

А. Г. БАГДОЕВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ
 ВБЛИЗИ УДАРНОЙ ВОЛНЫ

Рассматривается задача по определению давления жидкости в окрестности точки пересечения ударной волны с каустикой.

Пусть решение геометрической акустики, дающее интенсивность падающей волны AB , на некотором удалении от каустики имеет вид [1]

$$P_{\text{геом}} = A_1 (-y)^{-1} (z-x)^k$$

где начало координат A выбрано в точке пересечения AB с каустикой. ось x направлена по касательной, ось y — по нормали к каустике, $\alpha = \frac{2}{3} \left(\frac{2}{R} \right)^{\frac{1}{2}} (-y)^{\frac{3}{2}}$, $\frac{1}{R}$ — разность нормальных кривизн луча и каустики.

Впереди волны AB решение имеет вид [1] $x > z$,

$$P = A_3 F_1, \quad F_1 = |x|^{k-\frac{1}{6}} F\left(-\frac{k}{2} + \frac{1}{12}, -\frac{k}{2} + \frac{7}{12}, 1-k, 1-\frac{\alpha^2}{x^2}\right) \quad (1)$$

$$A_3 = A_1 \frac{k}{2\pi} 2^k \frac{\Gamma^2(k) \Gamma\left(\frac{1}{6}-k\right) \sin \pi k}{\Gamma\left(\frac{1}{6}+k\right) \sin\left(\frac{1}{6}+k\right) \pi} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{6}} \left(\frac{2}{R}\right)^{\frac{1}{12}}$$

Воспользовавшись соотношениями [2]

$$\begin{aligned} F_1 &= \alpha^{k-\frac{1}{6}} F\left(-\frac{k}{2} + \frac{1}{12}, -\frac{k}{2} + \frac{5}{12}, 1-k, 1-\frac{x^2}{\alpha^2}\right) = \\ &= \alpha^{k-\frac{1}{6}} \left(\frac{1+\frac{x}{\alpha}}{2}\right)^k F\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 1-k, \frac{1-\frac{x}{\alpha}}{2}\right) \end{aligned} \quad (2)$$

решение (1) можно записать следующим образом:

$$P = A_1 \frac{k}{2\pi} \Gamma^2(k) \frac{\Gamma\left(\frac{1}{6}-k\right) \sin \pi k}{\Gamma\left(\frac{1}{6}+k\right) \sin\left(\frac{1}{6}+k\right) \pi} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{6}} \left(\frac{2}{R}\right)^{\frac{1}{12}} \times$$

$$\times x^{k-\frac{1}{6}} \left(1 + \frac{x}{\alpha}\right)^k F\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 1-k, \frac{1-\frac{x}{\alpha}}{2}\right) \quad (3)$$

В области $-\alpha < x < \alpha$ позади АВ решение имеет вид

$$P = A_3 F_1 + A_1 2^{-k} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{6}} \left(\frac{2}{R}\right)^{\frac{1}{12}} F_2 \quad (4)$$

$$F_2 = |x|^{k-\frac{1}{6}} \left|1 - \frac{x^2}{\alpha^2}\right|^k F\left(\frac{k}{2} + \frac{1}{12}, \frac{k}{2} + \frac{7}{12}, 1+k, 1 - \frac{x^2}{\alpha^2}\right)$$

Подобно (2) можно найти соотношения

$$\begin{aligned} F_2 &= x^{k-\frac{1}{6}} \left|1 - \frac{x^2}{\alpha^2}\right|^k F\left(\frac{k}{2} + \frac{1}{12}, \frac{k}{2} + \frac{5}{12}, 1+k, 1 - \frac{x^2}{\alpha^2}\right) = \\ &= x^{k-\frac{1}{6}} 2^k \left(1 - \frac{x}{\alpha}\right)^k F\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 1+k, \frac{1-\frac{x}{\alpha}}{2}\right) \end{aligned} \quad (5)$$

и (4) примет вид $-\alpha < x < \alpha$ [1]

$$\begin{aligned} P &= A_1 \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{6}} \left(\frac{2}{R}\right)^{\frac{1}{12}} x^{k-\frac{1}{6}} \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{1}{6} - k\right) \sin \pi k}{2\pi \Gamma^2(k)} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{6} - k\right) \sin \pi k}{\Gamma\left(\frac{1}{6} + k\right) \sin\left(\frac{1}{6} + k\right)\pi} \times \right. \\ &\times \left. \left(1 + \frac{x}{\alpha}\right)^k F\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 1-k, \frac{1-\frac{x}{\alpha}}{2}\right) + \right. \\ &\left. + \left(1 - \frac{x}{\alpha}\right)^k F\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 1+k, \frac{1-\frac{x}{\alpha}}{2}\right) \right\} \quad (6) \end{aligned}$$

В области позади волны АС, $x < -\alpha$, [1]

$$\begin{aligned} P &= \frac{2A_1 k \Gamma^2(k) \cos 2\pi k \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{6}} \left(\frac{2}{R}\right)^{\frac{1}{12}}}{(1 - 2\cos 2\pi k) \Gamma\left(\frac{1}{6} + k\right) \Gamma\left(\frac{5}{6} + k\right)} x^{k-\frac{1}{6}} \left(1 - \frac{x}{\alpha}\right)^k \times \\ &\times F\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 1-k, \frac{1+\frac{x}{\alpha}}{2}\right) - A_2 \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{6}} \left(\frac{2}{R}\right)^{\frac{1}{12}} \times \end{aligned}$$

$$\times \frac{\cos \pi k}{2 \sin \pi k} x^{k-\frac{1}{6}} \left(-1 - \frac{x}{\alpha}\right)^k F\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 1+k, \frac{1+\frac{x}{\alpha}}{2}\right) \quad (7)$$

где вместо (2) и (5) использованы соотношения

$$F_1 = x^{k-\frac{1}{6}} \left(\frac{1-\frac{x}{\alpha}}{2}\right)^k F\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 1-k, \frac{1+\frac{x}{\alpha}}{2}\right) \quad (8)$$

$$F_2 = \alpha^{k-\frac{1}{6}} 2^k \left(-1 - \frac{x}{\alpha}\right)^k F\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 1+k, \frac{1+\frac{x}{\alpha}}{2}\right)$$

Приведенные формулы можно получить также из решения, выраженного через присоединенные функции Лежандра [3]. Решение имеет вид

$$u = P_\lambda, \quad \lambda = k$$

$$u = -\frac{\lambda}{\Gamma(1-\lambda)} R_1 \frac{2^\lambda \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{5}{6} - \lambda\right) \Gamma\left(\frac{1}{6} - \lambda\right) (-H_1)^{\frac{3}{2}\lambda - \frac{1}{4}}}{3^{\frac{3}{2}\lambda + \frac{1}{4}} \sin \lambda \pi} \times \\ \times \operatorname{Re} \frac{P_0(X^2 - 1)^{\frac{\lambda}{2}}}{i} \quad (9)$$

где

$$z = \frac{2}{3\sqrt{3}} (-H_1)^{\frac{2}{3}}, \quad X = \frac{x}{\alpha}$$

$$P_0 = -iP_{-\frac{1}{6}}^\lambda(X+i0) + P_{-\frac{1}{6}}^\lambda(-X-i0) \quad (10)$$

В области впереди AB $X > 1$ и имеет место

$$P_{-\frac{1}{6}}^\lambda(X) = \frac{1}{\Gamma(1-\lambda)} \left(\frac{X+1}{X-1}\right)^{\frac{\lambda}{2}} F\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 1-\lambda, \frac{1-X}{2}\right)$$

$$P_{-\frac{1}{6}}^\lambda(-X-i0) = \frac{\Gamma(-\lambda)}{\Gamma\left(\frac{5}{6} - \lambda\right) \Gamma\left(\frac{1}{6} - \lambda\right)} \left(\frac{X-1}{X+1}\right)^{\frac{\lambda}{2}} \times$$

$$\times F\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 1+\lambda, \frac{1-X}{2}\right) + \frac{\Gamma(\lambda) e^{i\pi\lambda}}{2\pi} \left(\frac{X+1}{X-1}\right)^{\frac{\lambda}{2}} \times$$

$$\times F\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 1-\lambda, \frac{1-X}{2}\right) \quad (11)$$

где второе соотношение получается из поведения функции $P_{-\frac{1}{2}}^{\lambda}(-X)$ вблизи $X=1$.

Подставляя (11) и (10) в (9), можно получить (3) при условии, что выполняется соотношение

$$R_1 = A_1 \left(\frac{2}{R}\right)^{\frac{1}{2}} 3^{\frac{1}{2}} \frac{1}{V^{\frac{1}{2}}} \quad (12)$$

В области $-1 < X < 1$ имеют место соотношения

$$(X^2-1)^{\frac{1}{2}} P_{-\frac{1}{2}}^{\lambda}(X) = \frac{1}{\Gamma(1-\lambda)} (X+1)^{\lambda} F\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 1-\lambda, \frac{1-X}{2}\right) \quad (13)$$

$$(X^2-1)^{\frac{1}{2}} P_{-\frac{1}{2}}^{\lambda}(-X) = \frac{e^{i\pi\lambda}}{\Gamma(1-\lambda)} (1-X)^{\lambda} F\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 1-\lambda, \frac{1+X}{2}\right)$$

причем последнее имеет место при $|1+X| < 2$. Тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \frac{P_0(X^2-1)^{\frac{\lambda}{2}}}{i} &= -\frac{1}{\Gamma(1-\lambda)} (X+1)^{\lambda} F\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 1-\lambda, \frac{1-X}{2}\right) + \\ &+ \frac{\sin\lambda\pi}{\Gamma(1-\lambda)} (1-X)^{\lambda} F\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 1-\lambda, \frac{1+X}{2}\right) \end{aligned} \quad (14)$$

или, после аналитического продолжения второго слагаемого к значениям аргумента $X=1$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \frac{P_0(X^2-1)^{\frac{\lambda}{2}}}{i} &= -\frac{\sin\pi\left(\frac{1}{6}+\lambda\right)\Gamma\left(\frac{1}{6}+\lambda\right)}{\lambda\Gamma(\lambda)\Gamma\left(\frac{1}{6}-\lambda\right)} \times \\ &\times \left\{ (1-X)^{\lambda} F\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 1+\lambda, \frac{1-X}{2}\right) + \right. \\ &\left. + \frac{\lambda\Gamma^2(\lambda)\Gamma\left(\frac{1}{6}-\lambda\right)\sin\pi\lambda}{2\pi\Gamma\left(\frac{1}{6}+\lambda\right)\sin\pi\left(\frac{1}{6}+\lambda\right)} (X+1)^{\lambda} F\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 1-\lambda, \frac{1-X}{2}\right) \right\} \end{aligned} \quad (15)$$

Подставляя (15) в (9), можно найти (6). В области позади

$$\begin{aligned}
 AC, \quad X < -1, \quad (X^2 - 1)^{\frac{\lambda}{2}} = e^{-i\lambda} (-X - 1)^{\frac{\lambda}{2}} (-X + 1)^{\frac{\lambda}{2}} \\
 P_{-\frac{1}{2}}(-X) = \frac{1}{\Gamma(1-\lambda)} \left(\frac{-X+1}{-X-1} \right)^{\frac{\lambda}{2}} F\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 1-\lambda, \frac{1+X}{2}\right) \\
 (X^2 - 1)^{\frac{\lambda}{2}} P_{-\frac{1}{2}}(X) = \frac{\Gamma(-\lambda) e^{i\lambda}}{\Gamma\left(\frac{5}{6}-\lambda\right) \Gamma\left(\frac{1}{6}-\lambda\right)} (-X-1)^{\lambda} \times \\
 \times F\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 1+\lambda, \frac{1+X}{2}\right) + \frac{(-X+1)^{\lambda}}{2\sin\pi\lambda \Gamma(1-\lambda)} \times \\
 \times F\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 1-\lambda, \frac{1+X}{2}\right)
 \end{aligned} \quad (16)$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re} \frac{P_0(X^2-1)^{\frac{\lambda}{2}}}{i} = -\frac{(1-X)^{\lambda} \cos 2\pi\lambda}{2\sin\pi\lambda \Gamma(1-\lambda)} F\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 1-\lambda, \frac{1+X}{2}\right) - \\
 - \frac{\Gamma(-\lambda) \cos\pi\lambda}{\Gamma\left(\frac{5}{6}-\lambda\right) \Gamma\left(\frac{1}{6}-\lambda\right)} (-X-1)^{\lambda} F\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 1+\lambda, \frac{1+X}{2}\right)
 \end{aligned} \quad (17)$$

Подставляя (17) в (9), можно найти решение (7) позади AC. Подобным же образом впереди AC можно найти

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re} \frac{P_0(X^2-1)^{\frac{\lambda}{2}}}{i} = -\frac{\Gamma(-\lambda)}{\Gamma\left(\frac{5}{6}-\lambda\right) \Gamma\left(\frac{1}{6}-\lambda\right)} (X+1)^{\lambda} \times \\
 \times F\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 1+\lambda, \frac{X+1}{2}\right) - \\
 - (1-X)^{\lambda} F\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 1-\lambda, \frac{X+1}{2}\right) \frac{\cos 2\pi\lambda}{2\sin\pi\lambda \Gamma(1-\lambda)}
 \end{aligned} \quad (18)$$

что получится также из (14) после аналитического продолжения первого слагаемого к $\frac{1-X}{2}$.

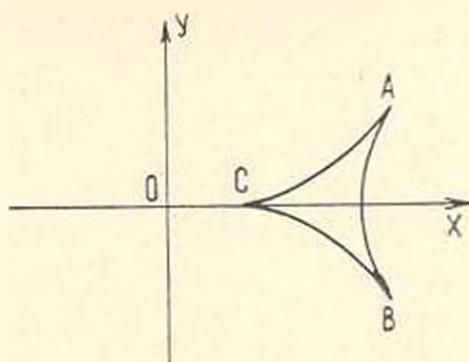
Решение вблизи $x = -\alpha$ при $x > -\alpha$ имеет вид

$$\rho = \frac{2A_1 k \Gamma^2(k) \cos 2\pi k \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{6}} \left(\frac{2}{R}\right)^{\frac{1}{12}}}{(1-2\cos 2\pi k) \Gamma\left(\frac{1}{6}+k\right) \Gamma\left(\frac{5}{6}+k\right)} \alpha^{k-\frac{1}{2}} \times$$

$$\begin{aligned} & \times \left(1 - \frac{x}{a}\right)^k F\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 1-k, \frac{1 + \frac{x}{a}}{2}\right) - \\ & - A_1 a^{k-\frac{1}{6}} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{6}} \left(\frac{2}{R}\right)^{\frac{1}{12}} \frac{1}{\sin \pi k} \left(1 + \frac{x}{a}\right)^k F\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 1+k, \frac{1 + \frac{x}{a}}{2}\right) \end{aligned} \quad (19)$$

Выражения (9), (10), (12) дают решение задачи по определению окрестности точки пересечения ударной волны с каустикой через присоединенные сферические функции в виде единого аналитического представления.

Сходная по характеру особенности задача возникает при рассмотрении окрестности острых углов *A*, *B* и *C* (фиг. 1), для медленной магнитозвуковой волны, причем в случае сферического источника решение вблизи *A* и *B* совпадает с приведенным выше.



Фиг. 1.

В плоской задаче об источнике массы интенсивности $q_0 \frac{e^{-1}}{\Gamma(k_0)}$ \times $\langle \delta(x) \delta(y) \rangle$, где ось *Ox* направлена по начальному магнитному полю, ось *Oy* — перпендикулярно ей, давление вблизи *A* в линейной постановке имеет вид [4]

$$P = \operatorname{Re} \left\{ \frac{2}{\pi} e^{-i\frac{\pi}{4}} A_1 \int_0^{\infty} e^{i\omega(\bar{y}-t)} v(\omega^2 y_1) \omega^{\frac{1}{2}} \frac{d\omega}{(-i\omega)^{k+1}} \right\} \quad (20)$$

где $v(x)$ есть функция Эйри, и введены обозначения

$$A_1 = \frac{i2\pi - \pi}{4\pi^2} \frac{q_0 a_0^2 (1 - a_1^2 a_1^2 - a_1^2 \beta_1^2)}{\Pi_0(x_0, \beta_1)} \left(\frac{2}{x^2 x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\tilde{T} = z_1 x + \beta_1 y, \quad k = k_0 - \frac{3}{2}, \quad a_1 = \alpha(\beta_1), \quad y_1 = \left(\frac{2}{x^{\alpha'} x}\right)^{\frac{1}{3}} (x\alpha' + y) \quad (21)$$

причем $\Pi(\alpha, \beta) = 1 - (\alpha^2 + \beta^2)(\alpha_0^2 - a^2 - \alpha^2 a^2 x^2)$, $\Pi = 0$, $\alpha = \alpha(\beta)$ есть уравнение поверхности нормалей полны, α_0 — начальная скорость звука, a — скорость Альфвена, значение β_1 находится из условия в точке A $\alpha^*(\beta_1) = 0$, $a_1 = \alpha(\beta_1)$, x есть значение x в точке A .

Вводя координату $x_1 = \tilde{T} - t$, где ось Ax_1 направлена по лучу OA (фиг. 1), а ось Ay_1 — по касательной к AB , можно из (21) получить решение в окрестности A .

Пусть $x_1 = x$ есть уравнение AB , $x_1 = -\alpha$ — уравнение AC , $\alpha = \frac{2}{3}(-y_1)^{\frac{1}{3}}$ [4]. Вводя вещественную постоянную по формуле $A_1 = -iA_2$, можно найти при $x_1 >$

$$\begin{aligned} P = & A_2 \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{6}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{6} - k\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{6} + k\right)} \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma(k) \cos \pi k}{\sin \pi \left(\frac{1}{6} + k\right)} \times \\ & \times x^{k-\frac{1}{6}} \left(1 + \frac{x}{\alpha}\right)^k F\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 1 - k, \frac{1 - \frac{x}{\alpha}}{2}\right) - \\ & - A_2 \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{6}} \frac{1}{\Gamma(k) k \sin \pi k} x^{k-\frac{1}{6}} \left(-1 + \frac{x}{\alpha}\right)^k \times \\ & \times F\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 1 + k, \frac{1 - \frac{x}{\alpha}}{2}\right) \end{aligned} \quad (22)$$

При $-\alpha < x_1 < \alpha$, то есть в области между AB и AC , получится

$$\begin{aligned} P = & A_2 \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{6}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{6} - k\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{6} + k\right)} \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma(k) \cos \pi k}{\sin \pi \left(\frac{1}{6} + k\right)} \times \\ & \times \alpha^{k-\frac{1}{6}} \left(1 + \frac{x}{\alpha}\right)^k F\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 1 - k, \frac{1 - \frac{x}{\alpha}}{2}\right) - \end{aligned}$$

$$- A_3 \left(\frac{2}{3} \right)^{\frac{1}{6}} \frac{\cos \pi k}{\Gamma(k) k \sin \pi k} \alpha^{k-\frac{1}{6}} \left(1 - \frac{x}{\alpha} \right)^k \times \\ \times F \left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 1+k, \frac{1-\frac{x}{\alpha}}{2} \right) \quad (23)$$

Позади волны AC , $x < -\alpha$, получится [4]

$$P = A_3 \left(\frac{2}{3} \right)^{\frac{1}{6}} \frac{\sin \pi k \Gamma(k) \cos \pi k}{\Gamma \left(\frac{1}{6} + k \right) \Gamma \left(\frac{5}{6} + k \right) \sin \pi \left(\frac{1}{6} + k \right) \sin \pi \left(\frac{1}{6} - k \right)} \times \\ \times \alpha^{k-\frac{1}{6}} \left(1 - \frac{x}{\alpha} \right)^k F \left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 1-k, \frac{k+\frac{x}{\alpha}}{2} \right) - \\ - A_3 \left(\frac{2}{3} \right)^{\frac{1}{6}} \frac{1}{k \Gamma(k)} \alpha^{k-\frac{1}{6}} \left(-1 - \frac{x}{\alpha} \right)^k F \left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 1+k, \frac{1+\frac{x}{\alpha}}{2} \right)$$

Умножая в (9) P_0 на $-i$ и полагая $R_1 = -A_3 3^{\frac{1}{3}} \frac{i \Gamma(\lambda)}{1^{\sqrt{\pi}}}$, можно получить

$$u = P \\ u = \frac{\lambda}{\Gamma(1-i)} A_3 3^{\frac{1}{3}} \frac{2^{\frac{1}{6}} \Gamma \left(\frac{5}{6} - i \right) \Gamma \left(\frac{1}{6} - i \right) \alpha^{\frac{1}{6}-i} i \Gamma(i)}{3^{\frac{1}{3}} \sin \lambda \pi} \times \\ \times \operatorname{Re} (X^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \frac{P_{-\frac{1}{2}}(X) + iP_{-\frac{1}{2}}(-X)}{i}$$

Отсюда с использованием (11), (13), (16) найдется решение (22), (23), а также решение при $x < -\alpha$. Таким образом, решение вблизи особенности для волны [1] можно получить из решения, записанного через присоединенные функции.

Вблизи точки C вместо (20) можно найти для преобразования по Лапласу от P , $k+1 = k_0 - 1/2$,

$$-e^{i\bar{P}} = \frac{1}{(-i\omega)^{k_0-1}} \frac{q_0}{2\pi} i \int d\beta e^{-i\omega\beta} \frac{1 - \alpha_1^2 \alpha^2 - \alpha_1^2 \beta^2}{2\alpha_1^2 \alpha^2 \beta^2} \quad (24)$$

где из условия $\Pi = 0$ вблизи C получится

$$\frac{1}{c^2} - z^2 = \zeta_1^2 \left(1 - \frac{z^2}{\beta^2} \right), \quad \zeta_1 = \frac{1}{a_0 a_1 \beta}, \quad c = \frac{a_0 a_1}{\sqrt{a_0^2 + a_1^2}}$$

Тогда можно записать

$$P = \operatorname{Re} \frac{q_0 c}{4\pi a_0 a_1} i \int_{\Gamma} \frac{d\zeta_1}{\zeta_1^2} \frac{\left(t - \frac{x}{c} + \frac{\zeta_1^2}{2} cx - \frac{y}{a_0 a_1 \zeta_1} \right)_+^{k_0-2}}{\Gamma(k_0-1)} \quad (25)$$

где контур Γ следует выбрать из условия удовлетворения уравнений движения.

При $k_0 = 1$ отсюда для P получим

$$P = \operatorname{Re} \frac{q_0 c}{4\pi a_0 a_1} i \int_{\Gamma} \frac{d\zeta_1}{\zeta_1^2} z \left(t - \frac{x}{c} + \frac{\zeta_1^2}{2} cx - \frac{y}{a_0 a_1 \zeta_1} \right) \quad (26)$$

Решение (26) выражается через корни уравнения

$$Z^2 + \frac{2}{cx} \left(t - \frac{x}{c} \right) Z - \frac{2y}{a_0 a_1 cx} = 0 \quad (27)$$

причем в области внутри ABC , то есть при $\frac{2}{cx} \left(t - \frac{x}{c} \right)^2 + \frac{27y^2}{4a_0^3 a_1^3} < 0$,

все три корня действительны и $P=0$, что соответствует результату [5].

На AC корни Z_2 и Z_3 равны, а позади AC , проводя контур Γ через точку $\zeta_1 = Z_2$, $\operatorname{Im} Z_2 > 0$ слева направо и в обратном направлении через точку $\zeta_1 = Z_3$, $\operatorname{Im} Z_3 < 0$, можно найти решение (26) в виде

$$P = \operatorname{Re} \frac{q_0 c}{4\pi a_0 a_1} i \frac{2}{cx Z_2 (Z_2 - Z_1) (Z_2 - Z_3)} - \\ - \operatorname{Re} \frac{q_0 c}{4\pi a_0 a_1} i \frac{2}{cx Z_3 (Z_3 - Z_1) (Z_3 - Z_2)} \quad (28)$$

Поскольку $Z_{2,3}$ комплексно сопряжены, а Z_1 действителен, дробление за AC отлично от нуля.

Решение на оси x позади AC найдется в виде $x < ct$,

$$Z_1 = 0, \quad Z_{2,3} = \pm \sqrt{\frac{2}{cx}} i \sqrt{t - \frac{x}{c}} \quad (29)$$

$$P = - \frac{q_0 c}{4\pi a_0 a_1} \frac{\sqrt{\frac{cx}{2}}}{\left(t - \frac{x}{c} \right)^{\frac{3}{2}}}$$

Этот результат согласуется с решением на оси Ox [5].

Для произвольного k_0 решение на оси x при $x < ct$ дается в виде

$$P = -\frac{q_0}{4\pi a_0 a_1} \sqrt{\frac{cx}{2}} \frac{c^3}{\Gamma(k_0-1)} \int_0^{ct-x} \frac{1}{\sqrt{\tau}} \left(t - \frac{x}{c} - \frac{\tau}{c} \right)^{k_0-2} d\tau \quad (30)$$

Отсюда можно найти

$$P = -\frac{q_0}{4\pi a_0 a_1} c \sqrt{\frac{xc}{2}} \left(t - \frac{x}{c} \right)^{k_0-\frac{3}{2}} \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(k_0 - \frac{3}{2}\right)} \quad (31)$$

Решение всюду позади AC найдется сверткой из (28).

В задаче с осевой симметрией относительно оси x можно получить вблизи C давление в виде

$$P = -\operatorname{Re} \frac{q_0 c}{8\pi^2 a_0^2 a_1^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-1}^1 \frac{d\zeta_1}{\zeta_1^3} \frac{\left(t - \frac{x}{c} + \frac{cx}{2} \zeta_1^2 - \frac{y \cos \theta}{a_0 a_1 \zeta_1} \right)^{k_1-3}}{\Gamma(k_0-2)} \quad (32)$$

где $k+1 = k_0 - 1$.

Проводя контур Γ через особые точки $Z_{2,3}$, можно найти при $k_0 = 2$

$$P = -\operatorname{Re} \frac{q_0 c}{8\pi^2 a_0^2 a_1^2} \int_0^{2\pi} d\theta \frac{1}{Z_2^3} \frac{1}{cxZ_2 + \frac{y \cos \theta}{a_0 a_1 Z_2^2}} - \\ - \operatorname{Re} \frac{q_0 c}{8\pi^2 a_0^2 a_1^2} \int_0^{2\pi} d\theta \frac{1}{Z_3^3} \frac{1}{cxZ_3 + \frac{y \cos \theta}{a_0 a_1 Z_3^2}} \quad (33)$$

$$Z^3 + \frac{2}{cx} \left(t - \frac{x}{c} \right) Z - \frac{2x \cos \theta}{c x a_0 a_1} = 0$$

При $y = 0$, $x > ct$ из (33) получится

$$P = -\frac{q_0 c^2 x}{8\pi a_0^2 a_1^2 \left(\frac{x}{c} - t \right)^2} \quad (34)$$

что совпадает с решением на оси Ox , полученным в [5].

То, что контур Γ должен быть выбран так, как отмечено выше, можно проверить, решая задачу [5] приведенным здесь методом.

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ

ՀԵՂՈՒԿԻ ՊԱՐԱՄԵՏՐՆԵՐԻ ՈՐՈՇՈՒՄԸ ՀԱՐՎԱԾԱՅԻՆ ԱՎԻՔԻ ՄՈՏ

Ա մ ֆ ռ փ ու լ մ

Գիտարկվում է հեղուկի շարժման որոշման խնդիրը հարվածային ալիքի և կաուստիկայի հասման շրջակայքում: Ցույց է տրված, որ հեղինակի նախկինում ստացած լուծումը կարելի է ստանալ Բարիշի կողմից ստացված լուծումից, որն արտահայտվում է Լեժանդրի սֆերիկ ֆունկցիաների տեսքով: Վերջինից կարելի է, բազմապատկելով կիզմ միավորով, ստանալ հաղորդիչ հեղուկի շարժման խնդրի լուծումը դանդաղ մաղնևտաակուստիկ ալիքի մոտ:

DETERMINATION OF PARAMETERS OF FLUID MOTION NEAR A SHOCK WAVE

A. G. BAGDOEV

S u m m a r y

The behaviour of a shock wave in the linear problem near arbitrary caustic is considered. It is shown that the solution in the hypergeometric functions form obtained previously can be found from the solution due to V. M. Babich in the spherical functions form. From the latter, also, the solution for the problem on the mass source in conducting fluid is obtained, suggested by the author previously.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Բագդոև Ա. Գ., Օսյան Դ. Դ. Օпределение параметров движения газа вблизи каустики. Докл. АН Арм. ССР, №2, 1969.
2. Гобсон Е. Теория сферических и эллипсоидальных функций. ИЛ, 1952.
3. Бабич В. М. Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн, т. V, Л., 1961.
4. Բագդոև Ա. Գ. Определение решения вблизи особой линии. Докл. АН Арм. ССР, №1, 1969.
5. Половин Р. В. и Черкисова К. П. Магнитоакуловые волны. Магнитная гидродинамика. №1, 1966.