy = \frac{2\pi\nu h}{l} w_0
 \tag{3.17}$$

Решение рассматриваемой задачи при граничных условиях (3.1) (фиг. 2) для двух частных случаев относительной толщины $\left(\frac{h}{a} = \frac{1}{3}; \frac{1}{5}\right)$ и различной степени заделки $\left(\frac{l-a}{2h} = \frac{1}{2}; 1\right)$ доведены до численных результатов.

Результаты вычислений (при $\nu = 0.3$) приведены в табл. 1 и 2, где помещены значения напряжений $\frac{l\varepsilon_x(x, y)}{E\varepsilon_0}$ и $\frac{l\varepsilon_{xy}(x, y)}{E\nu_0}$, возникающих при симметричном сдавливании в балку верхних плоскостей на глубину ν_0 . На графиках (фиг. 3—6) представлены эпюры напряжений $\frac{\varepsilon_x(x, y)}{\rho}$, $\frac{\varepsilon_{xy}(x, y)}{\rho}$, возникающих от действия равномерно распределенной нагрузки интенсивности ρ , вычисленных по формулам (3.8), (3.11) и (3.12).

Из приведенных графиков следует, что в поперечных плоскостях (вне заделки) балки $x = \text{const}$, далеко отстоящих от плоскости за-

Таблица 1

$\frac{y}{h}$	Случай $\frac{h}{a} = 1/3, \frac{h}{l} = 1/5, \frac{l-a}{2h} = 1$							Случай $\frac{h}{a} = 1/3, \frac{h}{l} = 1/4, \frac{l-a}{2h} = 1/2$						
	$\sigma_x(0, y)$	$\sigma_x\left(\frac{a}{2}, y\right)$	$\sigma_x(a, y)$	$\sigma_x(l, y)$	$\tau_{xy}\left(\frac{a}{2}, y\right)$	$\tau_{xy}(a, y)$	$\tau_{xy}\left(\frac{l+a}{2}, y\right)$	$\sigma_x(0, y)$	$\sigma_x\left(\frac{a}{2}, y\right)$	$\sigma_x(a, y)$	$\sigma_x(l, y)$	$\tau_{xy}\left(\frac{a}{2}, y\right)$	$\tau_{xy}(a, y)$	$\tau_{xy}\left(\frac{l+a}{2}, y\right)$
1	-0.172	-0.027	$-\infty$	-0.115	0	0	0	-0.080	-0.034	$-\infty$	-0.118	0	0	0
3/4	-0.128	-0.101	-0.090	-0.132	0.023	-0.269	0.029	-0.099	-0.069	-0.053	-0.177	0.027	-0.314	0.075
1/2	-0.127	-0.133	-0.074	-0.130	0.028	-0.151	0.036	-0.099	-0.104	-0.038	-0.093	0.031	-0.174	0.046
1/4	-0.127	-0.158	-0.076	-0.126	0.017	-0.070	0.023	-0.100	-0.131	-0.038	-0.023	0.019	-0.081	0.013
0	-0.127	-0.167	-0.077	-0.124	0	0	0	-0.101	-0.141	-0.039	-0.003	0	0	0

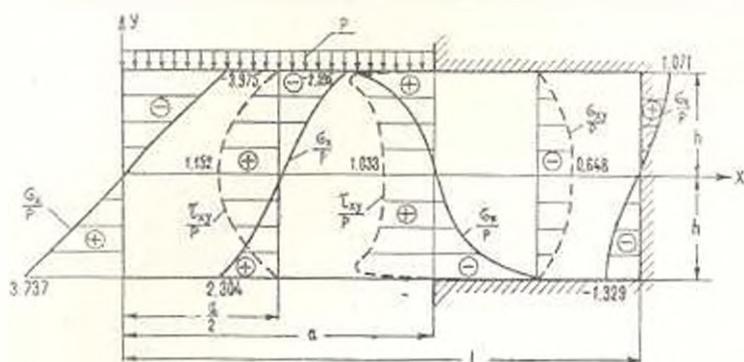
Таблица 2

$\frac{y}{h}$	Случай $\frac{h}{a} = 1/5, \frac{h}{l} = 1/7, \frac{l-a}{2h} = 1$							Случай $\frac{h}{a} = 1/5, \frac{h}{l} = 1/6, \frac{l-a}{2h} = 1/2$						
	$\sigma_x(0, y)$	$\sigma_x\left(\frac{a}{2}, y\right)$	$\sigma_x(a, y)$	$\sigma_x(l, y)$	$\tau_{xy}\left(\frac{a}{2}, y\right)$	$\tau_{xy}(a, y)$	$\tau_{xy}\left(\frac{l+a}{2}, y\right)$	$\sigma_x(0, y)$	$\sigma_x\left(\frac{a}{2}, y\right)$	$\sigma_x(a, y)$	$\sigma_x(l, y)$	$\tau_{xy}\left(\frac{a}{2}, y\right)$	$\tau_{xy}(a, y)$	$\tau_{xy}\left(\frac{l+a}{2}, y\right)$
1	-0.118	-0.127	$-\infty$	-0.169	0	0	0	-0.051	-0.132	$-\infty$	-0.380	0	0	0
3/4	-0.119	-0.125	-0.089	-0.114	0.002	-0.351	0.037	-0.096	-0.093	-0.042	-0.203	-0.002	-0.430	0.090
1/2	-0.124	-0.119	-0.048	-0.129	0.005	-0.210	0.057	-0.095	-0.092	-0.008	-0.081	0.003	-0.254	0.060
1/4	-0.126	-0.119	-0.048	-0.128	0.004	-0.098	0.035	-0.095	-0.093	-0.009	0.022	0.003	-0.119	0.016
0	-0.127	-0.119	-0.049	-0.127	0	0	0	-0.096	-0.094	-0.010	0.060	0	0	0

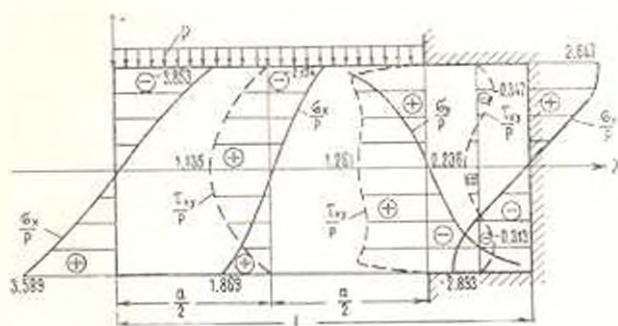
Примечание: 1. В табл. 1 и 2 приведены значения напряжений в долях $\frac{E\sigma_0}{l}$, возникающих при сдавливании верхних плоскостей в балку на глубину a_0 .

2. Ввиду четности $\sigma_x(x, y)$ и нечетности $\tau_{xy}(x, y)$ в табл. 1 и 2 приведены их значения только для положительных y и h .

делки, нормальные напряжения σ_x , возникающие в случае изгиба балки равномерно распределенной нагрузкой, меняются практически линейно, а касательные напряжения — по закону симметричной параболы.

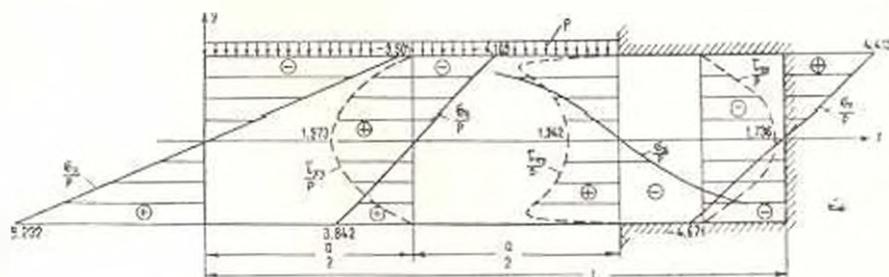


Фиг. 3. Эпюры σ_x и τ_{xy} для случая $h/a = 1/3$, $h/l = 1/5$



Фиг. 4. Эпюры σ_x и τ_{xy} для случая $h/a = 1/3$, $h/l = 1/4$

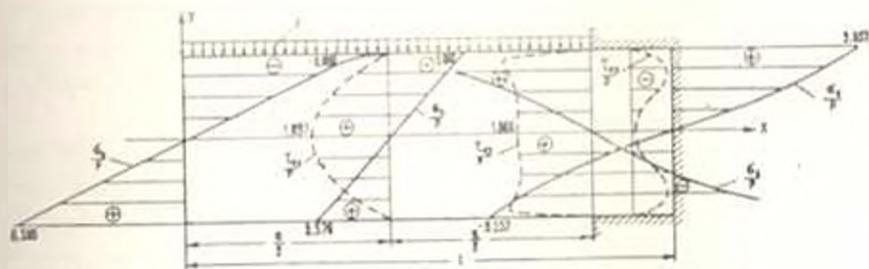
В плоскости заделки $x = -a$ и в поперечных сечениях, близких к ней, нормальные напряжения существенно нелинейны, а в точках $(x = \pm a, y = \pm h)$ они обращаются в бесконечность; касательные же напряжения изменяются по более сложному закону, отличному от параболического.



Фиг. 5. Эпюры σ_x и τ_{xy} для случая $h/a = 1/5$, $h/l = 1/7$

В области заделки $a < x \leq l$ закон изменения напряжений, как и следовало ожидать, существенно зависит от степени заделки и относительной толщины. Действительно, если для тонких балок в случае

большей степени заделки нормальные напряжения σ_x меняются по закону, близкому к линейному, а касательные напряжения по закону, близкому к квадратной параболе, то для толстых балок в случае меньшей степени заделки линейность нормального напряжения нарушается, а закон изменения касательных напряжений τ_{xy} по высоте имеет сложный и колебательный характер.



Фиг. 6. Эпюры σ_x и τ_{xy} для случая $h/a = 1/5$, $h/l = 1/6$.

Значения коэффициентов C_i

		Таблица 2			
		$h/l = 1/4$ $a/l = 3/4$	$h/l = 1/5$ $a/l = 3/5$	$h/l = 1/6$ $a/l = 5/6$	$h/l = 1/7$ $a/l = 5/7$
C_1		0.424617	0.422161	0.452300	0.446965
C_2		0.331355	0.427688	0.314506	0.407963

В заключение приведем выражения P_1 , P_2 и T , представленные в виде двух слагаемых, возникающих соответственно от p и ζ_0 , доведенные для рассматриваемых частных случаев до численных результатов (табл. 3).

$$P_1 = P_2 + ap$$

$$P_2 = C_1 pl + C_2 E \zeta_0$$

$$T = 2 \cdot \frac{h}{l} P_2$$

Ա. Ա. ԲԱԲԼՈՅԱՆ, Ա. Մ. ՄԵԼԿՈՆՅԱՆ

ԱՌՈՉԻՆԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏՆՍՈՒԹՅԱՆ ԱՆԻ շԱՐԻՔ
ԵՄՈՒԹՅԱՆ ԿՆՏՐՈՒ ԿԱՍԵՆ

Ա մ փ ո փ ու լ ու մ

Դիտարկվում է առավելագույն թվով տեսակների հարթ խնդիրը ուղղանկյան համար, երբ ուղղանկյունը իր ծայրերով ամրացված է կոշտ ողորկ պատերի մեջ, ընդ որում ամրացման շարքը վերինը ու ներքինը տարբեր է: Եզրագծի մնացած մասում տրված են արտաքին շարժումներ:

Խնդրի լուծումը ներկայացված է եռանկյունաչափական շարքերի տեսքով, որոնց գործակիցների որոշման համար ստացված են սկզբում՝ գույք շարք - հավասարումներ, այնուհետև՝ գծային հավասարումների անվերջ սխառաններ: Յուրյ է արվում, որ սխառանները կվազի - լիտին սեղուլյար են:

Ստացված են բանաձևեր սեղափոխումների և կոնտակտային շարժումների համար:

Դիտարկված են թվային օրինակներ:

ON A MIXED PROBLEM OF THE
PLANE THEORY OF ELASTICITY

A. A. BABLOYAN, A. P. MELKONIAN

S u m m a r y

The solution of the plane elasticity problem for a rectangle, walled up by both ends for some depth different for the upper and lower planes with symmetrical boundary conditions, is presented in a trigonometric series form.

The determination of the integration constants is reduced first to the solution of the system of dual series-equations and then to the totality of two quasi quite regular infinite systems of linear algebraic equations. The formulae for the determination of the contact stresses and displacements out of contacts are obtained.

The numerical examples are presented.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Բաբլոյան Ա. Ա., Մելկոնյան Ա. Մ. О двух смешанных осесимметричных задачах теории упругости. Изв. АН АрмССР, Механика, т. XXII, № 5, 1969.
2. Тимошенко С. П. Теория упругости. ОНТИ, М., 1937.
3. Srivastava V. B. III. Dual relations involving trigonometric series. Proc. Roy. Soc. Edinb. (Sec. A), V. 66, Pt. 3, 1964, 173—184.
4. Բաբլոյան Ա. Ա. Решение некоторых парных уравнений, встречающихся в задачах теории упругости. Прикл. математика и механика, т. XXXI, вып. 2, № 4, 1967, 678—689.

5. Бабоян А. А., Мелконян А. П. Осесимметричная задача полого бесконечного цилиндра с периодически посаженными на него дисками. Изв. АН АрмССР, Механика, т. XXI, № 1, 1968
6. Минков И. М. О некоторых функциональных уравнениях. Прикл. математика и механика, т. 24, вып. 5, 1960.